УДК 519. 3:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С МАКСИМУМАМИ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева

Поступила в редакцию 28.02.2015 г.

Аннотация. Рассмотрены вопросы приближенного решения системы случайных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с нелинейными максимумами и приближенного вычисления функционала качества при известном управлении. Поставленная задача сведена к рассмотрению случайного управления, ограниченного по модулю вектором-константой и с критерием нелинейного вида. Использован случай, когда переменные принимают натуральные значения. Задача заменяется с её дискретным аналогом. Для каждого набора заданной координаты и управления задача сведена к случайной системе суммарных уравнений с максимумами. Доказаны существование и единственность решения этой системы суммарных уравнений. При этом использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получена оценка для допускаемой погрешности по состоянию приближенного решения суммарной задачи. Далее доказано, что последовательность дискретных управлений является минимизирующей последовательностью для этой задачи. В качества примера рассматриваемой системы интегральных уравнений с максимумами составлена простейшая математическая модель производственного процесса компании, производящего n видов продукции.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, с максимумами, оптимальное управление, случайное приближенное решение, математическая модель экономики.

Annotation. It is considered the questions of approximate solving the system of random nonlinear Volterra integral equations with nonlinear maxima and of approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. This problem is reduced to study the random control bounded by a constant vector and with nonlinear criterion type. It is considered the case when the variables are integer values. The problem is changed to its discrete analog. For each set of given coordinate and controls the problem is reduced to a random system of summary equations with nonlinear delay. It is proved the existence and uniqueness of solution of this system of summary equations. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps. It is estimated the permissible error with respect to state of approximation solution of summary problem. Further it is proved that discrete control sequence is minimizing for the considering problem. As an example of considering system of integral equations with maxima it is constructed the simple mathematical model of the economy of manufacturing company, which is outputted n kind of production.

Keywords: Volterra integral equation, with maxima, optimal control, random approximate solution, mathematical model of economics.

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам относятся и задачи адаптивных систем управления.

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами получила бурное развитие. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т. д. [1 – 7].

Разрабатываются эффективные численные методы и программные средства для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления используются широкий спектр разных методов (см., напр. [8–17]).

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения случайной задачи оптимального управления для одной системы нелинейных интегральных уравнений со сложными максимумами и с нелинейным критерием оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть случайный управляемый процесс на отрезке D_T описывается системой нелинейных интегральных уравнений вида

$$\vartheta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s,u(s), \max\left\{\vartheta(\theta)\middle|\theta\in\left[\tau_1;\tau_2\right]\right\},\xi(s))ds \tag{1}$$

с условием

$$\vartheta(t) = \varphi(t),\ t\in\left[\ 0;t_0\ \right], \tag{2}$$

где $K(t,s,u,\vartheta,\xi)\in C\left(D_T^2\times U\times V\times\Omega\right)$, $\xi(t)\in\Omega$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в R^n, $\tau_i=\tau_i\left(s,u(s),\int\limits_{t_0}^{s} H_i(s,\theta)\,\vartheta(\theta)\,d\,\theta\right)$ – вектор-функции запаздывания, $i=1,2,$ $0<\tau_1<\tau_2<t,$ $\varphi(t)\in C\left[\ 0;t_0\ \right]$ – начальная вектор-функция, $\int\limits_{t_0}^{t}\left|\,H_i(t,s)\,\right|d\,s<\infty,$ $i=1,2,$ $0<u(t)\in U$ – управляющая вектор-функция, $U\in R^n,$ $V\in R^n,$ $\Omega\in R^n$ – случайные ограниченные замкнутые множества, $D_T^2\equiv D_T\times D_T$, $D_T\equiv\left[\,t_0;T\,\right],$ $0<t_0<T<\infty.$

Задача 1. Найти случайное состояние $\vartheta^*(t)$ – решение задачи (1), (2) при известных управляющих воздействиях $u^*(t)\in\left\{u^*:\left|\,u^*(t)\,\right|\le M_0\in R^n,\ t\in D_T\right\}$, что доставляют минимум функционалу

$$J[u]=\int\limits_{t_0}^{T} g\left(t,u(t),\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,s)\vartheta(s)ds\right)dt,$$

где $\Phi(t,s)\in C\left(D_T^2\right)$.

2. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ 1

Вместо случайной системы нелинейных интегральных уравнений (1) рассмотрим её суммарный аналог

$$\vartheta(k)=\sum_{\mu=k_0}^{k-1}K(k,\mu,u(\mu), \max\left\{\vartheta(\theta)\middle|\theta\in\left[\tau_1;\tau_2\right]\right\},\xi(\mu)) \tag{3}$$

при условии

$$\vartheta(k)=\varphi(k),\ k\in D_1, \tag{4}$$

где случайная вектор-функция $K(k,\mu,u,\vartheta,\xi)$ определена для всех $k\in D_k\equiv\left\{k_0\le\mu\le k\le k_1\right\}$,

$$\tau_i=\tau_i\left(\mu,u(\mu),\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1}H_i(\mu,\nu)\vartheta(\nu)\right),\qquad i=1,2,$$

$0<\tau_1<\tau_2<k,$ $\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1}\left|H_i(k,\mu)\right|<\infty,$ $i=1,2,$ $\xi(k)$ – целочисленная случайная вектор-функция, $\varphi(k)$ определена для всех $k\in D_1\equiv\left\{0\le k\le k_0\right\}$, а k_0, k, и k_1 – натуральные числа.

Задача 2. Найти случайное состояние $\vartheta^*(k)$ – решение задачи (3), (4) при известных управляющих воздействиях $u^*(k)\in\left\{u^*:\left|u^*(k)\right|\le M_0^*,\ k\in D_k\right\}$, что доставляют минимум функционалу

$$J[u]=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}g\left(k,u(k),\sum_{\mu=k_0}^{k-1}\Phi(k,\mu)\vartheta(\mu)\right). \tag{5}$$

В данной работе вместо задачи 1 будем рассматривать суммарную задачу 2.

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ СУММАРНЫХ УРАВНЕНИЙ (3)

В дальнейшем все соотношения понимаем в смысле почти наверное [18]. Обозначим через A множество всех случайных величин ω. Очевидно, что $P(A)=1$. Для всех $\omega\in A$ мы используем следующие обозначения: $Bnd\left(M(\omega)\right)$ – класс целочисленных вектор-функций, ограниченных по норме с положительным случайным вектором $M(\omega)$; $Lip\{L(\omega)_{|u,v,\dots}\}$ – класс вектор-функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с положительной случайной матрицей $L(\omega)$. В качестве нормы на множестве D_k для произвольной целочисленной вектор-функции $x(k,\omega)$ мы будем брать евклидову норму

$$\| x(k,\omega) \| = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\left|x_i(k,\omega)\right| : k \in D_k\right\}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) $K(k,\mu,u,\vartheta,\xi) \in Bnd(M(\omega)) \cap$ $\cap Lip\left(L_1(k,\mu,\omega)_{|\vartheta}\right)$, где $0 < M(\omega)$ – случайный постоянный вектор, $L_1(k,\mu,\omega)$ – случайная матрица-функция;

2) $0 < \alpha = \max\left\{\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega) : k \in D_k\right\} < \infty$;

3) $\tau_i(k,u,\vartheta) \in Lip\left(L_{i2}(\omega)_{|\vartheta}\right)$, где $0 < L_{i2}(\omega)$ – случайная постоянная матрица, $i = 1,2$;

4) $0 < \beta_i = \max\left\{\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1} \left|H_i(k,\mu)\right| : k \in D_k\right\} < \infty$, $i = 1,2$;

5) $\gamma = \max\left\{\left|\varphi(k)\right| : k \in D_1\right\} < \infty$;

6) $\left|\vartheta(k,\omega) - \vartheta(\mu,\omega)\right| \le L_3(\omega)\left|k-\mu\right|$, $0 < L_3(\omega)$ – случайная постоянная матрица;

7) $\rho_{\max} < 1$, где $\rho_{\max}$ – наибольшее собственное значение случайной матрицы $Q(\omega) = \alpha\left(E + L_3(\omega)\sum\limits_{i=1}^{2}\beta_i L_{i2}(\omega)\right)$, E – единичная матрица.

