ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ, УПРАВЛЯЮЩИЕ И СЕТЕВЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 12.01.2015 г.

Аннотация. Рассматривается разностная сложная система, описывающая взаимодействие нескольких однородных подсистем. Предполагается, что как сами подсистемы, так и связи между ними, могут переключаться с одного режима функционирования на другой. С помощью метода составных функций Ляпунова определяются условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия исследуемой системы с переключениями.
Ключевые слова: разностные системы с переключениями, сложные системы, асимптотическая устойчивость, составные функции Ляпунова.
Annotation. A difference complex system describing the interaction of several homogeneous subsystems is considered. It is assumed that both subsystems and connections between the subsystems can be switched from one operation mode to other one. By the usage of the multiple Lyapunov functions method, conditions are derived guaranteeing the asymptotic stability of the given equilibrium position of the investigated switched system.
Keywords: switched difference systems, complex systems, asymptotic stability, multiple Lyapunov functions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основным методом анализа качественного поведения решений нелинейных систем является второй метод Ляпунова [1]. Однако общих правил построения функций Ляпунова до сих пор не существует. Задача существенно усложняется, если исследуемая система имеет большую размерность. В этом случае обычно пытаются разбить систему на несколько подсистем меньшей размерности с установлением связей между этими подсистемами. Часто, найдя нужную функцию Ляпунова для каждой подсистемы, из них удается сконструировать функцию Ляпунова для всей сложной системы [1, 2].

Во многих практических приложениях вид заданной системы может меняться в зависимости от различных факторов. Подобные системы называются системами с переключениями [3–6]. Они широко применяются в задачах управления механическими, энергетическими, транспортными системами, при управлении технологическими процессами, а также в ряде других областей [3, 4, 7, 8]. С одной стороны, это обусловлено тем, что структурные вариации в процессе функционирования являются характерной особенностью многих технических систем. С другой стороны, в последнее время интенсивно развиваются методы интеллектуального управления, основанные на организации переключений

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00347-а и № 13-08-00948-а) и Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.674.2013)

между различными управляющими устройствами [3–6].

В настоящей работе исследуется проблема устойчивости решений одного класса существенно нелинейных разностных сложных систем с переключениями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана сложная (многосвязная) система

$$x_i(k+1) = x_i(k) + F_i^{(\sigma)}(x_i(k)) + \sum_{j=1}^{m} \Psi_{ij}^{(\sigma)}(k, x(k)), \quad i = 1,\dots,m, \quad (1)$$

описывающая взаимодействие m подсистем. Здесь $x_i(k)$ – векторы состояний размерности n_i, $x(k) = (x_1^T(k),\dots,x_m^T(k))^T$; $\sigma = \sigma(k) \in \{1,\dots,N\}$ – функция, определяющая закон переключения между различными режимами; $k = 0,1,\dots$; элементы векторов $F_i^{(s)}(z_i)$ определены и непрерывны при всех $z_i \in R^{n_i}$ и являются однородными функциями порядка $\mu_i^{(s)} > 1$; векторные функции $\Psi_{ij}^{(s)}(k,z)$, где $z = (z_1^T,\dots,z_m^T)^T$, определены при $k = 0,1,\dots$, $\|z\| < H$, $0 < H < +\infty$, при каждом фиксированном значении k непрерывны относительно переменной z, и удовлетворяют неравенствам

$$\left\|\Psi_{ij}^{(s)}(k,z)\right\| \le c_{ij}^{(s)} \left\|z_j\right\|^{\alpha_{ij}^{(s)}},$$

где $c_{ij}^{(s)} \ge 0$, $\alpha_{ij}^{(s)} > 0$; $i, j = 1,\dots,m$, $s = 1,\dots,N$.

Таким образом, при $\sigma(k) = s$, $s \in \{1,\dots,N\}$, активной является система

$$x_i(k+1) = x_i(k) + F_i^{(s)}(x_i(k)) + \sum_{j=1}^{m} \Psi_{ij}^{(s)}(k, x(k)), \quad i = 1,\dots,m. \quad (2)$$

Система (1) имеет нулевое решение. Исследуем далее условия, при выполнении которых это решение является асимптотически устойчивым.

3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Следует отметить, что методы построения функций Ляпунова лучше развиты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, чем для разностных систем. Однако в некоторых случаях функцию Ляпунова, построенную для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удается использовать и для разностного аналога этой системы [9–11].

