

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ НА ТОЧНОСТЬ АЛГОРИТМА MUSIC

Ю. Б. Нечаев, Э. К. Алгазинов, И. В. Пешков

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет

Поступила в редакцию 02.04.2015 г.

Аннотация. В работе рассмотрены методы определения координат источников радиоизлучения MUSIC и BS-MUSIC, методы снижения вычислительной сложности и размерности антенной решетки. Приведены численные оценки точности определения координат источников радиоизлучения классическим методом MUSIC, а также после предварительного преобразования ортогональными диаграммами направленности в зависимости от отношения сигнал/шум, числа лучей и времени усреднения корреляционной матрицы.

Ключевые слова: сверхразрешение, цифровая антенная решетка, радиопеленгация.

Annotation. In the paper superresolution direction-of-arrival estimation method MUSIC after beamspace processing i.e. BS-MUSIC are considered. The main difference of beamspace do-estimation methods from classical ones is in that they decrease computational load of digital signal processing on CPU by using linear algebra with matrices and vectors of lower dimensions. The impact of choosing the decreasing computational load and dimensions methods of antenna array on accuracy of direction-of-arrival estimation are researched. The paper shows numerical values of root mean square error of BS-MUSIC depending on signal-noise ratio, the number of orthogonal beam patterns. The estimations are studied in common typical environments which are most frequently encountered in real applications.

Keywords: superresolution, adaptive antenna, direction finding.

ВВЕДЕНИЕ

Адаптивное формирование диаграммы направленности (ДН) антенных решеток (АР) позволяет существенно повысить отношение мощности передающего сигнала абонента к мощности помех и шума (ОСПШ). Один из способов диаграммообразования основан на оценке угловых координат источников радиоизлучения (ИРИ). Такие алгоритмы требуют, чтобы выходные сигналы со всех антенных элементов (АЭ) были доступны в цифровой форме. Во многих прикладных задачах требуемое число первичных модулей обработки принимаемых сигналов и аналого-цифровых преобразователей (АЦП) может достигать больших значений. Антенные

решетки, состоящие из нескольких десятков элементов, не являются редкостью [1]. При этом порядок вычислительной сложности методов спектрального анализа антенных решеток из N антенных элементов составляет $O(N^3)$, что в условиях чрезмерного спроса на обработку сигналов в режиме реального времени представляется сложно выполнимой задачей [2]. Поэтому способы сокращения размерности вектора наблюдения с минимальными потерями представляют большой интерес.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть АР состоит из N идентичных изотропных излучателей, имеющих единичную амплитуду усиления. Предположим, что M радиосигналов приходят на АР с произвольных направлений $\{\theta_m\}_{m=1}^M$ и описываются выражением [1]:

© Нечаев Ю. Б., Алгазинов Э. К., Пешков И. В., 2015

$$s_m(t) = b_m(t) \exp(j2\pi f_m t),$$

где $b_m(t)$ – амплитуда m -го сигнала, f_m – несущая частота m -го сигнала, t – время.

Если плоская волна падает на АР под произвольным углом θ относительно нормали к решетке, то волновой фронт прибывает на элемент $n+1$ раньше, чем на элемент n . Исходя из этого, можно говорить, что m -й сигнал запаздывает по фазе на n -м элементе относительно $(n-1)$ -го элемента. Тогда для линейной АР сигнал с азимутом θ_m на n -м АЭ приобретает сдвиг фазы $-2\pi \frac{D}{\lambda} n \sin(\theta_m)$ или в комплексной форме [1]:

$$a(\theta_m) = \exp\left\{j\left[-2\pi \frac{D}{\lambda} n \sin(\theta_m)\right]\right\},$$

где $n = 1 \dots N$, $k_m = 2\pi / \lambda_m$, λ_m – длина волны m -го сигнала, D – межэлементное расстояние. Если предыдущее выражение представить в векторной форме для каждого АЭ, то можно получить направляющий вектор линейной решетки [3]:

$$\vec{a}(\theta_m) = \left[1 \exp\left\{j\left[-2\pi \frac{D}{\lambda} \sin(\theta_m)\right]\right\} \dots \exp\left\{j\left[-2\pi \frac{D}{\lambda} (N-1) \sin(\theta_m)\right]\right\}\right]^T,$$

где $(\dots)^T$ – транспонирование, $n = 0 \dots N-1$. Комплексный вектор сигналов на выходе АЭ описывается выражением [1]:

$$\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{s}(t) + \vec{n}(t),$$

где $\vec{x}(t)^T$ – N -мерный вектор, описывающий сигналы на выходе каждого антенного элемента АР, $\vec{s}(t)$ – M -мерный вектор сигналов; $\vec{n}(t)$ – вектор шума пространственного канала и n -го канала ЦАР; \mathbf{A} – $N \times M$ матрица направляющих векторов.

