УДК 519.816

НЕЧЕТКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЕКТА С ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЯМИ РАБОТ В ФОРМЕ ОБОБЩЕННЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Т. М. Леденева, Д. А. Черменев

Воронежский государственный университет,
ООО «DataArt-Воронеж»

Поступила в редакцию 06.04.2015 г.

Аннотация. В статье рассматривается подход к определению временных параметров проекта для случая, когда продолжительности работ задаются в форме обобщенных гауссовых чисел.
Ключевые слова: нечеткое гауссово число, сетевой график, критическое время выполнения проекта.
Annotation. The article discusses the approach to determine the time parameters of the project for the case when the duration of works are specified in the form of a generalized Gaussian numbers.
Keywords: Gaussian fuzzy number, network schedule, the critical time for the project.

ВВЕДЕНИЕ

Под *проектом* будем подразумевать комплекс работ (операций), имеющих определенную продолжительность – время, необходимое для реализации, и выполняющихся в определенной последовательности [1]. Теория управления проектами основывается на различных подходах и содержит мощный инструментарий для решения практических задач [1, 3, 4, 11].В качестве модели проекта выступает сетевой график – ориентированный взвешенный бесконтурный граф, на основе которого определяются временные параметры *сетевого графика* – та информация, которая используется для составления календарного плана [11]. В данном случае учет фактора неопределенности приводит к необходимости приближенных оценок продолжительности операций, включенных в проект. Как известно, неопределенность имеет различную интерпретацию, что обусловливает выбор математического аппарата для ее формализации и адекватных методов, обеспечивающих обработку информации. Наиболее проработанным в теоретическом плане является подход, основанный на теории вероятности, но для его применения необходим большой объем статистической информации, которая в задачах сетевого планирования не всегда является доступной. В этих условиях особую актуальность приобретает аппарат теории нечетких множеств, а наиболее известное его приложение к задаче управления проектами – метод нечеткого критического пути [2]. Нечеткая информация относительно продолжительности операций, включенных в проект, может быть получена от экспертов. Данный подход целесообразен для случая, когда проект и каждая операция являются уникальными и отсутствуют как нормативы, так и статистические данные.

В статье представлены результаты обобщения методов сетевого планирования для случая, когда продолжительности работ заданы в форме обобщенных гауссовых чисел. Их преимуществом является наличие ряда параметров, позволяющих обеспечить достоверную оценку продолжительности включенных в проект операций.

1. ОБОБЩЕННЫЕ ГАУССОВЫ ЧИСЛА: ХАРАКТЕРИСТИКИ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Основная проблема разработки нечетких моделей сетевого планирования состоит в выборе функции принадлежности для нечеткой продолжительности работ. Существует множество видов функций принадлежности нечетких чисел, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки [5]. Наибольший интерес для исследовательских целей и обеспечения гибкости моделей имеет функция принадлежности в виде обобщенного гауссова числа, которое относится к нечетким числам (L-R)-типа и имеет функцию принадлежности вида [8]

$$g\left(a,\sigma^l,b^l,\sigma^r,b^r;x\right)=$$
$$=\begin{cases} L\left(x\right)=\exp\left(-\left(\dfrac{\left|x-a\right|}{\sigma^l}\right)^{2\beta^l}\right), & x<a, \\ R\left(x\right)=\exp\left(-\left(\dfrac{\left|x-a\right|}{\sigma_r}\right)^{2\beta^r}\right), & x\ge a, \end{cases} \quad (1)$$

где a – модальное значение, β^l, β^r – параметры формы для функций $L(x)$ и $R(x)$ соответственно, σ^l, σ^r – параметры «ширины» нечеткого числа соответственно слева и справа от модального значения.

Обобщенное гауссово число с функций принадлежности (1) формализует высказывание x *приблизительно равно* a.

Если $\beta^l=\beta^r=\beta$ и $\sigma^l=\sigma^r=\sigma$, т. е. $L(x)=R(x)$, то гауссово число является симметричным, при этом для $\beta=1$ получим обычное гауссово число, которое достаточно широко используется в приложениях. Функция принадлежности обычного гауссова числа имеет точку перегиба с абсциссой $a\pm\sigma$, при этом под a подразумевается наиболее вероятная, достоверная оценка. Величина $1/\sigma^2$ есть коэффициент сжатия, который характеризует степень отклонения слева (справа) от модального значения. Величина β характеризует степень достоверности. При $\beta^l>1\left(\beta^r>1\right)$ график функции принадлежности является выпуклым вверх; при $\beta^l<1\left(\beta^r<1\right)$ – выпуклым вниз. Этот факт можно использовать для учета степени риска оценки в виде гауссова числа: если оценка оптимистическая, то ей соответствует выпуклая вверх функция принадлежности, если пессимистическая – выпуклая вниз. Управляя параметрами обобщенного гауссова числа, можно составить наиболее подходящую нечеткую оценку продолжительности работ в заданных условиях, подразумевая под модальным значением a наиболее достоверную оценку.

