УДК 004.94

МЕТОД ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КАК СРЕДСТВО АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ

Л. Б. Афанасьевский, А. Н. Горин, М. А.Чурсин

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина),
Воронежский филиал Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова

Поступила в редакцию 03.04.2015 г.

Аннотация. Рассматривается подход к автоматизации анализа сетевых графиков для комплексов работ, характеризуемых неопределенностью времени их выполнения. Рассмотрены случаи, когда плотность вероятности для времени выполнения работ является треугольной и аппроксимированной двумя параболами, сопрягаемыми в точке экстремума. Программа анализа разработана в Delphi. Результатом является график для вероятности выполнения комплекса работ в зависимости от времени.
Ключевые слова: сетевой график, стохастичность, имитационное моделирование, программирование.
Annotation. An approach for a network diagram analysis automation of a range of works characterized by the uncertainty of their time span is looked upon. Cases in which probability density for the works time span is triangular and approximable by two parabolas joined at the position of extremum are considered. The analysis program is developed in Delphi. The result is the probability of a range of works realization depending on their time span diagram.
Keywords: network diagram, stochasticity, simulation modelling, programming.

При планировании выполнения сложных комплексов работ, имеющих повторяющийся характер, одной из актуальных задач является анализ рисков, которые можно характеризовать вероятностью P выполнения работ за заданный директивный срок $T_{\text{д}}$:

$$P(\overline{T}_{\text{кр}} < T_{\text{д}}), \qquad (1)$$

где $\overline{T}_{\text{кр}}$ – средняя продолжительность критического пути в сетевом графике, т. е. пути с наибольшей продолжительностью.

Такой подход обусловлен тем, что при планировании на практике наиболее реальной является стохастическая (вероятностная) сетевая модель, в которой время t_{ij}, затрачиваемое на осуществление операции a_{ij}, в общем случае является непрерывной случайной величиной, где i и j – номера вершин сетевого графика, соответствующие началу и концу операции.

В выражении (1) продолжительность критического пути вычисляется по формуле [1]:

$$\overline{T}_{\text{кр}} = \sum_{ij \in L_{\text{кр}}} \overline{t}_{ij}, \qquad (2)$$

где $\overline{t}_{ij}$ – среднее время выполнения работы a_{ij};

$L_{\text{кр}}$ – критический путь (путь от начального к завершающему событию, имеющий максимальную продолжительность).

Средние продолжительности работ и их дисперсии определяют методом вероятностных оценок [1]:

$$\overline{t}_{ij} = \frac{3 \cdot t_{ij}^{\min} + 2 \cdot t_{ij}^{\max}}{5}, \qquad (3)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}{5} \right)^2. \qquad (4)$$

где $t_{ij}^{\min}$, $t_{ij}^{\max}$ – оптимистическая и пессимистическая оценки продолжительности работы a_{ij}, соответствующие благоприятным и неблагоприятным условиям проведения работ.

Вероятность (1) определяют из выражения

$$P(\overline{T}_{\text{кр}} < T_{\text{д}}) = \Phi^*\left(\frac{T_{\text{д}} - \overline{T}_{\text{кр}}}{\sigma_{T_{\text{кр}}}}\right), \qquad (5)$$

где $\Phi^*()$ – функция распределения вероятностей для нормального закона с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратичным отклонением;

$\sigma_{T_{\text{кр}}}$ – среднеквадратичное отклонение для продолжительности критического пути, вычисляемое по формуле

$$\sigma_{T_{\text{кр}}} = \sqrt{\sum_{ij \in L_{\text{кр}}} \sigma_{ij}^2}. \qquad (6)$$

Расчеты по формулам (5) и (6) предполагают, что критический путь остается одним и тем же при случайных значениях t_{ij}, а меняется только его продолжительность.

Этот подход не в полной мере отражает реальную ситуацию, при которой из-за случайных значений времени выполнения отдельных работ могут изменяться не только продолжительность критического пути, но и сам критический путь.