Если сигналы и шум некоррелированы. Тогда пространственная корреляционная матрица может быть записана в виде [2]:

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\vec{x}(t)\vec{x}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{E}_s\Lambda_s\mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n\Lambda_n\mathbf{E}_n^H,$$

где $E[\dots]$ – математическое ожидание, $(\dots)^H$ – эрмитово сопряжение, $\mathbf{R}_{ss} = E[\vec{s}(t)\vec{s}^H(t)]$ – корреляционная матрица сигналов, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_M > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = \sigma^2$ и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$ – соответственно собственные

значения и собственные векторы пространственной ковариационной матрицы \mathbf{R} , $\mathbf{E}_s = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_M]$ – матрица сигнального подпространства, состоящая из собственных векторов, соответствующих M самым большим собственным значениям, $\mathbf{E}_n = [\vec{e}_{M+1}, \vec{e}_{M+2}, \dots, \vec{e}_N]$ – матрица шумового подпространства, состоящая из собственных векторов, соответствующих $(N-M)$ самым малым собственным значениям, $\Lambda_s = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M]$ – диагональная матрица сигнальных собственных значений, $\Lambda_n = [\lambda_{M+1}, \lambda_{M+2}, \dots, \lambda_N]$ – матрица шумовых собственных значений.

МЕТОДЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ

Во многих ситуациях число антенных элементов N имеет большое значение и тогда создается набор из N_{BS} ($N_{BS} \ll N$) диаграмм направленности для предварительной обработки принимаемых сигналов. Затем осуществляются дальнейшие оценка и преобразования данных с выходов этих ДН. В виде матричных линейных преобразований такой метод может быть представлен в виде [4, 5]:

$$\vec{z}(k) = \mathbf{T}_{BS}^H \vec{x}(k), \quad (1)$$

где $\vec{z}(k)$ – N_{BS} -мерный вектор, $\mathbf{T}_{BS} = [\vec{t}(\psi_1) \vec{t}(\psi_2) \dots \vec{t}(\psi_R)]$ – $N_{BS} \times N$ матрица, состоящая из весовых векторов, с помощью которых формируются N_{BS} диаграмм направленности, сфокусированных в направлениях ψ_i , $i = 1, 2, \dots, N_{BS}$, при этом $M < N_{BS} < N$. Преобразование (1) обычно выполняется в аналоговой части, таким образом, значительно сокращая число АЦП. Использование $\vec{z}(k)$ имеет ряд преимуществ [5]:

1. Размерность $\vec{z}(k)$ много меньше, чем $\vec{x}(k)$, поэтому вычислительная сложность сокращается и поэтому достигается статистическая стабильность оценок спектральных характеристик сигналов.

2. Если имеются мощные ИРИ, которые находятся вне границ обзора, тогда возможно подавить их перед применением методов оценки параметров сигналов в пределах сектора.

3. Большинство методов спектральной оценки предполагают, что шум каналов и среды является белым гауссовским. В случае невыполнения данного предположения, в секторе обзора шум становится белым с неизвестной дисперсией.

Кроме того, столбцы матрицы \mathbf{T}_{BS} ортогональны друг к другу, т. е.

$$\mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{T}_{BS} = \mathbf{I}. \quad (2)$$

В некоторых приложениях условие (2) не выполняется, и тогда для приведения \mathbf{T}_{no} к ортонормированной матрице необходимо осуществить предварительное преобразование:

$$\mathbf{T}_{bs} = \mathbf{T}_{no} \left[\mathbf{T}_{no}^H \mathbf{T}_{no} \right]^{-0.5}. \quad (3)$$

Ортогональность диаграмм направленности в данном приложении означает, что каждый луч сфокусирован на свой источник радиоизлучения, а нули сформированы в направлениях остальных ИРИ. Таким образом, в случае, если имеется только один сигнал, то только один элемент вектора $\vec{\mathbf{z}}(k)$ содержит информацию об этом сигнале [6].

Если столбцы матрицы \mathbf{T}_{BS} будут выбраны некорректно, тогда при сокращении размерности произойдет некоторая потеря информации и, следовательно, снижение характеристик методов спектрального анализа. Поэтому необходимо проектирование формирователей ортогональных лучей (столбцов матрицы \mathbf{T}_{BS}) таким образом, чтобы они были сфокусированы на относительно узких секторах, это может сохранить важную информацию в векторе $\vec{\mathbf{z}}(t)$.

Вектор наблюдения антенной решетки [5]:

$$\vec{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{A}(\theta) \vec{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{T}_{BS}^H \vec{\mathbf{n}}(t).$$

Предполагая, что шум в $\vec{\mathbf{z}}(t)$ и $\vec{\mathbf{x}}(t)$ является белым и структура антенной решетки известна, пространственная корреляционная матрица с учетом \mathbf{T}_{BS} преобразуется к виду [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{zz} &= E[\vec{\mathbf{z}}(t) \vec{\mathbf{z}}^H(t)] = \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{T}_{BS} = \\ &= \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{T}_{BS} + \sigma^2 \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{T}_{BS}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда разложение на собственные значения и векторы можно записать как [7]:

$$\mathbf{R}_{zz} = \mathbf{E}_{BS-s} \Lambda_{BS-s} \mathbf{E}_{BS-s}^H + \mathbf{E}_{BS-n} \Lambda_{BS-n} \mathbf{E}_{BS-n}^H, \quad (5)$$

где \mathbf{E}_{BS-s} – $N_{BS} \times M$ матрица векторов сигнального подпространства, \mathbf{E}_{BS-n} –

$N_{BS} \times (N_{BS} - M)$ матрица векторов шумового подпространства, состоящая из собственных векторов, соответствующих $(N_{BS} - M)$ самым малым собственным значениям, Λ_{BS-s} , Λ_{BS-n} – диагональные матрицы собственных значений.

