УДК 519.688

ПОСТРОЕНИЕ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ НИЗКОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫХ В ОБЩЕМ ВИДЕ

М. М. Безрядин, В. Г. Ляликова, В. Г. Рудалев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.2015 г.

Аннотация. Рассмотрен метод построения передаточной функции модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы для динамических объектов общего вида.

Ключевые слова: алгоритмы, построение модальных регуляторов.

Annotation. In article is described a method of constructing the transfer function of the modal control on the transfer function of a closed system with linear dynamic objects of general form.

Keywords: algorithms, construction of modal regulators.

ВВЕДЕНИЕ

Существует определенный круг задач, в которых объект управления может быть представлен передаточной функцией первого или второго порядка. При этом, возникает необходимость обеспечить функционирование системы автоматического регулирования при отклонениях коэффициентов объекта от некоторого начального значения. В этом случае может быть удобно выразить коэффициенты передаточной функции модального регулятора через коэффициенты объекта управления. Вопросу построения робастных регуляторов посвящена обширная литература [1–3], при этом стоит отметить, что часто существующие методы построения регуляторов оказываются достаточно сложными алгоритмически, что не позволяет производить вычисления в общем виде. В работах [4–6] предложен метод построения модального регулятора, который позволяет получать передаточную функцию регулятора, коэффициенты которого в явной форме зависят от коэффициентов объекта регулирования. В этом случае коэффициенты объекта могут быть заданы в буквенной форме.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим замкнутую систему автоматического управления, изображенную на рис. 1.

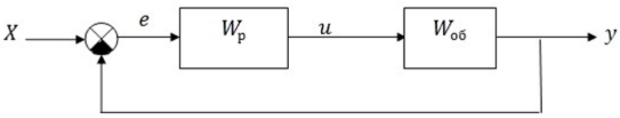

Рис. 1. Схема замкнутой системы автоматического управления

Обозначим через $\Re_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел.

Пусть задана передаточная функция объекта

$$W_{об}(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}, \qquad (1)$$

где $P_1(p) \in \Re_m$ и $P_2(p) \in \Re_n$.

Условие физической реализуемости накладывает ограничение на степени полиномов $m \le n$.

Изображение задающего воздействия

$$X(p) = \frac{R_1(p)}{R_2(p)}, \qquad (2)$$

где $P_1(p) \in \Re_q$ и $P_2(p) \in \Re_r$.

Представим передаточную функцию замкнутой системы в виде частного двух полиномов $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$

$$W_{з.с} = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}, \qquad (3)$$

где $Q_1(p) \in \Re_l$ и $Q_2(p) \in \Re_k$ полиномы степени $l \le k$.

Полином $Q_2(p)$ будем считать желаемым полиномом. Полином $Q_1(p)$ задан с точностью до коэффициентов, которые будут определены в процессе построения передаточной функции регулятора.

Введем в рассмотрение полиномы $N_1(p)$, $N_2(p)$, $N_{ост}(p)$, $L_{ост}(p)$, $T_1(p)$, $T_{ост}(p)$.

Полином $N_1(p)$ есть частное от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$. Полином $N_2(p)$ есть частное от деления полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$. Полином $T_1(p)$ есть частное от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $R_2(p)$.

Полином $N_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$. Полином $L_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$. Полином $T_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $R_2(p)$. То есть

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{P_2(p)} = N_1(p) + \frac{N_{ост}(p)}{P_2(p)} \quad (4)$$

$$\frac{Q_1(p)}{P_1(p)} = N_1(p) + \frac{L_{ост}(p)}{P_1(p)} \quad (5)$$

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{R_2(p)} = T_1(p) + \frac{T_{ост}(p)}{T_2(p)} \quad (6)$$

В [3] сформулированы и доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если полиномы $Q_2(p) - Q_1(p)$, $Q_1(p)$, $Q_2(p) - Q_1(p)$ делятся соответственно на полиномы $P_2(p)$, $P_1(p)$, $R_2(p)$ без остатка, то существует передаточная функция регулятора, обеспечивающего желаемого расположение корней характеристического полинома замкнутой системы и обеспечивающего воспроизведение $x(t)$ без остаточной ошибки.