При каждых значениях $i \in \{1,\dots,m\}$ и $s \in \{1,\dots,N\}$ рассмотрим изолированную разностную подсистему

$$x_i(k+1) = x_i(k) + F_i^{(s)}(x_i(k)) \quad (3)$$

и соответствующую ей подсистему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i(t) = F_i^{(s)}(z_i(t)). \quad (4)$$

Сделаем далее ряд предположений.

Предположение 1. Существуют постоянные $h_1,\dots,h_m$ такие, что $h_i \ge 1$, $i = 1,\dots,m$, и для каждого $s \in \{1,\dots,N\}$ справедливы неравенства

$$\frac{\alpha_{ij}^{(s)}}{h_j + \mu_j^{(s)}} \ge \frac{\mu_i^{(s)}}{h_i + \mu_i^{(s)}} \quad \text{при } c_{ij}^{(s)} \ne 0,\ i, j = 1,\dots,m.$$

Замечание 1. Предположение 1 означает, что порядки правых частей изолированных подсистем (3) в определенном смысле не превосходят порядки функций, характеризующих связи между этими подсистемами.

Предположение 2. При всех значениях $i \in \{1,\dots,m\}$ и $s \in \{1,\dots,N\}$ нулевое решение соответствующей подсистемы (4) асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Согласно [11], из выполнения предположения 2 следует, что и нулевые решения разностных подсистем (3) будут асимптотически устойчивы.

Предположение 3. При всех значениях $i \in \{1,\dots,m\}$ и $s \in \{1,\dots,N\}$ для подсистемы (4) удалось построить дважды непрерывно дифференцируемую при $z_i \in R^{n_i}$ положительно определенную положительно однородную порядка $\gamma_i \ge 2$ функцию Ляпунова $v_{is}(z_i)$ такую, что функция $\left(\frac{\partial v_{is}(z_i)}{\partial z_i}\right)^T F_i^{(s)}(z_i)$ отрицательно определена.

Заметим, что если для некоторой подсистемы (4) построена указанная в Предположении 3 функция $v_{is}(z_i)$, то и функция $v_{is}^{\varepsilon_i}(z_i)$ будет удовлетворять тем же свойствам при любом $\varepsilon_i > 0$ таком, что $\varepsilon_i \gamma_i \ge 2$. Поэтому далее без потери общности будем считать, что $\gamma_i = h_i + 1$, $i = 1,\dots,m$, где $h_1,\dots,h_m$ – постоянные, указанные в Предположении 1.

При выполнении Предположения 3 при всех $z_i \in R^{n_i}$ будут справедливы неравенства (см. [12]):

$$a_{1i}^{(s)} \left\| z_i \right\|^{\gamma_i} \le v_{is}(z_i) \le a_{2i}^{(s)} \left\| z_i \right\|^{\gamma_i},$$

$$\left\| \frac{\partial v_{is}(z_i)}{\partial z_i} \right\| \le a_{3i}^{(s)} \left\| z_i \right\|^{\gamma_i - 1},$$

$$\left(\frac{\partial v_{is}(z_i)}{\partial z_i} \right)^T F_i^{(s)}(z_i) \le -a_{4i}^{(s)} \left\| z_i \right\|^{\gamma_i - 1 + \mu_i^{(s)}},$$

где $a_{1i}^{(s)}$, $a_{2i}^{(s)}$, $a_{3i}^{(s)}$, $a_{4i}^{(s)}$ – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбранных функций $v_{is}(z_i)$, $s = 1,\dots,N$, $i = 1,\dots,m$.

Предположение 4. Для каждого значения $s \in \{1,\dots,N\}$ система неравенств

$$-a_{4i}^{(s)} \xi_i^{\mu_i^{(s)}} + a_{3i}^{(s)} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{(s)} \xi_j^{\alpha_{ij}^{(s)}} < 0, \; i = 1,\dots,m, \quad (5)$$

имеет положительное решение.