Матрица линейного преобразования \mathbf{T}_{BS} отображает векторное пространство полной размерности в подпространство меньшей размерности. Проектирование такой матрицы подчиняется некоторым критериям.

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ)

Наиболее распространенная матрица преобразования \mathbf{T}_{BS} имеет столбцы, состоящие из коэффициентов формирования ДН с максимумами, разнесенными на $2\pi / N$. В этом случае, весовые векторы ортогональных ДН равны:

$$\mathbf{T}_{BS}^H = \frac{1}{N} e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)m\frac{2\pi}{N}} \left[1 \ e^{jm\frac{2\pi}{N}} \ \dots \ e^{j(N-1)m\frac{2\pi}{N}} \right], \quad (6)$$

где m – значение, определяющее номер луча в секторе обзора [5].

Совместно с методом ДПФ можно использовать преобразования для снижения уровня боковых лепестков, такие как окна Хэмминга или Чебышева.

ЛУЧИ РЯДА ТЕЙЛОРА (TAYLOR SERIES)

Для случая двух источников сигналов матрица лучей выглядит следующим образом:

$$\mathbf{T}_{no} = \left[\vec{\mathbf{a}}(\psi_1) \ \vec{\mathbf{a}}(\psi_2) \ \vec{\mathbf{a}}(\psi_{mid}) \right], \quad (7)$$

где $\vec{\mathbf{a}}(\psi_i)$ – направляющий вектор соответствующий истинным угловым координатам ИРИ ψ_1 и ψ_2 , $\psi_{mid} = \frac{(\psi_1 + \psi_2)}{2}$ – средняя точка. Однако невозможно построить \mathbf{T} согласно (7), поскольку истинные значения ψ_1 и ψ_2 доподлинно неизвестны.

Однако матрицу (7) можно аппроксимировать с помощью разложения в ряд Тейлора направляющих векторов $\vec{\mathbf{a}}$ в окрестности зоны, которая содержит полезные сигналы, обозначив ψ_{mid} как среднюю точку зоны сканирования:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(\psi_i) &= \bar{\mathbf{a}}(\psi_{mid}) + \bar{\mathbf{a}}^{(1)}(\psi_{mid})(\psi_i - \psi_{mid}) + \\ &+ \bar{\mathbf{a}}^{(2)}(\psi_{mid}) \frac{(\psi_i - \psi_{mid})^2}{2!} + \dots, \\ \bar{\mathbf{a}}^{(k)}(\psi_{mid}) &= \frac{\partial^k \bar{\mathbf{a}}^{(1)}(\psi_{mid})}{\partial^k \psi_{mid}}. \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$ и k – порядок производной направляющего вектора по отношению к углу ψ_{mid} . Тогда [5]:

$$\mathbf{T}_{no} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}(\psi_{mid}) & \bar{\mathbf{a}}^{(1)}(\psi_{mid}) \\ \bar{\mathbf{a}}^{(2)}(\psi_{mid}) & \dots & \bar{\mathbf{a}}^{(m)}(\psi_{mid}) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для матрицы (8) необходимо воспользоваться преобразованием (3) для приведения \mathbf{T}_{no} к ортонормированному виду \mathbf{T}_{BS} .

ДИСКРЕТНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (DPSS)

Определив векторы $\vec{\mathbf{t}}_i$, $i = 1, 2, \dots, M$ как столбцы матрицы ортогональных диаграмм направленности \mathbf{T}_{BS} , найдем отношение энергии i -го луча в зоне сканирования $[-\psi_0, \psi_0]$ к энергии i -й ДН в целом

$$\alpha_i = \frac{\int_{-\psi_0}^{\psi_0} |\vec{\mathbf{t}}_i \bar{\mathbf{a}}(\psi)|^2 d\psi}{\int_{-\pi}^{\pi} |\vec{\mathbf{t}}_i \bar{\mathbf{a}}(\psi)|^2 d\psi}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Числитель α_i можно представить в виде:

$$\alpha_{iN} = \vec{\mathbf{t}}_i \mathbf{A}_{DPSS} \vec{\mathbf{t}}_i^H,$$

где $\mathbf{A}_{DPSS} = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \bar{\mathbf{a}}(\psi) \bar{\mathbf{a}}^H(\psi) d\psi$. Для линейной АР mn -й элемент матрицы \mathbf{A}_{DPSS} соответственно определяется соотношением:

$$\mathbf{A}_{DPSS}^{mn} = \frac{2\psi_0 \sin(m-n)}{(m-n)}, \quad m \neq n$$

$$\mathbf{A}_{DPSS}^{mn} = 2\psi_0, \quad m = n.$$

Знаменатель матрицы α_i представляется в виде:

$$\alpha_{iD} = 2\pi \vec{\mathbf{t}}_i^H \vec{\mathbf{t}}_i.$$

В итоге для отношения энергий используем представление:

$$\alpha_i = \frac{\vec{\mathbf{t}}_i \mathbf{A}_{DPSS} \vec{\mathbf{t}}_i^H}{2\pi \vec{\mathbf{t}}_i^H \vec{\mathbf{t}}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{se}.$$