Передаточная функция регулятора при этом имеет вид

$$W_p(p) = \frac{N_1(p)}{N_2(p)}. \quad (7)$$

Теорема 2. Для того, чтобы существовали коэффициенты полинома $Q_1(p)$, при которых происходит деление без остатка $Q_2(p) - Q_1(p)$ на $P_2(p)$, $Q_2(p) - Q_1(p)$ на $R_2(p)$, $Q_1(p)$ на $P_1(p)$ необходимо, чтобы выполнялось условие $k \ge (2n-1) + r + g_2$, и полиномы $P_2(p)$ и $P_1(p) * P_2(p)$ не имели общих делителей.

Замечание 1. Если полиномы $P_2(p)$, $P_1(p)$ и $R_2(p)$, не содержат кратных корней, то это условие является достаточным.

Таким образом, для получения передаточной функции модального регулятора обеспечивающую устойчивость замкнутой системы необходимо осуществить деление полиномов согласно формулам 4–5, приравнять к нулю остатки от деления, получить и решить систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома Q1 и подставив их в 7 получить числитель и знаменатель передаточной функции регулятора.

Отличительной особенностью разработанного метода является возможность выразить передаточную функцию регулятора через коэффициенты желаемого характеристического полином, а также через неизвестные параметры объекта.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Рассмотрим систему автоматического регулирования, представленную на рис. 2.

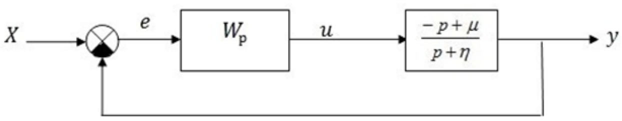

Рис. 2. Схема замкнутой системы автоматического управления

Пусть задана передаточная функция объекта:

$$W_{об}(p) = \frac{-p + \mu}{p + \eta}. \quad (8)$$

Задающее воздействие представлено единичным скачком.

Произведя деление полиномов согласно (4–6), получим остатки от деления $N_{ост}(p)$, $L_{ост}(p)$ и $T_{ост}(p)$

$$N_{ост}(p) = a_2 - d_2 - a_1\eta + d_1\mu + \eta^2 - d_0\eta^2 \quad (9)$$

$$L_{ост}(p) = d_2 + d_1\mu + d_0\mu^2 \quad (10)$$

$$T_{ост}(p) = a_2 - d_2. \quad (11)$$

Для того чтобы деление происходило без остатка необходимо, чтобы все остатки от деления были равны нулю. Приравнивая их к нуля получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов di. Решив полученную систему и подставив найденные значения di в полиному N_1 и N_2 получим числитель и знаменатель передаточной функции регулятора, который содержит в себе коэффициенты желаемого характеристического полинома, а также параметры объекта.

$$W_p = \frac{(a_2 + a_1\mu + a_0\mu\eta)p + a_1(\mu + \eta)}{(a_2 + a_1\mu + a_0\mu^2)p}. \quad (12)$$

Аналогично рассмотрим систему автоматического регулирования, с объектом второго порядка, представленную на рис. 3.

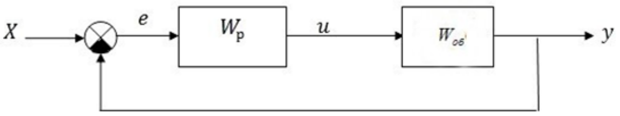

Рис. 3. Схема замкнутой системы автоматического управления

Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_{об}(p) = \frac{p^2 + r_1 p + r_2}{p^2 + c_1 p + c_2\eta}. \quad (13)$$

Зададимся передаточной функцией замкнутой системы

$$W_{зс}(p) = \frac{d_0 p^4 + d_1 p^3 + d_2 p^2 + d_3 p + d_4}{p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}. \quad (14)$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим выражения для передаточной функции регулятора