α-срез обобщенного гауссова числа определяется из уравнения

$$g\left(a,\sigma^l,\beta^l,\sigma^r,\beta^r;x\right)=\alpha .$$

Так как функция принадлежности является выпуклой, то α-срез представляет собой интервал или отрезок в зависимости от того является он строгим или слабым. В дальнейших рассуждениях будем использовать слабые α-срезы, границы которых определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \underline{x}\left(\alpha\right)=a-\sigma^l\left(-\ln\alpha\right)^{1/2\beta^l}, \\ \overline{x}\left(\alpha\right)=a+\sigma^r\left(-\ln\alpha\right)^{1/2\beta^r}. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначив $\left(-\ln\alpha\right)^{1/2}=\gamma_\alpha$, получим

$$\begin{cases} \underline{x}\left(\alpha\right)=a-\sigma^l\gamma_\alpha^{1/\beta^l}, \\ \overline{x}\left(\alpha\right)=a+\sigma^r\gamma_\alpha^{1/\beta^r}. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, α-срез обобщенного гауссова числа A с функцией принадлежности вида (1) представляет собой отрезок вида $\left[\underline{x}_A\left(\alpha\right),\overline{x}_\alpha\left(\alpha\right)\right]$.

Для α-среза можно вычислить среднее значение

$$\hat{x}_A\left(\alpha\right)=a+\frac{1}{2}\left(\sigma^r\gamma_\alpha^{1/\beta^r}-\sigma^l\gamma_\alpha^{1/\beta^l}\right) \quad (4)$$

и величину

$$\Delta_A\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\sigma^l\gamma_\alpha^{1/\beta^l}+\sigma^r\gamma_\alpha^{1/\beta^r}\right), \quad (5)$$

тогда его границы запишутся в виде

$$\begin{cases} \underline{x}_A\left(\alpha\right)=\hat{x}_A\left(\alpha\right)-\Delta_A\left(\alpha\right), \\ \overline{x}_A\left(\alpha\right)=\hat{x}_A\left(\alpha\right)+\Delta_A\left(\alpha\right). \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае α-срез обобщенного гауссова числа A при необходимости будем обозначать $A^{\alpha}=\left\langle \hat{x}_A(\alpha), \Delta_A(\alpha)\right\rangle$.

Заметим, что для симметричного гауссова числа $\hat{x}_A(\alpha)=a$ и $\Delta_A(\alpha)=\sigma\gamma_{\alpha}^{1/\beta}$, и тогда границы примут вид

$$\begin{cases} \underline{x}_A(\alpha)=a-\sigma\gamma_{\alpha}^{1/\beta}, \\ \overline{x}_A(\alpha)=a+\sigma\gamma_{\alpha}^{1/\beta}. \end{cases} \quad (7)$$

При $a=0$ получим число $\tilde{0}=g\left(0,\sigma_0^l,\beta_0^l,\sigma_0^r,\beta_0^r;x\right)$, которое назовем обобщенным гауссовым нулем. Для его α-среза

$$\hat{x}_{\tilde{0}}(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\sigma_0^r\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^r}-\sigma_0^l\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^l}\right),$$

$$\Delta_{\tilde{0}}(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\sigma_0^l\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^l}+\sigma_0^r\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^r}\right), \quad (8)$$

$$\underline{x}_{\tilde{0}}(\alpha)=-\sigma_0^l\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^l}, \ \overline{x}_{\tilde{0}}(\alpha)=-\sigma_0^r\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0^r}. \quad (9)$$

α-срез симметричного гауссова нуля имеет вид $\tilde{0}=\left\langle 0,\sigma_0\gamma_{\alpha}^{1/\beta_0}\right\rangle$.

На основе обобщенного гауссова нечеткого числа можно ввести понятие обобщенного гауссова нечеткого интервала (L-R)-типа. Небольшая корректировка параметров позволяет построить α-срез для гауссова интервала. При построении нечеткого сетевого графика можно использовать как обобщенные гауссовы числа, так и обобщенные гауссовы интервалы, α-срезы которых будем называть *интервалами*, учитывая определения интервального анализа [6].

Для определения арифметических операций над нечеткими числами интервалами общепринятым является подход, основанный на использовании принципа обобщения [5]. Но при его реализации возникают значительные трудности, связанные с определением функции принадлежности соответствующей бинарной арифметической операции. Данная проблема может быть частично решена с применением численных методов максмина [7], но для решения практических задач эти методы представляются достаточно трудоемкими. В [5] рассматривается концептуально иной подход, который предполагает разложение нечеткого числа (интервала) на α-уровни с последующей реализацией арифметических операций над полученными интервалами, которые соответствуют этим α-уровням. Таким образом, нечеткое число (интервал) W, являющееся результатом бинарной арифметической операции $*\in\{+,-,\times,/\}$ над нечеткими числами и/или интервалами A и B, можно представить в виде:

$$W=A*B=\bigcup_{\alpha}W^{\alpha}=\bigcup_{\alpha}A^{\alpha}\,\tilde{*}\,B^{\alpha},$$

где $*$ – операция над нечеткими числами и/или интервалами; $\tilde{*}$ – соответствующая операция над интервалами; $A^{\alpha},B^{\alpha},W^{\alpha}$ – α-срезы соответствующих нечетких множеств.