Это отношение необходимо максимизировать α_i , $i = 1, 2, \dots, N_{se}$ при условии взаимной ортогональности $\vec{\mathbf{t}}_i$, что эквивалентно поиску собственных векторов матрицы \mathbf{A} , соответствующих M наибольшим собственным значениям. Таким образом, должно быть справедливо равенство [8]

$$2\pi\lambda \vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{A}_{DPSS} \vec{\mathbf{t}}_i,$$

где

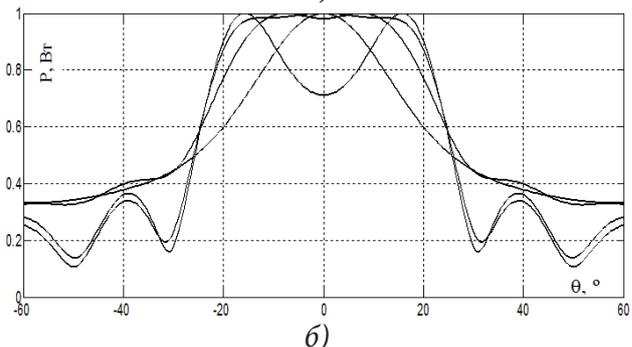
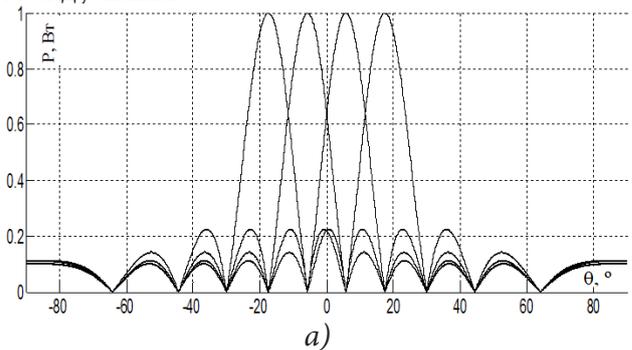
$$\sum_{n=1}^N \frac{\psi_0 \sin(m-n)}{(m-n)} t_n = \pi\lambda t_m, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Для каждого из M наибольшего собственного значения, получаем последовательность, которая определяет вектор-столбец $\vec{\mathbf{t}}_i$. Число значимых собственных значений, а, следовательно, и ДН определяется:

$$N_{se} = \frac{\psi_0}{\pi} N + 1.$$

Следовательно, значение сектора обзора ψ_0 для данного метода определяет число ортогональных лучей N_{se} , которые формируются как собственные векторы матрицы \mathbf{A} .

Для наглядности на рис. 1 представлены 4 ортогональные ДН для покрытия окна $[-20^\circ; 20^\circ]$, полученных по методу ДПФ (рис. 1а), разложением в ряд Тейлора (рис. 1б) и дискретных сферических последовательностей (рис. 1в) для линейной антенной решетки из 10 АЭ с полуволновым расстоянием между ними.



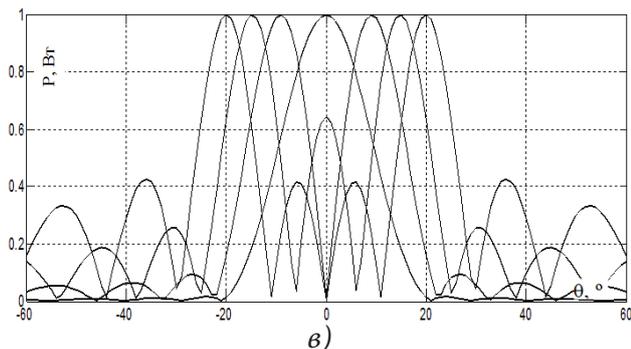


Рис. 1. Ортогональные диаграммы направленности, полученные как а) ДПФ, б) ряды Тейлора и в) DPSS

Диаграммы направленности для лучей Тейлора (рис. 1б) получены построением матрицы (8) для центрального угла $\psi_{mid} = 0^\circ$. Затем \mathbf{T}_{no} преобразуется к ортогональному виду с помощью выражения (3). На рис. 1в ортогональные ДН взяты как 4 собственных вектора матрицы \mathbf{A}_{DPSS} , построенной для диапазона $[-20^\circ; 20^\circ]$. Из рис. 1 видно, что самый высокий уровень боковых лепестков дает метод лучей Тейлора.

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ИРИ

Рассмотрим алгоритмы определения угловых координат радиосигналов со сверхразрешением: *MUSIC* и *BS-MUSIC*.

Для реализации классического метода *MUSIC* используется свойство ортогональности векторов шумового подпространства и направляющих векторов [1],

$$\mathbf{E}_n^H \bar{\mathbf{a}}(\theta_m) = 0, \quad \theta_m \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\} \quad (9)$$

при этом координаты сигналов будут соответствовать максимумам функции:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}^H(\theta) \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \bar{\mathbf{a}}(\theta)}.$$

Классический метод *MUSIC* обладает бесконечно высокой разрешающей способностью в отсутствие шума и амплитудно-фазового рассогласования каналов АР. Однако метод нестабилен, если сигналы коррелированы [9, 10].