Замечание 3. Условие существования при некотором $s \in \{1,\dots,N\}$ положительных постоянных $\xi_1,\dots,\xi_m$, удовлетворяющих неравенствам (5), представляет собой известное условие Мартынюка – Оболенского (см. [13]) устойчивости соответствующей системы Важевского

$$\dot z_i(t) = -a_{4i}^{(s)} z_i^{\mu_i^{(s)}}(t) + a_{3i}^{(s)} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{(s)} z_j^{\alpha_{ij}^{(s)}}(t), \; i = 1,\dots,m.$$

Известно [14], что если выполнены Предположения 1–4, то для любого $s \in \{1,\dots,N\}$ можно подобрать такие положительные коэффициенты $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_m^{(s)}$, что функция

$$V_s(z) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(s)} v_{is}(z_i) \quad (6)$$

будет удовлетворять требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости для соответствующей многосвязной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot z_i(t) = F_i^{(s)}(z_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} \Psi_{ij}^{(s)}(t, z(t)), \; i = 1,\dots,m.$$

Ну а тогда (см. [11]) функция (6) будет являться функцией Ляпунова и для соответствующей системы (2). Следуя [11], нетрудно показать, что найдутся такие числа $\beta_1^{(s)} > 0$, $\beta_2^{(s)} > 0$, $s = 1,\dots,N$, и $0 < \bar H < H$, что при $\left\| x(k) \right\| < \bar H$ приращение функции (6) на решениях s-ой системы (2) ($s \in \{1,\dots,N\}$) будет удовлетворять оценке

$$\Delta V_s = V_s(x(k+1)) - V_s(x(k)) \le$$

$$\le -\beta_1^{(s)} \sum_{j=1}^{m} \left\| x_i(k) \right\|^{\gamma_i - 1 + \mu_i^{(s)}} \le -\beta_2^{(s)} V_s^{1+\rho_s}(x(k)),$$

где $\rho_s = \max\limits_{i=1,\dots,m} \dfrac{\mu_i^{(s)} - 1}{\gamma_i}$.

Пусть $\rho = \max\{\rho_1,\dots,\rho_N\}$. Обозначим через A множество таких индексов $s \in \{1,\dots,N\}$, для которых $\rho_s < \rho$. Зададим произвольное $b > 0$. Тогда найдется $0 < \hat H < \bar H$, такое что при $\left\| x(k) \right\| < \hat H$ приращение функции (6) на решениях s-ой системы (2) ($s \in A$) будет удовлетворять оценке $\Delta V_s \le -b V_s^{1+\rho}(x(k))$. Значит, при любом $s \in \{1,\dots,N\}$ имеем

$$\Delta V_s \le -\alpha V_s^{1+\rho}(x(k)), \quad (7)$$

если только $\left\| x(k) \right\| < \hat H$. Здесь $\alpha = \min\left\{ b, \min\limits_{s \notin A} \beta_2^{(s)} \right\}$.

С помощью неравенств (7) можно получить оценки решений систем (2). Для этого достаточно применить следующий результат.

Лемма 1 [15]. *Пусть для членов последовательности $\{q_k\}$ выполнены неравенства*

$$0 \le q_{k+1} \le q_k - \alpha q_k^{\lambda}, \; k = 0,1,\dots,$$

где $\alpha > 0$, $\lambda > 1$, $q_0 \ge 0$, $\alpha \lambda q_0^{\lambda - 1} \le 1$. Тогда при всех $k = 0,1,\dots$ будет справедлива оценка

$$q_k \le q_0 \left(1 + \alpha(\lambda - 1) q_0^{\lambda - 1} k \right)^{-\frac{1}{\lambda - 1}}.$$

Найдем такое $c \ge 1$, что

$$V_s(z) \le c V_j(z) \quad (8)$$

при $z \in R^{n_1 + \dots + n_m}$, $s, j = 1,\dots,N$. Пусть $h = c^{-\rho}$.

Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \dots$ моменты переключения в системе (1). Полагаем $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$; $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1,2,\dots$; $\varphi(n,1) = 0$, $\varphi(n,q) = \sum\limits_{i=1}^{q-1} T_{n+i} h^{q-i}$ при $q = 2,3,\dots$, $n = 1,2,\dots$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда если*

$$\varphi(n,q) \to +\infty \text{ при } q \to +\infty \quad (9)$$

для любого $n = 1,2,\dots$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. А в случае, когда предельное соотношение (9) выполнено равномерно по отношению к $n = 1,2,\dots$, нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Используя частные функции Ляпунова $V_1(z),\dots,V_N(z)$, построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(k)}(z)$, соответствующую закону переключения $\sigma(k)$.