Таким образом, проблемы нечеткой арифметики сводятся к проблемам интервального анализа. Очевидно, что представление нечеткого числа и/или интервала в виде совокупности α-срезов является дискретным и соответственно вносит погрешности в вычисления. Однако, как показали вычислительные эксперименты, описанные в [5], эти погрешности не столь существенны.

В дальнейшем будем считать, что результатом арифметических операций над обобщенными гауссовыми числами (интервалами) является нечеткое число (интервал), также относящееся к данному типу, параметры которого определяются через параметры операндов.

Пусть A и B – обобщенные гауссовы числа с функциями принадлежности вида (1), их α-срезы обозначим $A^{\alpha}=\left\langle \hat{x}_A(\alpha),\Delta_A(\alpha)\right\rangle$ и $B^{\alpha}=\left\langle \hat{x}_B(\alpha),\Delta_B(\alpha)\right\rangle$, $\alpha\in(0,1]$. Учитывая определения интервальных операций [8], получим, что

$$A^{\alpha}+B^{\alpha}=\left\langle \hat{x}_A(\alpha)+\hat{x}_B(\alpha),\Delta_A(\alpha)+\Delta_B(\alpha)\right\rangle, \quad (10)$$

$$A^{\alpha}-B^{\alpha}=\left\langle \hat{x}_A(\alpha)-\hat{x}_B(\alpha),\Delta_A(\alpha)+\Delta_B(\alpha)\right\rangle. \quad (11)$$

Если A и B – симметричные обобщенные гауссовы числа и $\alpha\in(0,1]$, то учитывая (7), получим следующую формулу:

$$A^{\alpha}\pm B^{\alpha}=\left\langle a\pm b,\sigma_A\gamma_{\alpha}^{1/\beta_A}+\sigma_B\gamma_{\alpha}^{1/\beta_B}\right\rangle. \quad (12)$$

Обобщая формулу (10) для n гауссовых чисел, получим формулу

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^{\alpha}=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{A_i}(\alpha),\sum_{i=1}^{n}\Delta_{A_i}(\alpha)\right\rangle. \quad (13)$$

Сравнение нечетких чисел и интервалов по отношению «больше – меньше» является нетривиальной задачей, решению которой посвящены многочисленные исследования (например, [9–11]).

Согласно [6], два интервала считаются равными, если их границы попарно совпадают. Поэтому два α-среза

$A^\alpha = \left[\hat{x}_A(\alpha) - \Delta_A(\alpha), \hat{x}_A(\alpha) + \Delta_A(\alpha)\right]$ и

$B^\alpha = \left[\hat{x}_B(\alpha) - \Delta_B(\alpha), \hat{x}_B(\alpha) + \Delta_B(\alpha)\right]$

обобщенных гауссовых чисел A и B будем считать четко равными (обозначение $A^\alpha = B^\alpha$), если для каждого α из $(0,1]$ выполняются условия

$$\begin{cases} \hat{x}_A(\alpha) - \Delta_A(\alpha) = \hat{x}_B(\alpha) - \Delta_B(\alpha), \\ \hat{x}_A(\alpha) + \Delta_A(\alpha) = \hat{x}_B(\alpha) + \Delta_B(\alpha), \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_A(\alpha) = \hat{x}_B(\alpha), \\ \Delta_B(\alpha) = \Delta_A(\alpha). \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что данное определение является достаточно жестким. Если допустить, что нарушение границ на некоторую малую величину δ является допустимым, то можно говорить о приближенном равенстве α-срезов. Таким образом, два α-среза

$A^\alpha = \left[\hat{x}_A(\alpha) - \Delta_A(\alpha), \hat{x}_A(\alpha) + \Delta_A(\alpha)\right]$ и

$B^\alpha = \left[\hat{x}_B(\alpha) - \Delta_B(\alpha), \hat{x}_B(\alpha) + \Delta_B(\alpha)\right]$

обобщенных гауссовых чисел A и B будем считать *приблизительно* равными (обозначение $A^\alpha \approx_\delta B^\alpha$), если для каждого α из $(0,1]$ выполняются условия

$$\begin{cases} \hat{x}_A(\alpha) = \hat{x}_B(\alpha), \\ \left|\Delta_B(\alpha) - \Delta_A(\alpha)\right| = \delta. \end{cases} \tag{15}$$

Два α-среза

$A^\alpha = \left[\hat{x}_A(\alpha) - \Delta_A(\alpha), \hat{x}_A(\alpha) + \Delta_A(\alpha)\right]$ и

$B^\alpha = \left[\hat{x}_B(\alpha) - \Delta_B(\alpha), \hat{x}_B(\alpha) + \Delta_B(\alpha)\right]$

обобщенных гауссовых чисел A и B будем считать нечетко равными (обозначение $A^\alpha \simeq B^\alpha$), если их разность равна обобщенному гауссовому нулю, т. е.