В предположении изменения критического пути одним из способов получения значения искомой вероятности является имитационное моделирование процесса выполнения комплекса работ, суть которого заключается в следующем [1, 3]:

• для данной структуры сетевого графика с помощью алгоритмических датчиков случайных чисел формируются все случайные продолжительности работ t_{ij}, которые образуют реализацию сетевого графика;

• в полученной реализации сетевого графика определяется критический путь, для которого вычисляется продолжительность $T_{\text{кр}}$;

• описанная процедура повторяется достаточно большое количество раз N, в результате получается ряд случайных значений для продолжительностей критических путей (в общем случае эти пути являются различными): $T_{\text{кр}1}, T_{\text{кр}2}, T_{\text{кр}3}, \ldots, T_{\text{кр}N}$;

• каждое значение полученного ряда $T_{\text{кр}i}$ сравнивается с директивным сроком выполнения плана $T_{\text{д}}$ и вычисляется количество реализаций m, для которых выполняется неравенство $T_{\text{кр}} < T_{\text{д}}$;

• вычисляется приближенное значение вероятности выполнения плана в заданный срок в виде относительной частоты успешных испытаний

$$P\left(\overline{T}_{\text{кр}} < T_{\text{д}}\right) \cong \frac{m}{N}. \qquad (7)$$

При описанной процедуре имитационного моделирования необходимо решить ряд частных задач, основными из которых являются:

• выбор закона распределения вероятностей для времени выполнения работ и определение алгоритма генерирования случайных чисел, соответствующих этому закону;

• выбор способа размещения информации о параметрах сетевого графика в памяти.

Генерирование случайных значений времени выполнения работ. С физической точки зрения для случайного времени выполнения работ можно использовать распределения вероятностей, аппроксимированные либо треугольником, либо двумя параболами (рис. 1).

На рис. 1 переменные $x_{\min}$, x_n, $x_{\max}$ считаются известными и имеют смысл минимально допустимого $t_{ij}^{\min}$, регламентного (номи-

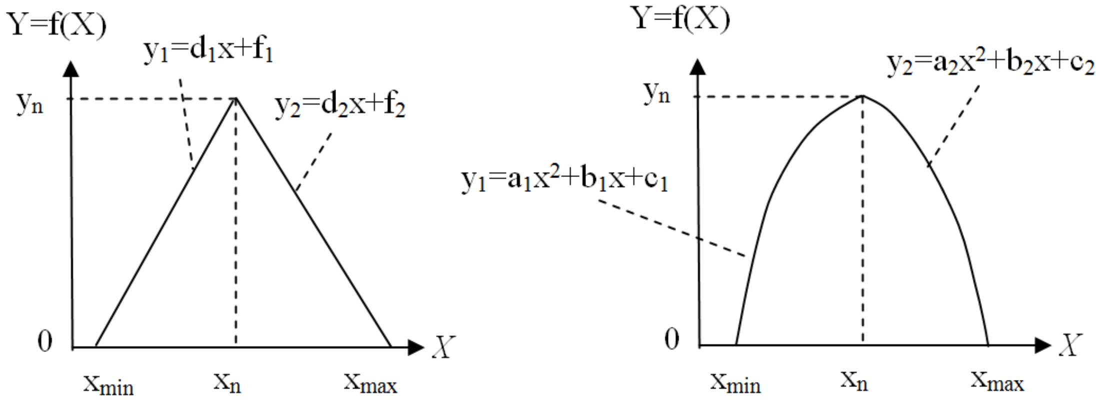

Рис. 1. Треугольный и параболический законы распределения вероятностей

нального, наиболее вероятного) t_{ij}^{n} и максимально допустимого $t_{ij}^{\max}$ значений времени выполнения конкретной работы a_{ij}.

Для получения случайного числа x_i, $1, 2, \ldots$ из совокупности случайных чисел, имеющих заданную функцию плотности распределения вероятностей $f(X)$, необходимо решить относительно x_i следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(X)dX = \xi_i, \qquad (8)$$

т. е. определить такое значение x_i, при котором функция распределения $F(x_i)$, равна ξ_i, где ξ_i – случайное число из равномерно распределенной в интервале (0; 1) случайной последовательности.

Для аналитического решения уравнения (8) необходимо получить формульное представление функции $f(X)$.

Треугольное распределение характеризуется четырьмя неизвестными параметрами d_1, f_1, d_2, f_2 (рис. 1), которые необходимо определить через известные значения $x_{\min}$, x_n, $x_{\max}$.

Для этого распределения имеют место следующие уравнения:

$$d_1 x_{\min} + f_1 = 0,$$

$$d_2 x_{\max} + f_2 = 0,$$

$$d_1 x_n + f_1 - d_2 x_n - f_2 = 0,$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_n} (d_1 x + f_1)dx + \int_{x_n}^{x_{\max}} (d_2 x + f_2)dx = 1.$$

Здесь четвертое уравнение получается на основе свойства плотности распределения вероятностей.