Выберем произвольные $0<\varepsilon<\widehat{H}$ и $k_0\ge 0$. Число ε при этом возьмем настолько малым, чтобы при $\|z\|<\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\alpha(1+\rho)V_s^{\rho}(z)\le 1,\ s=1,\dots,N.$$

Рассмотрим решение $x(k)$ системы (1), выходящее при $k=k_0$ из некоторой точки x_0, удовлетворяющей условиям $0<\|x_0\|<\varepsilon$. Укажем такое натуральное число n, что $\tau_{n-1}\le k_0<\tau_n$. Применяя лемму 1 к неравенствам (7), получаем, что если при $k=k_0,\dots,\tau_n$ решение системы (1) остается в области $\|z\|<\varepsilon$, то при этих значениях k будет справедливо соотношение

$$V^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n-1})}(x(k))\ge V^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n-1})}(x_0)+\alpha\rho(k-k_0).$$

Для каждого $k>\tau_n$ можно найти такое натуральное число q, что $\tau_{n+q-1}<k\le\tau_{n+q}$. Отметим, что $q\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Тогда, снова применяя к соответствующим неравенствам (7) лемму 1, получаем с учетом (8), что если решение системы (1) до рассматриваемого момента k не покидает область $\|z\|<\varepsilon$, то будут иметь место соотношения

$$\begin{gathered}V^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n+q-1})}(x(k))\ge\\ \ge V^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n+q-1})}(x(\tau_{n+q-1}))+\alpha\rho(k-\tau_{n+q-1})\ge\\ \ge hV^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n+q-2})}(x(\tau_{n+q-1}))+\alpha\rho(k-\tau_{n+q-1})\ge\\ \ge h^qV^{-\rho}_{\sigma(\tau_{n-1})}(x_0)+\\ +\alpha\rho\Big((k-\tau_{n+q-1})+\varphi(n,q)+h^q(\tau_n-k_0)\Big).\end{gathered}$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [16].

Замечание 4. Если $\varphi(1,q)\to+\infty$ при $q\to+\infty$, то $\varphi(n,q)\to+\infty$ при $q\to+\infty$ при любом $n=1,2,\dots$.

Следствие 1. *Можно указать такое* $\delta>0$, *что для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся такие* $L_1>0$ *и* $L_2>0$, *что если* $T_i\ge L_1$, $i=1,2,\dots$, *то* $\|x(k,x_0,k_0)\|<\varepsilon$ *при всех* $k_0\ge 0$, $\|x_0\|<\delta$, $k\ge k_0+L_2$.

Замечание 5. Теорема 1 не позволяет найти такое $L_1>0$, что при $T_i\ge L_1$, $i=1,2,\dots$, будет гарантироваться асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1). Однако, согласно следствию 1, значение L_1 всегда можно подобрать таким образом, что при $T_i\ge L_1$, $i=1,2,\dots$, все решения рассматриваемой системы, начинающиеся в некоторой окрестности начала координат, спустя определенное время попадут в любую заданную окрестность. Таким образом, в данном случае можно говорить о практической устойчивости [17].

4. ПРИМЕР

Предположим, что система (1) имеет вид

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=x_1(k)-x_1^{\mu_1^{(\sigma)}}(k)+\\&+c_1^{(\sigma)}x_1(k)x_2^{\mu_1^{(\sigma)}-1}(k)+\frac15x_3^{\alpha_{12}^{(\sigma)}}(k),\\x_2(k+1)&=x_2(k)-x_2^{\mu_1^{(\sigma)}}(k)-\\&-c_2^{(\sigma)}x_1^2(k)x_2^{\mu_1^{(\sigma)}-2}(k),\\x_3(k+1)&=x_3(k)-x_3^{\mu_2^{(\sigma)}}(k)+\\&+\frac15\left(x_1^2(k)+x_2^2(k)\right)^{\alpha_{21}^{(\sigma)}/2},\end{aligned}\tag{10}$$

где $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ – скалярные переменные; $N=2$; $c_1^{(1)}=10$, $c_2^{(1)}=1$, $\mu_1^{(1)}=3$, $\mu_2^{(1)}=5$, $\alpha_{12}^{(1)}=6$, $\alpha_{21}^{(1)}=5/2$; $c_1^{(2)}=1$, $c_2^{(2)}=10$, $\mu_1^{(2)}=5$, $\mu_2^{(2)}=3$, $\alpha_{12}^{(2)}=5$, $\alpha_{21}^{(2)}=3$.