$$\begin{cases} A - B = \tilde{0}, \\ B - A = \tilde{0}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in (0,1] \left(\begin{cases} \left\langle \hat{x}_A(\alpha) - \hat{x}_B(\alpha), \right. \\ \left. \Delta_A(\alpha) + \Delta_B(\alpha) \right\rangle = \\ = \left\langle 0, \Delta_{\tilde{0}}(\alpha) \right\rangle, \\ \left\langle \hat{x}_B(\alpha) - \hat{x}_A(\alpha), \right. \\ \left. \Delta_A(\alpha) + \Delta_B(\alpha) \right\rangle = \\ = \left\langle 0, \Delta_{\tilde{0}}(\alpha) \right\rangle, \end{cases} \right),$$

откуда

$$\begin{cases} \hat{x}_A(\alpha) = \hat{x}_B(\alpha), \\ \Delta_A(\alpha) + \Delta_B(\alpha) = \Delta_{\tilde{0}}(\alpha), \end{cases} \tag{16}$$

или с учетом параметрического представления

$$\begin{cases} (a-b) + \dfrac{1}{2}\left(\left(\sigma_A^r \gamma^{1/\beta_A^r} - \sigma_A^l \gamma^{1/\beta_A^l}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sigma_B^r \gamma^{1/\beta_B^r} - \sigma_B^l \gamma^{1/\beta_B^l}\right)\right) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\sigma_A^r \gamma^{1/\beta_A^r} - \sigma_A^l \gamma^{1/\beta_A^l}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sigma_B^r \gamma^{1/\beta_B^r} - \sigma_B^l \gamma^{1/\beta_B^l}\right)\right) = \Delta_{\tilde{0}}(\alpha). \end{cases}$$

Иначе данную систему можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} \left(\sigma_A^l \gamma^{1/\beta_A^l} + \sigma_B^r \gamma^{1/\beta_B^r}\right) - (a-b) = \Delta_{\tilde{0}}(\alpha), \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(\sigma_A^r \gamma^{1/\beta_A^r} - \sigma_A^l \gamma^{1/\beta_A^l}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sigma_B^r \gamma^{1/\beta_B^r} - \sigma_B^l \gamma^{1/\beta_B^l}\right)\right) = \Delta_{\tilde{0}}(\alpha), \end{cases} \tag{17}$$

откуда получаем условия для параметров обобщенных гауссовых чисел, обусловливающие их *нечеткое* равенство

$$\left(\sigma_A^l \gamma^{1/\beta_A^l} + \sigma_B^r \gamma^{1/\beta_B^r}\right) - (a-b) = = \frac{1}{2}\left(\sigma_0^l \gamma_\alpha^{1/\beta_0^l} + \sigma_0^r \gamma_\alpha^{1/\beta_0^r}\right). \tag{18}$$

Перспективным является развитие вероятностного подхода [9] к формализации отношений в классах четких и нечетких интервалов. Пусть $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$ –заданные интервалы. В случае, когда интервалы не пересекаются, можно однозначно определить процедуру их сравнения. Наибольший интерес представляет случай пересечения интервалов. Пусть $a\in A$, $b\in B$ – случайные величины, которые равномерно распределены на соответствующих интервалах. Если интервалы A и B пересекаются, то на основе образующихся в результате появления возможных значений случайных величин подинтервалов можно определить вероятности $P(A<B)$, $P(A=B)$, $P(A>B)$. Вероятность $P(A<B)$ означает, что случайная точка $a\in A$ лежит левее случайной точки $b\in B$. Соответствующую интерпретацию имеют и другие вероятности $P(A=B)$, $P(A>B)$. В табл. 1 представлены формулы для расчета соответствующих вероятностей с учетом взаимного расположения пары интервалов.

Описанный выше подход можно использовать для сравнения нечетких чисел (интервалов), применяя его для каждого α -среза. Пусть $A^\alpha=\left\langle \hat{x}_A(\alpha),\Delta_A(\alpha)\right\rangle$ и $B^\alpha=\left\langle \hat{x}_B(\alpha),\Delta_B(\alpha)\right\rangle$ – α -срезы обобщенных гауссовых чисел A и B соответственно. Формулы для вычисления вероятностей

$$P\left(A_\alpha>B_\alpha\right), P\left(A_\alpha<B_\alpha\right), P\left(A_\alpha=B_\alpha\right)$$

приведены в табл. 2.

Вычислив вероятности для каждого значения $\alpha\in\left(0,1\right]$, можно составить дискретные нечеткие множества

$$\tilde{P}\left(A^\alpha<B^\alpha\right)=\left\{\left(\alpha\,/\,P\left(A^\alpha<B^\alpha\right)\right)\right\},$$

$$\tilde{P}\left(A^\alpha=B^\alpha\right)=\left\{\left(\alpha\,/\,P\left(A^\alpha=B^\alpha\right)\right)\right\},$$

$$\tilde{P}\left(A^\alpha>B^\alpha\right)=\left\{\left(\alpha\,/\,P\left(A^\alpha>B^\alpha\right)\right)\right\}.$$

На практике удобнее использовать величины, которые характеризовали бы в вероятностном смысле отношения между нечеткими интервалами. Например, применяя метод центра тяжести [8] к нечеткому множеству $\tilde{P}\left(A_\alpha<C_\alpha\right)=\left\{\left(\alpha\,/\,P\left(A_\alpha<C_\alpha\right)\right)\right\}$, получим число

$$p_<\left(A,B\right)=\frac{\sum_\alpha \alpha\cdot P\left(A^\alpha<B^\alpha\right)}{\sum_\alpha \alpha}, \qquad (19)$$

которое количественно характеризует отношение < между обобщенными гауссовыми числами. Аналогично вычисляются оценки для $\tilde{P}\left(A^\alpha=B^\alpha\right)$ и $\tilde{P}\left(A^\alpha>B^\alpha\right)$.