Решая указанные четыре уравнения, получим для треугольного распределения:

$$d_1 = \frac{2}{G},\ f_1 = -\frac{2}{G}\cdot x_{\min},$$

$$G = (x_{\max} - x_{\min})(x_n - x_{\min});$$

$$d_2 = \frac{2}{S},\ f_2 = -\frac{2}{S}\cdot x_{\max},$$

$$S = (x_{\max} - x_{\min})(x_n - x_{\max}).$$

Для параболического распределения аппроксимирующие кривые на рис. 1 содержат шесть неизвестных параметров a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, которые необходимо определить через известные значения $x_{\min}$, x_n, $x_{\max}$.

Для этого распределения четыре уравнения, связывающие искомые параметры с известными, будут теми же, что и для треугольного распределения.

Еще два уравнения можно записать для производных параболических функций в точке экстремума x_n:

$$\left.\frac{dy_i(x)}{dx}\right|_{x_n} = 0,\ \ i = 1,\ 2.$$

Решая указанные шесть уравнений, получим для параболического распределения:

$$a_1 = 1{,}5Q,\ b_1 = -3x_n Q,$$

$$c_1 = 1{,}5x_{\min}(2x_n - x_{\min})Q,$$

$$a_2 = 1{,}5R,\ b_2 = -3x_n R,$$

$$c_2 = 1{,}5x_{\max}(2x_n - x_{\max})R,$$

$$Q = \frac{1}{(x_n - x_{\min})^2 (x_{\min} - x_{\max})},$$

$$R = \frac{1}{(x_n - x_{\max})^2 (x_{\min} - x_{\max})}.$$

При определении случайного числа x_i в соответствии с интегральным уравнением (8) будут иметь место два случая:

$$\begin{aligned} &1)\ \ x_{\min} \le x_i \le x_n, \\ &\int_{x_{\min}}^{x_i} y_1(x)dx = \xi_i, \\ &2)\ \ x_n \le x_i \le x_{\max}, \\ &\int_{x_{\min}}^{x_n} y_1(x)dx + \int_{x_n}^{x_i} y_2(x)dx = \xi_i. \end{aligned} \qquad (9)$$

Интегрируя (9) для треугольного распределения и проводя несложные преобразования, получим относительно простые формулы для вычисления случайных чисел x_i:

$$1)\ x_i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\cdot C}}{2A}, \quad A = d_1/2,$$

$$B = f_1,\ \ C = -f_1 x_{\min} - d_1\frac{(x_{\min})^2}{2} - \xi_i,$$

2) $x_i = \dfrac{-B1 + \sqrt{B1^2 - 4A1 \cdot C1}}{2A1}$,

$$A1 = d_2/2, \quad B1 = f_2,$$

$$C1 = \xi_n - f_2 x_n - d_2 \frac{(x_n)^2}{2} - \xi_i.$$

Выбор между первой и второй формулами для генерирования случайной величины x_i, подчиненной треугольному распределению вероятностей, определяется величиной ξ_n; при $0 \le \xi_i < \xi_n$ используется первая формула, при $\xi_n \le \xi_i \le 1$ – вторая, где граничная величина ξ_n определяется из уравнения

$$\int_{x_{\min}}^{x_n} y_1(x)dx = \xi_n.$$

Для параболического распределения при $\xi_i < \xi_n$ случайное число x_i определяется из уравнения

$$a_1 \frac{x_i^3}{3} + b_1 \frac{x_i}{2} + c_1 x_i = = \xi_i + a_1 \frac{x_{\min}^3}{3} + b_1 \frac{x_{\min}^2}{2} + c_1 x_{\min}, \tag{10}$$

а для $\xi_i \ge \xi_n$ – из уравнения

$$a_2 \frac{x_i^3}{3} + b_2 \frac{x_i}{2} + c_2 x_i = = \xi_i + a_2 \frac{x_n^3}{3} + b_2 \frac{x_n^2}{2} + c_2 x_n - \xi_n, \tag{11}$$

где $\xi_n = \dfrac{a_1}{3}(x_n^3 - x_{\min}^3) + \dfrac{b_1}{2}(x_n^2 - x_{\min}^2) + c_1(x_n - x_{\min})$.