Систему (10) можно представить как сложную систему, описывающую взаимодействие двух ($m=2$) изолированных подсистем

$$x_1(k+1)=x_1(k)-x_1^{\mu_1^{(\sigma)}}(k)+c_1^{(\sigma)}x_1(k)x_2^{\mu_1^{(\sigma)}-1}(k),$$

$$x_2(k+1)=x_2(k)-x_2^{\mu_1^{(\sigma)}}(k)-c_2^{(\sigma)}x_1^2(k)x_2^{\mu_1^{(\sigma)}-2}(k)$$

и

$$x_3(k+1)=x_3(k)-x_3^{\mu_2^{(\sigma)}}(k).$$

Нетрудно проверить, что Предположения 1 и 2 для такой сложной системы выполнены, причем можно взять $h_1=1$, $h_2=3$. Тогда $\gamma_1=2$, $\gamma_2=4$. Положим

$$v_{11}(z_1,z_2)=z_1^2+10z_2^2,$$

$$v_{12}(z_1,z_2)=10z_1^2+z_2^2,$$

$$v_{21}(z_3)=v_{22}(z_3)=z_3^4.$$

Тогда Предположения 3 и 4 также будут иметь место. С помощью численных расчетов легко убедиться, что функции Ляпунова (6) в рассматриваемом случае можно построить следующим образом:

$$V_1(z) = v_{11}(z_1, z_2) + v_{21}(z_3),$$

$$V_2(z) = v_{12}(z_1, z_2) + v_{22}(z_3).$$

В результате имеем $c = 10$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $\rho = 2$, $h = 1/100$. Значит (см. теорему 1 и замечание 4), для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (10) достаточно выполнения условия: $\sum_{i=1}^{q-1} 100^{i-q} T_{1+i} \to +\infty$ при $q \to +\infty$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован некоторый класс существенно нелинейных сложных систем с переключениями. Предполагалось, что подсистемы, составляющие сложную систему, при каждом режиме функционирования описываются однородными разностными уравнениями и имеют асимптотически устойчивые нулевые решения, причем для каждой такой подсистемы построена своя функция Ляпунова. Из этих частных функций Ляпунова конструировалась составная функция Ляпунова, зависящая от закона переключения, для всей сложной системы. В результате были получены условия на длины промежутков между последовательными моментами переключений, при выполнении которых нулевое решение исследуемой системы также является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. – М. : Физматлит, 2001.

2. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев : Наукова думка, 1984.

3. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. – 1999. – V. 19, No. 15. – P. 59–70.

4. *Decarlo R. A., Branicky M. S., Pettersson S., Lennartson B.* Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proceedings of the IEEE. –2000. – V. 88, No. 7. – P. 1069–1082.

5. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N.* Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems // J. of the Franklin Institute. – 2001. – V. 338. – P. 765–779.

6. *Подвальный С. Л., Васильев Е. М.* Концепция многоальтернативного управления открытыми системами: истоки, состояние и перспективы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9, № 2. – С. 4–20.

7. *Провоторов В. В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из *m* струн // Вестник С.-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2012. – Вып. 1. – С. 60–69.

8. *Провоторов В. В., Гнилицкая Ю. А.* Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестник С.-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. – 2013. – Вып. 3. – С. 112–120.

9. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971.

10. *LaSalle J. P.* The Stability and Control of Discrete Process. New York: Springer, 1986.

11. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Сохранение устойчивости при дискретизации системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 3. – С. 383–395.

12. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М. : Высш. шк., 1973.

13. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 1392–1407.

14. *Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V.* Aggregation and stability analysis of nonlinear complex systems // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 342, No 2. – P. 989–1002.

15. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 6. – С. 1217–1225.

16. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Исследование устойчивости решений одного класса гибридных нелинейных систем // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 35–40.

17. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М. : Мир, 1964.

Александров Александр Юрьевич – заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами СПбГУ, д.ф.-м.н., профессор.
E-mail: alex43102006@yandex.ru

Платонов Алексей Викторович – доцент кафедры управления медико-биологическими системами СПбГУ, к.ф.-м.н., доцент.
E-mail: al-platon1@yandex.ru

Aleksandrov Alexander Yurjevich – Dr. Sc. (Phis. & Math.) Full Prof., Head of Dept. of Medical and Biological Systems Control.
E-mail: alex43102006@yandex.ru

Platonov Alexey Viktorovich – Ph. D. (Phis. & Math.) Ass. Prof., Dept. of Medical and Biological Systems Control.
E-mail: al-platon1@yandex.ru