Заметим, что события $\left(A^\alpha<B^\alpha\right)$, $\left(A^\alpha=B^\alpha\right)$, $\left(A^\alpha>B^\alpha\right)$ образуют полную группу событий, поэтому $p_<\left(A,B\right)+p_=\left(A,B\right)+p_>\left(A,B\right)=1.$

Следовательно, только одно из чисел может быть больше, чем 0.5. Будем считать, что для обобщенных гауссовых чисел A и B имеет место отношение $A<B\left(A>B\right)$, если $p_<\left(A,B\right)>0.5\left(p_>\left(A,B\right)>0.5\right)$. Кроме того, с точки зрения вероятностного подхода обобщенные гауссовы числа A и B равны, если $p_=\left(A,B\right)>0.5$. Если все величины меньше, чем 0.5, то имеет место неопределенность.

Таблица 1

Вычисление вероятностей для различных случаев

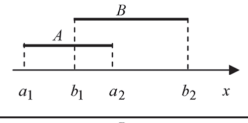
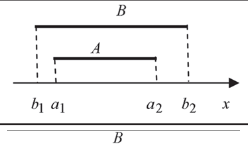
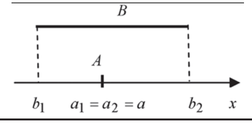
№	Ситуация	$P(A<B)$	$P(A=B)$	$P(A>B)$
1		$1-\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	$\dfrac{(a_2-b_1)^2}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$	0
2		$\dfrac{b_2-a_2}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}$	$\dfrac{a_1-b_1}{b_2-b_1}$
3		$\dfrac{b_2-a}{b_2-b_1}$	0	$\dfrac{a-b_1}{b_2-b_1}$

Таблица 2

Вероятности отношений α -срезов обобщенных гауссовых симметричных чисел и чисел (L-R)-типа

$P(<,=,>)$	**Обобщенные гауссовы числа**	
	Несимметричные	**Симметричные**
Ситуация 1		
$P(A^\alpha < B^\alpha)$	$1-\dfrac{\left[\left(\hat{x}_A(\alpha)-\hat{x}_B(\alpha)\right)+\left(\Delta_A(\alpha)+\Delta_B(\alpha)\right)\right]^2}{4\Delta_A(\alpha)\Delta_B(\alpha)}$	$1-\dfrac{\left[(a-b)+\left(\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}+\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}\right)\right]^2}{4\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
$P(A^\alpha = B^\alpha)$	$\dfrac{\left[\left(\hat{x}_A(\alpha)-\hat{x}_B(\alpha)\right)+\left(\Delta_A(\alpha)+\Delta_B(\alpha)\right)\right]^2}{4\Delta_A(\alpha)\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{\left[(a-b)+\left(\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}+\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}\right)\right]^2}{4\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
$P(A^\alpha > B^\alpha)$	0	0
Ситуация 2		
$P(A^\alpha < B^\alpha)$	$\dfrac{\left(\hat{x}_B(\alpha)-\hat{x}_A(\alpha)\right)+\left(\Delta_B(\alpha)-\Delta_A(\alpha)\right)}{2\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{(b-a)+\left(\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}-\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}\right)}{2\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
$P(A^\alpha = B^\alpha)$	$\dfrac{\Delta_A(\alpha)}{\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}}{\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
$P(A^\alpha > B^\alpha)$	$\dfrac{\left(\Delta_B(\alpha)-\Delta_A(\alpha)\right)-\left(\hat{x}_B(\alpha)-\hat{x}_A(\alpha)\right)}{2\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{(b-a)-\left(\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}-\sigma_A\gamma_\alpha^{1/\beta_A}\right)}{2\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
Ситуация 3		
$P(A^\alpha < B^\alpha)$	$\dfrac{\hat{x}_B(\alpha)+\Delta_B(\alpha)-a}{2\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{b-a+\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}{2\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$
$P(A^\alpha = B^\alpha)$	0	0
$P(A^\alpha > B^\alpha)$	$\dfrac{a-\hat{x}_B(\alpha)+\Delta_B(\alpha)}{2\Delta_B(\alpha)}$	$\dfrac{a-b+\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}{2\sigma_B\gamma_\alpha^{1/\beta_B}}$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Для нахождения временных параметров сетевого графика будем использовать классический алгоритм [12, 13].Под сетью подразумевается ориентированный бесконтурный граф $G=(X,U)$, имеющий одну начальную и одну конечную вершины. Каждой дуге (i,j) ставится в соответствие работа с продолжительностью t_{ij}. Каждая вершина – это событие, которое заключается в окончании и/или начале работы или нескольких работ. Работы-дуги, выходящие из некоторой вершины, начинаются только, если завершились работы-дуги, входящие в данную вершину. Будем считать, что все события сети имеют правильную нумерацию, которая может быть получена на основе топологической сортировки бесконтурного графа [13]. Будем считать, что начальная вершина сети имеет номер 1, а конечная – номер N. При правильной нумерации вершин для каждой дуги (i,j) имеет место неравенство $i<j$, а временные параметры находятся при однократном просмотре вершин, иначе алгоритм носит итерационный характер.