Решение кубических уравнений (10), (11) в программе выполняется методом «золотого сечения», при этом процедура поиска прекращается, если погрешность решения $\delta \le \varepsilon \cdot (x_{\max} - x_{\min})$, где $\varepsilon < 0,001$.

СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ДЛЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Структуру сетевого графика можно задать с помощью двух одномерных массивов Ind1 и Ind2, в которых следует указать индексы работ, являющиеся номерами связываемых вершин. Длина каждого из этих массивов должна быть равна количеству работ в сетевом графике. Исходная нумерация вершин графа может быть произвольной. В программе осуществляется автоматическая перенумерация вершин графа в соответствии с их рангами.

Кроме информации о структуре графа необходимо для каждой работы указать минимальное, номинальное и максимальное значения времени ее выполнения. Эти данные хранятся в двумерном массиве T[nr,3], где nr – количество работ в сетевом графике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ В СЕТЕВОМ ГРАФИКЕ

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что критический путь и его продолжительность должны определяться для каждой реализации имитационной модели. Это обусловлено тем, что случайные продолжительности работ могут иметь достаточно широкий разброс, что может приводить к изменению критического пути.

На основе информации о продолжительности критического пути принимается решение о возможности выполнения комплекса работ за заданный директивный срок $T_д$.

Известны алгоритмы анализа структур ориентированных графов различного вида, основой которых является использование матриц смежности и матриц инциденций. Поскольку изначально принята ориентация на структуры данных в виде массивов, то требуется использование алгоритма, учитывающего специфику сетевых моделей (отсутствие топологических циклов) и ориентированного на использование представления параметров сетевых моделей в табличном виде.

В программе используется вариант алгоритма поиска в глубину и включает в себя реализацию следующих основных действий:

1) просмотр по очереди вершин сетевого графика, начиная со второй;

2) определение максимальной продолжительности пути от исходной вершины до просматриваемой и сохранение найденного значения в элементе массива с номером, соответствующем номеру вершины. Сохраненное значение используется в процессе поиска

максимальных путей для последующих просматриваемых вершин;

3) определение продолжительности критического пути как пути с максимальной продолжительностью от исходной вершины до конечной.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЗАВИСИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ КАК ФУНКЦИИ ДИРЕКТИВНОГО СРОКА

Множество реализаций сетевого графика при имитационном моделировании позволяет определить вероятность выполнения комплекса работ для конкретного значения директивного срока $T_{\text{д}}$. Для построения графика зависимости вероятности выполнения работ как функции директивного срока определяется диапазон изменения $T_{\text{д}}$ в соответствии с *правилом трех сигм* [2]

$$T_{\text{д}}^{\min} = \overline{T}_{\text{кр}} - 3\sigma_{T_{\text{кр}}}; \; T_{\text{д}}^{\max} = \overline{T}_{\text{кр}} + 3\sigma_{T_{\text{кр}}},$$

где $\overline{T}_{\text{кр}}$ и $\sigma_{T_{\text{кр}}}$ вычисляются по формулам (2)–(4), (6).

Диапазон изменения $T_{\text{д}}$ просматривается с некоторым шагом

$$\Delta T_{\text{д}} = (T_{\text{д}}^{\max} - T_{\text{д}}^{\min}) / n,$$

где n – количество точек для построения графика $(n = 40 - 60)$.

В каждой точке выполняется имитационное моделирование сетевого графика и определяется оценка вероятности в соответствии с формулой (7). Количество реализаций сетевого графика выбирается достаточно большим, чтобы обеспечить гладкость графика.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В соответствии с изложенными теоретическими положениями разработана программа анализа стохастических сетевых моделей в среде Delphi, позволяющая сформировать график зависимости для вероятности выполнения работ как функцию директивного срока. Окно программы приведено на рис. 2.

Программа используется как для проведения практических расчетов в системе оперативно-календарного планирования ремонтов техники специального назначения, так и для обучения курсантов вопросам сетевого планирования.