Для применения \mathbf{T}_{BS} , согласно равенствам (4) и (5), можно заключить:

$$\Re\{\mathbf{E}_{BS-s}\} = \Re\{\mathbf{T}^H \mathbf{A}(\theta)\},$$

где $\Re\{\mathbf{M}\}$ обозначает пространство, образованное столбцами произвольной матрицы \mathbf{M} [7]. Тогда $\Re\{\mathbf{E}_{BS-s}\}$ может использоваться как сигнальное подпространство, которое ортогонально шумовому, образованному $\Re\{\mathbf{E}_{BS-n}\}$, т. е. $\Re\{\mathbf{E}_{BS-s}\} \perp \Re\{\mathbf{E}_{BS-n}\} \Rightarrow \Re\{\mathbf{T}^H \mathbf{A}(\theta)\} \perp \Re\{\mathbf{E}_{BS-n}\}$. Следовательно, подобно (9) можно записать выражения для определения координат ИРИ после преобразования ортогональными ДН [11]:

$$P_{BS-MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\bar{\mathbf{a}}^H(\theta) \mathbf{T}_{BS} \mathbf{E}_{BS-n} \mathbf{E}_{BS-n}^H \mathbf{T}_{BS}^H \bar{\mathbf{a}}(\theta)}, \quad (10)$$

где \mathbf{T}_{BS} выбирается с заданным количеством лучей сфокусированных в определенной области пространства и сформированные одним из вышеописанных методов. Метод (10) носит название Beamspace *MUSIC* (*BS-MUSIC*).

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ИРИ

Известны свойства метода *BS-MUSIC*, касающиеся точности определения угловых координат: среднеквадратическое отклонение оценок азимутальных координат ИРИ для любой матрицы \mathbf{T}_{BS} не может быть меньше, чем классического метода *MUSIC* [12, 13]. Для доказательства можно привести выражение для дисперсии метода *MUSIC* [11]:

$$\text{var}_{MUSIC}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2N} \left[\frac{\mathbf{R}_{ss} + \sigma^2 \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{ss}^{-1}}{\mathbf{D}^H (\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{D}} \right], \quad (11)$$

где $\mathbf{D} = [\bar{\mathbf{d}}(\theta_1), \dots, \bar{\mathbf{d}}(\theta_M)]$, $\bar{\mathbf{d}}(\theta_m) = \frac{\partial}{\partial \theta_m} \bar{\mathbf{a}}(\theta_m)$,

$m = 1 \dots M$. Выражение (11) можно распространить для *BS-MUSIC* [11]:

$$\text{var}_{BS-MUSIC}(\theta) = \frac{\sigma^2}{2N} \left[\frac{\mathbf{R}_{ss} + \sigma^2 \mathbf{R}_{ss}^{-1} (\mathbf{A}^H \mathbf{Q} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R}_{ss}^{-1}}{\mathbf{D}^H \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{D}} \right],$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{T}_{BS} \mathbf{T}_{BS}^H$. При этом $\text{var}_{MUSIC}(\theta) \leq \text{var}_{BS-MUSIC}(\theta)$.

Кроме того, в [13] показано, что если имеются две матрицы \mathbf{T}_{BS1} (размерностью $N \times N_{BS1}$) и \mathbf{T}_{BS2} (размерностью $N \times N_{BS2}$), причем $N_{BS1} \geq N_{BS2}$, то среднеквадратическое

отклонение оценок угловых координат ИРИ, полученные с помощью \mathbf{T}_{BS2} , не меньше, чем оценки \mathbf{T}_{BS1} .

Выражение для \mathbf{T}_{BS} может быть использовано для сравнения характеристик классического метода *MUSIC* с *BS-MUSIC*. В частности представляет интерес граница Крамера-Рао, аналитическое выражение которого для стохастического случая представляется выражением

$$CRB = \frac{\sigma^2}{2N} \left[\text{Re} \left\{ \left(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D} \right) \otimes \left(\mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \right) \right\} \right]^{-1},$$

где $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^H$ – матрица ортогональной проекции шумовое подпространство [14].

Нижняя граница дисперсии оценок координат ИРИ для предварительной обработки ортогональными ДН [15] представится:

$$CRB_{BS} = \frac{\sigma^2}{2N} \left[\text{Re} \left\{ \left(\mathbf{D}^H \mathbf{T}_{BS} \mathbf{P}_{BS-A}^\perp \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{D} \right) \otimes \left(\mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H \mathbf{T}_{BS} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \right) \right\} \right]^{-1},$$

где $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{T}_{BS}^H \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^H \mathbf{Q} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{T}_{BS}$.

При этом очевидно, что $CRB \leq CRB_{BS}$. Выражения для границ CRB и CRB_{BS} соответствуют общему случаю и включают предположение о некоррелированных сигналах. Известно, что метод *MUSIC* является реализацией метода максимального правдоподобия и достигает границы Крамера-Рао при достаточно большом количестве отсчетов N , значении ОСШ и условии, что \mathbf{R}_{ss} является диагональной [14]. В реальных ситуациях доступно только ограниченное число временных снимков N , и сигналы имеют отличный от нуля коэффициент корреляции, вследствие чего дисперсия оценок азимутальных координат ИРИ возрастает [16]. Однако указанные факторы не достаточно полно исследованы для метода *BS-MUSIC* в зависимости от типа \mathbf{T}_{BS} [17, 18, 11, 12, 13].