Будем считать, что продолжительность работы (i,j) задана в виде обобщенного гауссова числа $\tilde{t}_{ij}$ с функцией принадлежности вида (1).

Обозначим через $\tilde{T}_{p(i)}$, $\tilde{T}_{n(i)}$ нечеткие раннее и позднее времена наступления i-го события соответственно, полагая, что они также задаются также в форме обобщенных гауссовых чисел с функцией принадлежности (1). Для каждого значения $\alpha\in(0,1]$ продолжительности работ, ранние и поздние времена событий имеют интервальное представление.

Для заданного значения $\alpha\in(0,1]$ можно определить α-срезы перечисленных нечетких параметров по формуле (6) в виде

$$\left\langle \hat{t}_{ij}(\alpha),\Delta_{ij}(\alpha)\right\rangle,\ \left\langle \hat{T}_{p(i)}(\alpha),\Delta_{p(i)}(\alpha)\right\rangle,$$
$$\left\langle \hat{T}_{n(i)}(\alpha),\Delta_{n(i)}(\alpha)\right\rangle.$$

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Начальному событию 1 присвоить раннее время

$$\left\langle \hat{T}_{p(1)}(\alpha),\Delta_{p(1)}(\alpha)\right\rangle=\left\langle 0,\Delta_0(\alpha)\right\rangle.$$

2. Двигаясь по сети в порядке возрастания номеров вершин-событий, определить ранее время наступления i-го события по формуле

$$\left\langle \hat{T}_{p(i)}(\alpha),\Delta_{p(i)}(\alpha)\right\rangle=$$
$$=\max_{j\in\Gamma^{-1}(i)}\left\{\left\langle \hat{T}_{p(j)}(\alpha)+\hat{t}_{ij},\Delta_{p(j)}(\alpha)+\Delta_{ij}(\alpha)\right\rangle\right\}, \tag{20}$$

при этом для нахождения max используется процедура, основанная на выбранном способе сравнения нечетких чисел.

3. Для конечного события сети N положить

$$\left\langle \hat{T}_{n(N)}(\alpha),\Delta_{n(N)}(\alpha)\right\rangle=\left\langle \hat{T}_{p(N)}(\alpha),\Delta_{p(N)}(\alpha)\right\rangle, \tag{21}$$

при этом величина критического пути для данного α-среза определяется интервалом

$$L_{кр}(\alpha)=$$
$$=\left[\hat{T}_{n(N)}(\alpha)-\Delta_{n(N)}(\alpha),\hat{T}_{n(N)}(\alpha)+\Delta_{n(N)}(\alpha)\right]. \tag{22}$$

4. Двигаясь по сети в порядке убывания номеров вершин от конечного события к начальному, определить поздние времена событий по формуле

$$\left\langle \hat{T}_{n(i)}(\alpha),\Delta_{n(i)}(\alpha)\right\rangle=$$
$$=\min_{k\in\Gamma(i)}\left\{\left\langle \hat{T}_{n(k)}(\alpha)-\hat{t}_{ik},\Delta_{n(k)}(\alpha)+\Delta_{ik}(\alpha)\right\rangle\right\}, \tag{23}$$

при этом для нахождения min используется процедура, основанная на выбранном способе сравнения нечетких чисел.

Заметим, что для начального события должно выполняться условие

$$\left\langle \hat{T}_{p(1)}(\alpha),\Delta_{p(1)}(\alpha)\right\rangle=$$
$$=\left\langle \hat{T}_{n(1)}(\alpha),\Delta_{n(1)}(\alpha)\right\rangle=\left\langle 0,\Delta_0(\alpha)\right\rangle. \tag{24}$$

Рассмотрим условия принадлежности события и работы критическому пути [12]. В классическом случае имеет место следующее

Утверждение 1 (условие критичности события). Для того, чтобы событие i принадлежало критическому пути, необходимо и достаточно, чтобы раннее и позднее времена этого события были равны.

Зафиксируем $\alpha\in(0,1]$ и рассмотрим i-ое событие. Поскольку времена имеют интервальное представление, то для соответствующих интервалов можно рассматривать варианты определения отношения равенства.