$$W_p = \frac{k_1 p^2 + k_2 p + k_3}{f_1 p^2 + f_2 p}, \quad (15)$$

где

$$k_1 = -a_4c_2 + a_4c_1r_1 - a_4r_1^2 + a_4r_2 - a_3c_1r_2 +$$
$$+a_2c_2r_2 - c_2^2r_2 + a_3r_1r_2 - a_1c_2r_1r_2 + c_1c_2r_1r_2 -$$
$$-a_2r_2^2 + a_1c_1r_2^2 - c_1^2r_2^2 + c_2r_2^2$$
$$k_2 = -a_4c_1c_2 + a_4c_1^2r_1 - a_4c_1r_1^2 - a_3c_1^2r_2 +$$
$$+a_3c_2r_2 + a_2c_1c_2r_2 - a_1c_2^2r_2 + a_4r_1r_2 + a_3c_1r_1r_2 -$$
$$-a_2c_2r_1r_2 + c_2^2r_1r_2 - a_3r_2^2 + a_1c_2r_2^2 - c_1c_2r_2^2$$
$$k_3 = -a_4c_2^2 + a_4c_1c_2r_1 - a_4c_2r_1^2 - a_4c_1^2r_2 +$$
$$+2a_4c_2r_2 + a_4c_1r_1r_2 - a_4r_2^2$$
$$f_1 = a_4c_2 - a_4c_1r_1 + a_4r_1^2 - a_4r_2 + a_3c_1r_2 -$$
$$-a_2c_2r_2 - a_3r_1r_2 + a_1c_2r_1r_2 - c_2r_1^2r_2 +$$
$$+a_2r_2^2 - a_1c_1r_2^2 + c_2r_2^2 + c_1r_1r_2^2 - r_2^3$$
$$f_2 = a_4c_2r_1 - a_4c_1r_1^2 + a_4r_1^3 + a_4c_1r_2 - a_3c_2r_2$$
$$-2a_4r_1r_2 + a_3c_1r_1r_2 - a_3r_1^2r_2 + a_3r_2^2 - a_2c_1r_2^2 +$$
$$+a_1c_2r_2^2 + a_2r_1r_2^2 - c_2r_1r_2^2 - a_1r_2^3 + c_1r_2^3$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос получения передаточной функции модального регулятора содержащей в себе параметры объекта. Решение данного вопроса открывает широкие перспективы для дальнейших исследований в области адаптивного и робастного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мейлахс А. М.* О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности / А. М. Мейлахс // АиТ. – 1975. – № 2. – С. 182–184.

2. *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // АиТ. – 1990. – № 9. – С. 45–54.

3. *Поляк Б. Т.* Робастный критерий Найквиста / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // АиТ. – 1992. – № 7. – С. 25–31.

4. *Безрядин М. М.* Построение модального робастного регулятора в случае наличия возмущающего и задающего воздействий / М. М. Безрядин, Г. И. Лозгачев // Приборостроение. – 2012. – №. 7. – С. 14–19.

5. *Безрядин М. М.* Применение теоремы Безу и схемы Горнера для построения передаточной функции модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы / М. М. Безрядин, Г. И. Лозгачев // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 5. – С. 44–51.

6. *Безрядин М. М.* Синтез модального регулятора с компенсацией внешнего возмущения для объекта с параметрической неопределенностью по критерию максимальной робастности / М. М. Безрядин, Г. И. Лозгачев // Труды СПИИРАН. – 2012. – Вып. 21. – С. 157–169.

Безрядин Михаил Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета ПММ ВГУ.
Тел.: +7-920-212-54-80
E-mail: maickel@yandex.ru

Bezryadin Mikhail M. – Candidate of Physics-math.Sciences, Associate professor, the dept. of the Technical Cybernetics and Automation Control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University.
Tel.: +79202125480
E-mail: maickel@yandex.ru

Ляликова Виктория Геннадиевна – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета ПММ ВГУ.
Тел.: +7-920-420-95-82
E-mail: vikalg@yandex.ru

Lyalikova Viktoriya G. – candidate of Physics-math.Sciences, lecturer of the department of Technical Cybernetics and Automatic Control of faculty Applied Mathematics, Informatics and Mechanics of the Voronezh State University.
Tel.: +79204209582
E-mail: vikalg@yandex.ru

Рудалев Валерий Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования ВГУ.
Тел.: +7-820-427-57-06
E-mail: rudalev@amm.vsu.ru

Rudalev V. G. – Candidate of Physics-math. Sciences, Associate professor, the dept. of the Technical Cybernetics and Automation Control VSU.
Tel.: +7-820-427-57-06
E-mail: rudalev@amm.vsu.ru