Заметим, что метод имитационного моделирования успешно использован при ре-

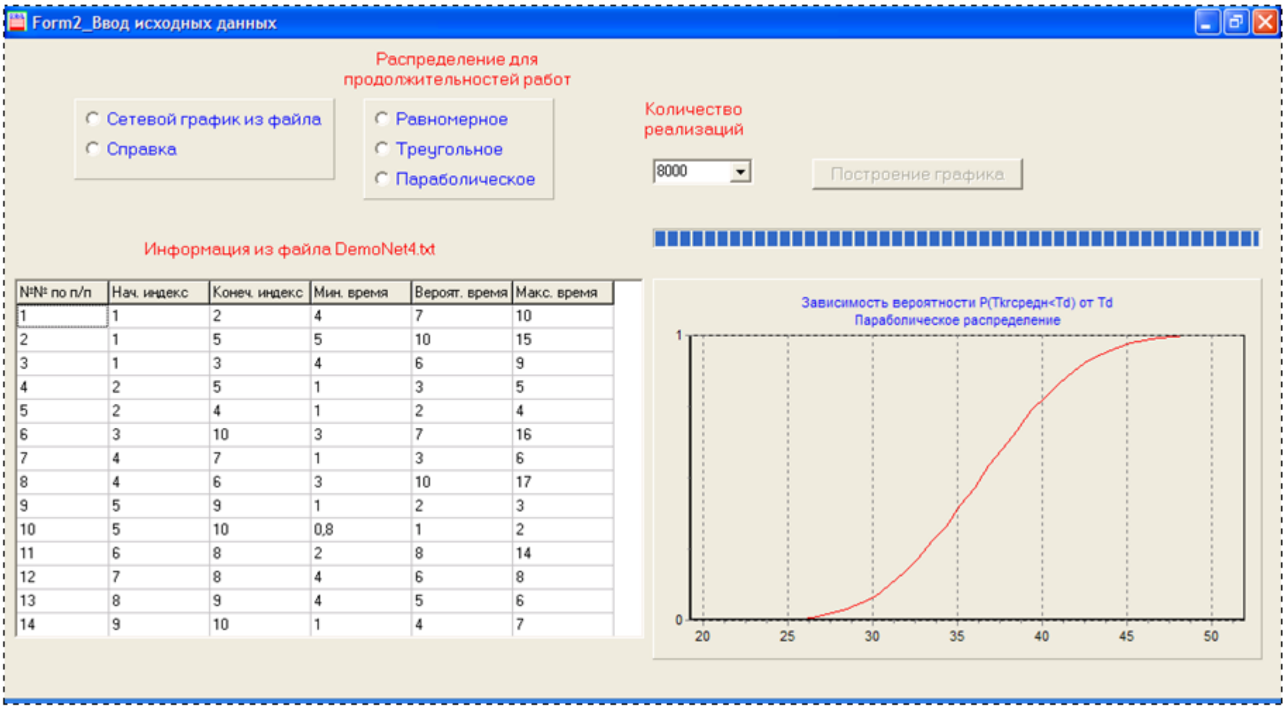

Рис. 2. Окно программы анализа сетевого графика для определения времени выполнения работ с заданной вероятностью

шении задачи идентификации моделей динамики сложных объектов, находящихся под воздействием возмущений, коррелированных во времени [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фадин А. Г.* Моделирование радиоэлектронных систем на ЭВМ. – Воронеж : ВИРЭ, 2000. – 493 с.

2. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 496 с.

3. А*брамов П. Б., Афанасьевский Л. Б., Горин А. Н., Фадин А. Г.* Основы компьютерного проектирования и моделирования РЭС. Лабораторный практикум. Под редакцией профессора Фадина А. Г. – Воронеж : ВИРЭ, 2002. – 268 с.

4. *Афанасьевский Л. Б., Горин А. Н.* Чурсин М.А. Идентификация модели динамики в условиях возмущений, коррелированных во времени // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 2. – С. 10–14.

Афанасьевский Леонид Борисович – кандидат технических наук, доцент. ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж).
Тел.: 8-906-675-78-87.
E-mail: afleonid@yandex.ru

Горин Александр Николаевич – кандидат технических наук, ст. преподаватель, ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж).

Чурсин Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент. Воронежский филиал Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова

Afanasievsky Leonid Borisovitch – Candidate of technical sciences, Senior Lecturer. VUNTS Air Force "Air Force Academy prof. N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin"
Tel.: 8-906-675-78-87.

Gorin Alexandr Nikolaevich – Candidate of technical sciences, Senior Lecturer. VUNTS Air Force "Air Force Academy prof. N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin".

Chursin Mikhail Aleksandrovitch – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Voronezh branch of Russian State trade and economic University.