В случае четкого равенства, получим, что должно выполняться

$$\left\langle \hat{T}_{p(i)}(\alpha), \Delta_{p(i)}(\alpha) \right\rangle = \left\langle \hat{T}_{n(i)}(\alpha), \Delta_{n(i)}(\alpha) \right\rangle, \quad (25)$$

откуда получим условие для параметров обобщенных гауссовых чисел

$$\begin{cases} T_{n(i)} - T_{p(i)} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sigma^r_{n(i)}\gamma_\alpha^{1/b^r_{\delta(i)}} - \sigma^l_{n(i)}\gamma_\alpha^{1/b^l_{\delta(i)}}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sigma^r_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/b^r_{\delta(i)}} - \sigma^l_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/b^l_{\delta(i)}}\right)\right], \\ \Delta_{n(i)}(\alpha) - \Delta_{p(i)}(\alpha) = \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sigma^r_{n(i)}\gamma_\alpha^{1/b^r_{\delta(i)}} + \sigma^l_{n(i)}\gamma_\alpha^{1/b^l_{\delta(i)}}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sigma^r_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/b^r_{\delta(i)}} + \sigma^l_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/b^l_{\delta(i)}}\right)\right]. \end{cases} \quad (26)$$

В случае нечеткого равенства допускается, что разность между соответствующими компонентами должна быть равна гауссовому нулю, а, следовательно,

$$\begin{cases} \hat{T}_{n(i)}(\alpha) - \hat{T}_{p(i)}(\alpha) = \hat{0}(\alpha), \\ \Delta_{n(i)}(\alpha) + \Delta_{p(i)}(\alpha) = \Delta_{\tilde{0}}(\alpha). \end{cases} \quad (27)$$

Кроме того, можно использовать и вероятностный подход, изложенный выше. В этом случае предполагается, что вероятность равенства этих интервалов должна быть больше 0.5.

В классическом случае имеет место

Утверждение 2 (условие критичности работы). Работа (i, j) является критической тогда и только тогда, когда ее полный резерв равен нулю.

В нашем случае интервальное представление полного резерва для фиксированного $\alpha \in (0,1]$ имеет следующий вид

$$\begin{gathered} R_{плн(i,j)}(\alpha) = \left\langle \hat{T}_{n(j)}(\alpha) - \hat{T}_{p(i)}(\alpha) - \right. \\ \left. -\hat{t}_{ij}(\alpha), \Delta_{n(j)}(\alpha) + \Delta_{p(i)}(\alpha) + \Delta_{ij}(\alpha) \right\rangle. \end{gathered} \quad (28)$$

Тогда работа (i, j) является критической, если для каждого $\alpha \in (0,1]$ имеет место равенство интервалов

$$\begin{gathered} \left\langle \hat{T}_{n(j)}(\alpha) - \hat{T}_{p(i)}(\alpha) - \hat{t}_{ij}(\alpha), \Delta_{n(j)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \Delta_{p(i)}(\alpha) + \Delta_{ij}(\alpha) \right\rangle = \left\langle \hat{0}(\alpha), \Delta_{\tilde{0}}(\alpha) \right\rangle. \end{gathered} \quad (29)$$

Для обобщенных симметричных гауссовых чисел с учетом определений (7) и (9) выражение (29) принимает вид

$$\left\langle T_{n(j)} - T_{p(i)} - t_{ij}, \delta_{n(j)}\gamma_\alpha^{1/\beta_{i(j)}} + \right. \\ \left. + \delta_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/\beta_{\delta(i)}} + \delta_{ij}\gamma_\alpha^{1/\beta_{ij}} \right\rangle = \left\langle 0, \delta_0\gamma_\alpha^{1/\beta_0} \right\rangle,$$

откуда

$$\begin{cases} T_{n(j)} - T_{p(i)} - t_{ij} = 0, \\ \delta_{n(j)}\gamma_\alpha^{1/\beta_{i(j)}} + \delta_{p(i)}\gamma_\alpha^{1/\beta_{\delta(i)}} + \delta_{ij}\gamma_\alpha^{1/\beta_{ij}} = \delta_0\gamma_\alpha^{1/\beta_0}. \end{cases} \quad (30)$$

Можно рассмотреть другие варианты определения отношения равенства.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим простейший сетевой график, представленный на рис. 1.

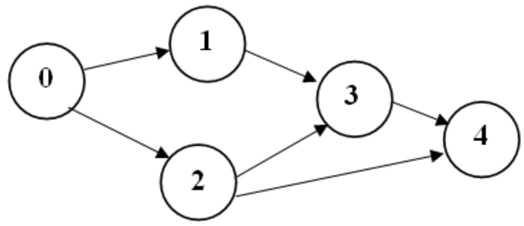


Рис. 1. Сетевой график

Продолжительности работ заданы в виде обобщенных гауссовых чисел, параметры которых представлены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры нечетких чисел

	a	σ^l	σ^r	b^l	b^r
0–1	5	2	3	3	0,3
0–2	7	4	3	0,5	0,9
1–3	4	1	2	1	4
2–3	3	1	1	2	0,5
2–4	9	3	5	2,5	0.7
3–4	6	2	4	5	2

Рассчитывая значения временных параметров сетевого графика для различных α-срезов, получим результаты, представленные в табл. 4–5.