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА ВРЕМЕННЫХ ОТСЧЕТОВ НА ТОЧНОСТЬ ПЕЛЕНГАЦИИ

Исследуем влияние отношения сигнал/шум (ОСШ) на качество пеленгации метода-

ми *MUSIC* и *BS-MUSIC*, к которым применена матрица \mathbf{T}_{BS} . Линейная АР состоит из $N = 10$ АЭ, расположенных на расстоянии 0.5λ , $N_{BS} = 5$. Сектор обзора $[-20^\circ; 20^\circ]$, моделировались два ИРИ равной мощности с угловыми координатами -5° и 18° , ОСШ = 10дБ. Количество испытаний изменялось в пределах [10; 200]. Формирование ортогональных лучей проводилось согласно вышеописанным методам. Приводится оценка среднеквадратического отклонения (СКО) оценки пеленга от его истинного значения на основе соотношения:

$$\text{СКО} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^L (\hat{\theta}_{i,m} - \theta_m)^2}{L-1}},$$

где $\hat{\theta}_{i,m}$ – оценка пеленга m -го ИРИ в i -ом испытании, θ_m – истинный пеленг m -го ИРИ, L – количество испытаний [18].

На рис. 2 приведены зависимости СКО метода *BS-MUSIC* от времени усреднения K и границы Крамера-Рао.

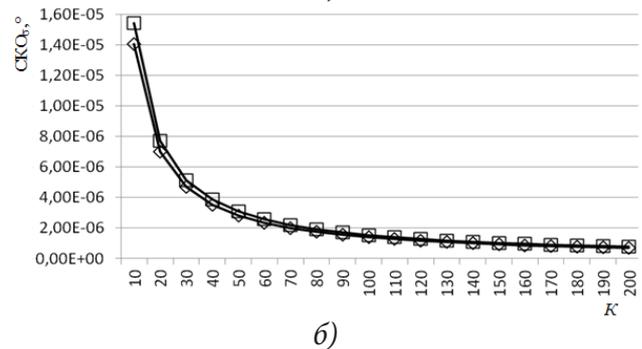
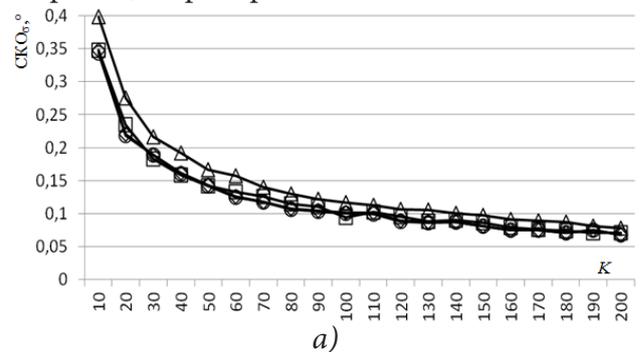


Рис. 2. Зависимость СКО метода *BS-MUSIC*

от усреднения K для матриц \mathbf{T}_{BS} :
 а) \diamond ДПФ, \square DPSS, \triangle Taylor ser. и \circ классич. *MUSIC*. Приведены значения границ Крамера-Рао: б) \diamond CRB , \square CRB_{BS}

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. СКО обратно пропорционально K и согласуется с существующими результатами [16].
2. В целом СКО не зависит от выбора метода получения \mathbf{T}_{BS} .
3. СКО методов *MUSIC* и *BS-MUSIC* одинаково, при том, что $N_{BS} < N$.
4. Форма графиков рис. 2 а) и б) совпадает, однако *MUSIC* и *BS-MUSIC* асимптотически достигнет границ Крамера-Рао при достаточно большом значении K , которое недостижимо в реальных приложениях, когда привести матрицу \mathbf{R}_{ss} к диагональному виду практически невозможно при стохастической модели.

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДН НА ТОЧНОСТЬ ПЕЛЕНГАЦИИ

Условия исследования: линейная эквидистантная антенная решетка с межэлементным расстоянием, равным 0.5λ , количество АЭ 10, количество ортогональных диаграмм направленности N_{BS} составляло 4 и 5 для оценки влияния на точность оценки угловых координат ИРИ, ОСШ изменяется от -20 до 0 дБ. В первом случае два сигнала с координатами -5° и 18° , которые попадают в сектор обзора $[-20^\circ; 20^\circ]$, во втором – добавляется еще один сигнал с азимутом 50° , который не входит в окно интереса. На рис. 3 приведены зависимости СКО метода *BS-MUSIC* от N_{BS} для двух сигналов (рис. 3а, 3б) и трех сигналов (рис. 3в, 3г) и приняты обозначения для типа \mathbf{T}_{BS} : \diamond – \diamond – \diamond ДПФ, \square – \square – \square DPSS, \triangle – \triangle – \triangle Taylor ser., а также \circ – \circ – \circ классич. *MUSIC*. При этом $N_{BS} = 4$ для рис. 3а, 3в и $N_{BS} = 5$ для рис. 3б, 3г.