Таблица 4

Временные характеристики сетевого графика при $\alpha = 0,3$

$i-j$	$\tilde{t}_{ij}(\alpha)$	$\tilde{T}_{рн(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{ро(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{пн(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{по(i,j)}(\alpha)$	$R_{плн(i,j)}(\alpha)$
0–1	[2,93;9,08]	[0; 0]	[2,93;9,08]	[–15,52;15,52]	[–6,44;18,45]	[–15,52;15,52]
0–2	[2,18;10,32]	[0; 0]	[2,18;10,32]	[–14,92;17,22]	[–4,6;19,4]	[–14,92;17,22]
1–3	[2,9;6,04]	[2,93;9,08]	[5,83;15,12]	[–6,44;18,45]	[–0,4;21,35]	[–15,52;15,52]
2–3	[1,95;4,2]	[2,18;10,32]	[4,13;14,52]	[–4,6;19,4]	[–0,4;21,35]	[–14,92;17,22]
2–4	[5,88;14,7]	[2,18;10,32]	[8,06;25,02]	[–4,91;19,43]	[9,79;25,31]	[–15,23;17,25]
3–4	[3,96;10,19]	[5,83;15,12]	[9,79;25,31]	[–0,4;21,35]	[9,79;25,31]	[0; 0]

Таблица 5

Временные характеристики сетевого графика при $\alpha = 0,9$

$i-j$	$\tilde{t}_{ij}(\alpha)$	$\tilde{T}_{рн(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{ро(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{пн(i,j)}(\alpha)$	$\tilde{T}_{по(i,j)}(\alpha)$	$R_{плн(i,j)}(\alpha)$
0–1	[3,62;5,07]	0	[3,62;5,07]	[–5,44;7,53]	[–0,37;11,15]	[–5,44;7,53]
0–2	[6,57;7,85]	0	[6,57;7,85]	[–5,82;5,82]	[2,03;12,39]	[–5,82;5,82]
1–3	[3,67;5,5]	[3,62;5,07]	[7,29;10,57]	[–0,37;11,15]	[5,13;14,82]	[–5,44;7,53]
2–3	[2,43;3,1]	[6,57;7,85]	[9;10,95]	[2,03;12,39]	[5,13;14,82]	[–5,82;5,82]
2–4	[7,08;10]	[6,57;7,85]	[13,65;17,85]	[3,4;12,14]	[13,4;19,22]	[–4,45;5,57]
3–4	[4,4;8,27]	[9;10,95]	[13,4;19,22]	[5,13;14,82]	[13,4;19,22]	[–5,82;5,82]

Таким образом, получили следующие критические пути: для $\alpha = 0,3$ – $L_{0.3} = 0-1-3-4$, для $\alpha = 0,9$ – $L_{0.3} = 0-2-3-4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании нечетких чисел однозначно определить критический путь сетевого графика не всегда возможно, что отражает реальную расстановку при реализации проекта, когда имеет место неопределенность. Важную роль играет выбор α -уровня, по которому будут производиться вычисления. При $\alpha \to 1$ более значимую роль играет ядро нечеткого числа, при $\alpha \to 0$ – носитель.

Использование нечеткого обобщенного гауссова числа дает преимущество настройки параметров для более полного отражения ситуации при определении времени выполнения работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балашов В. Г.* Механизмы управления организационными проектами // В. Г. Балашов, А. Ю. Заложнев, Д. А. Новиков. – М. : ИПУ РАН, 2003. – 84 с.

2. *Акимов В. А.* Метод нечеткого критического пути / В. А. Акимов, Балашов В. Г., А. Ю. Заложнев // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2003. – Т. 3. – С. 5–10.

3. *Шашкин А. И.* Календарное планирование работ по проекту на основе нечетких исходных данных / А.И. Шашкин, М. М. Ширяев // Вест. Самарского гос. ун-та, 2008. – № 3(62). – С. 208–216.

4. *Аснина А. Я.* Календарное планирование на предприятии на основе дубльтранспортной задачи / А. Я. Аснина, Н. Г. Аснина, Т. Н. Чупахина // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2013. – № 2. – С. 87–92.

5. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с.

6. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. – Новосибирск : Изд-во«XYZ», 2010. – 605 с.

7. *Федоров В. В.* Численные методы максмина / В. В. Федоров. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 280 с.

8. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во Воронежского государственного университета, 2006. – 232 с.

9. *Sevastjanov P. V.* A probabilistic approach to fuzzy and crisp interval ordering / P. V. Sevastjanov, P. Rog // Task quarterly. – 7. – № 1. – 2003. – P. 147–156.

10. *Леденева Т. М.* Параметрический метод сравнения нечетких чисел / Т. М. Леденева, Д. А. Черменев, С. С. Жданова // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2010. – Т. 6, № 6. – С. 62–66.

11. *Черменев Д. А.* О сравнении нечетких чисел / Д. А. Черменев, Т. М. Леденева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сб. труд. Междунар. конф. – Воронеж, 2009. – С. 21–25.

12. *Зуховицкий С. И.* Математические методы сетевого планирования / С. И. Зуховицкий, И. А. Радчик. – М. : Наука, 1965. – 296 с.

13. *Леденева Т. М.* Прикладные дискретные модели / Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во Воронежского государственного технического университета, 2000. – 98 с.

Леденева Татьяна Михайловна – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Черменев Дмитрий Александрович – кандидат технических наук, программист ООО «DataArt-Воронеж».
E-mail: maiden.06@mail.ru

Ledeneva Tatiana M. – Doctor of Technic Science, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Dermanew Dmitry Aleksandrovich – Candidate of Technic Science, programmer «DataArt-Voronezh.
E-mail: maiden.06@mail.ru