Результаты, представленные на рис. 3, позволяют сделать следующие выводы:

1. Для двух рассматриваемых случаев СКО метода *BS-MUSIC* снижается при увеличении N_{BS} от 4 до 5.
2. Для двух сигналов, попадающих в сектор интереса, при $N_{BS} = 5$ СКО метода *BS-MUSIC* в целом слабо отличается от *MUSIC* независимо от способа получения \mathbf{T}_{BS} .

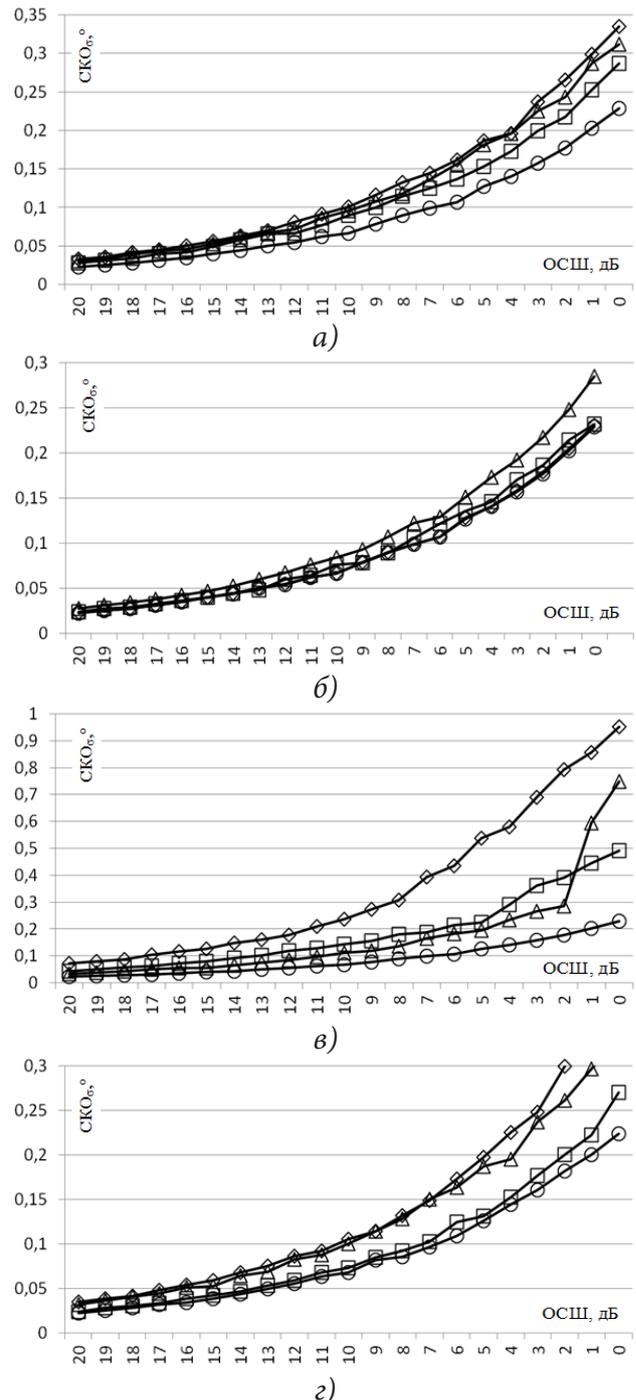


Рис.3. Зависимость СКО метода *BS-MUSIC* от N_{BS} для двух сигналов (а, б) и трех сигналов (в, г)

3. Для трех сигналов (с одним – вне сектора $[-20^\circ; 20^\circ]$) СКО метода *BS-MUSIC* при $N_{BS} = 4$ выше, чем *MUSIC*.
4. При этом точность *BS-MUSIC* для метода \mathbf{T}_{BS} DPSS самая высокая для большинства случаев, что согласуется с рис. 1, поскольку уровень боковых лепестков низкий, высокая степень заполнения полезного сектора и макси-

мум одной ДН совпадает с нулями других, предотвращая неоднозначности в $\vec{z}(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена возможность использования методов формирования ортогональных диаграмм направленности для задачи оценки угловых координат ИРИ для линейной эквидистантой антенной решетки. Применение данной методики к задаче пеленгации со сверхразрешением методами *MUSIC* и *BS-MUSIC* проанализировано с использованием численного моделирования в условиях различного значения сигнал-шум, числа отсчетов пространственной корреляционной матрицы и лучей ортогональных диаграмм направленности. Проведена оценка влияния разных методов получения матрицы \mathbf{T}_{BS} на точность пеленгации посредством *BS-MUSIC*.

Установлено, что с увеличением числа ортогональных лучей СКО снижается. Точность *BS-MUSIC* для матрицы \mathbf{T}_{BS} , полученной согласно методу *DPSS*, самая высокая и практически совпадает с *MUSIC* как для случая присутствия сигналов только в зоне обзора, так при попадании дополнительного помехового сигнала в зону подавления для $N_{BS} = 5$. Однако при этом вычислительная сложность снижена 8 раз, согласно критерию $O(N^3)$. Кроме того, с увеличением количества отсчетов усреднения до $K = 100$ СКО метода *BS-MUSIC* приближается к своему приемлемому значению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krim H.* Two decades of array signal processing research / H. Krim, M. Viberg // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 1996. – Vol. 7. – P. 67–94.

2. *Huang X.* Two decades of array signal processing research / X. Huang, Y. Jay Guo, J. D. Bunton // *IEEE Transactions On Wireless Communications*. – 2010. – Vol. 9. – P. 1770–1779.

3. *Godara L. C.* Applications of antenna arrays to mobile communications. Part I: performance improvement, feasibility, and system

considerations / L. C. Godara // *Proceedings of the IEEE*. – 1997. – Vol. 85, No. 8. – P. 1195–1245.

4. *Сидоренко К. А.* Формирование ортогональных диаграмм направленности ФАР с управляемыми нулями в задаче пеленгации сигналов / К. А. Сидоренко, В. А. Березовский // *Успехи современной радиоэлектроник*. – 2013. – №10. – С. 30–35.

5. *Trees Van H. L.* Detection, Estimation, and Modulation Theory, Optimum Array Processing / H. L. Trees Van. – John Wiley & Sons, 2002. – 1470 p.

6. *Nilsen C.-I. C.* Beam-space Adaptive Beamforming for Ultrasound Imaging / C.-I. C. Nilsen, I. Hafizovic // *IEEE Transactions on Ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. – 2009. – Vol. 56, No. 10. – pp. 2187–2197.

7. *Amini A. N.* Avoiding ambiguity in beam-space processing / A. N. Amini, T. T. Georgiou // *IEEE Signal Processing Letters*. – 2005. – Vol. 12, No. 5. – P. 372 – 375.

8. *Forsterand P.* Application of Spheroidal Sequences to Array Processing / P. Forsterand, G. Vezzosi // *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '87*. – 1987. – Vol. 12. – P. 2268–2271.

9. *Нечаев Ю. Б.* Статистический анализ точности радиопеленгации методом music при наличии амплитудно-фазовых ошибок каналов приема и многолучевости канала распространения / Ю. Б. Нечаев, Е. С. Макаров // *Антенны*. – 2010. – № 6. – С. 86–92.

10. *Нечаев Ю. Б.* Оценка точности автокалибровочных методов определения координат источников радиоизлучения с условно-постоянной моделью амплитудно-фазовых ошибок в каналах цифровой антенной решетки / Ю. Б. Нечаев, Д. Н. Борисов, И. В. Пешков // *Телекоммуникации*. – 2011. – № 5. – С. 34–43.

11. *Stoica P.* Comparative performance study of element-space and beam-space MUSIC estimators / P. Stoica, A. Nehorai // *Circuits Syst. Signal Process*. – 1991. – Vol. 10. – pp. 285–292.

12. *Xu X. L.* An analysis of beam-space source localization / X. L. Xu, K. M. Buckley // *IEEE Trans. Signal Process*. – 1993. – Vol. 41. – pp. 501–504.

13. *Li F.* Statistical analysis of beam-space estimation for direction of arrivals / F. Li, H. Lie // IEEE Trans. Signal Process. – 1994. – Vol. 42. – pp. 604–610.

14. *Stoica P.* MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound / P. Stoica, A. Nehorai // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1989. – Vol. 37, Iss. 5. – P. 720 – 741.

15. *Anderson S.* Optimal dimension reduction for array processing—Generalized / S. Anderson, A. Nehorai // IEEE Trans. Signal Process. – 1995. – Vol. 43. – pp. 2025–2027.

16. *Нечаев Ю. Б.* Коррекция амплитудно-фазового распределения электромагнитного поля в задаче радиопеленгации / Ю. Б. Нечаев, С. А. Зотов, Е. С. Макаров // Известия вузов. Радиоэлектроника. – Киев : Киев. политехн. ин-т, 2009. – Т. 52, N №3/4. – С.60–72.

17. *Chao Sun.* On beampattern design for beamspace music / Chao Sun, Yi-xin Yang // Acoust. Sci. & Tech. – 2004. – № 25. – С. 2–8.

18. *Tidd W. G.* Sequential Beamspace Smart Antenna System / Master's Thesis, Montana State University. – 2011. – P. 140.

Нечаев Ю. Б. – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информационных систем, Воронежский государственный университет.

Тел.: (473) 220-87-24

E-mail: nechaev_ub@mail.ru

Nechaev Yu. B. – Doctor of Physics-math. Sciences, Professor of the dept. of the Information Systems, Voronezh State University.

Tel.: (473) 220-87-24

E-mail: nechaev_ub@mail.ru

Алгазинов Э. К. – д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой Информационных систем, факультета компьютерных наук, Воронежский государственный университет.

Тел.: (4732)208-724, (4732)208-724

E-mail: algazinov@cs.vsu.ru

Algazinov E. K. – doctor of Physics-math. Sciences, Professor of the dept. of the Information Systems, Voronezh State University.

Tel. (4732)208-724

E-mail: algazinov@cs.vsu.ru

Пешков И. В. – к. ф.-м. н., старший преподаватель кафедры электроники и компьютерной техники, Елецкий государственный университет.

Тел.: 8-915-854-92-07

E-mail: peshkov_i_v@sc.vsu.ru

Peshkov I. V. – Candidate of Physics-math. Sciences, senior lecturer of the dept. of the Electronics and computer technology, Eletskaa State University.

Tel.: 89158549207

E-mail: peshkov_i_v@sc.vsu.ru