Тогда система суммарных уравнений (3) при фиксированных значениях управления $u(k,\omega)$ имеет единственное решение на множестве D_k.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Рассмотрим следующие итерационные процессы Пикара:

$$\vartheta_0(k,\omega) = \varphi\left(k_0,\omega\right), \quad r = 0,1,2, \ \dots \ ;$$

$$\vartheta_{r+1}(k,\omega) = \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K(k,\mu,u(\mu,\omega), \max\left\{\vartheta_r(\theta,\omega)\middle|\theta \in \left[\tau_{1r};\tau_{2r}\right]\right\}, \xi(\mu)) \tag{6}$$

где $\tau_{ir} = \tau_i\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum\limits_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right)$, $i = 1,2$.

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (6) справедлива следующая оценка

$$\left|\vartheta_0(k,\omega)\right| \le \gamma < \infty. \tag{7}$$

В силу условий теоремы, с учетом (7) из (6) для первого приближения имеем оценку

$$\left|\vartheta_1(k,\omega) - \vartheta_0(k,\omega)\right| \le \gamma + M(\omega)\left(k_1 - k_0 - 1\right). \tag{8}$$

Теперь для произвольного натурального числа $r > 1$, в силу условий теоремы, из (6) по индукции получаем [19]

$$\left|\vartheta_{r+1}(k,\omega) - \vartheta_r(k,\omega)\right| \le$$

$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\middle|\max\left\{\vartheta_r(\theta,\omega)\middle|\theta \in \left[\tau_{1r};\tau_{2r}\right]\right\} -\right.$$

$$\left. -\max\left\{\vartheta_{r-1}(\theta,\omega)\middle|\theta \in \left[\tau_{1r-1};\tau_{2r-1}\right]\right\}\middle| : k \in D_k\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\| \vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$

$$+ \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\| \max\left\{\vartheta_{r-1}(\theta,\omega)\middle|\theta \in \left[\tau_{1r};\tau_{2r}\right]\right\} -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\max\left\{\vartheta_{r-1}(\theta,\omega)\middle|\theta \in \left[\tau_{1r-1};\tau_{2r-1}\right]\right\}\right\| : k \in D_k\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\| \vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$

$$+ \max\left\{L_3(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\sum_{i=1}^{2}\left|\tau_i\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_i\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right)\right| : k \in D_k\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\|\vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$

$$+ \max\left\{L_3(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\sum_{i=1}^{2} L_{i2}(\omega) \times\right.$$

$$\left. \times\left|\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega) - \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right| : k \in D_k\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left(E+L_3(\omega)\sum_{i=1}^{2}L_{i2}(\omega)\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1}H_i(\mu,\nu)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left\|\vartheta_r(\mu,\omega)-\vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\|: k\in D_k\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\left\|\vartheta_{r+1}(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|\le$$
$$\le\rho_{\max}\cdot\left\|\vartheta_r(k,\omega)-\vartheta_{r-1}(k,\omega)\right\| \qquad (9)$$
$$<\left\|\vartheta_r(k,\omega)-\vartheta_{r-1}(k,\omega)\right\|.$$

Из (8) и (9) следует, что оператор в правой части (3) является сжимающим. Следовательно, система суммарных уравнений (3) при фиксированных значениях управления $u(k,\omega)$ имеет единственное решение на множестве D_k. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда при фиксированных значениях управления $u(k,\omega)$ справедлива оценка

$$\left\|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|\le\frac{\lambda_{\max}}{1-\rho_{\max}}, \qquad (10)$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение случайной матрицы

$$\left[Q(\omega)\right]^r\left[\gamma+M(\omega)\left(k_1-k_0-1\right)\right],$$
$$\lambda_{\max}\xrightarrow{r\to\infty}0.$$

Доказательство. Для разности $\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)$ с учетом (8) и (9) имеем оценку

$$\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|\le\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|\le$$
$$\le\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_{r+1}(k,\omega)\right|+\left|\vartheta_{r+1}(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|\le$$
$$\le Q(\omega)\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|+$$
$$+\left[Q(\omega)\right]^r\left[\gamma+M(\omega)\left(k_1-k_0-1\right)\right].$$

Отсюда имеем (10). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда имеет место следующее соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|=0. \qquad (11)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

С учетом последовательностей функций (6) функционал (5) запишем в виде

$$J_r[u]=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}g\left(k,u(k,\omega),\sum_{\mu=k_0}^{k-1}\Phi(k,\mu)\vartheta_r(\mu,\omega)\right). \qquad (12)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если

1) $g(k,u,\vartheta)\in Lip\left(L_4(\omega)_{|\vartheta}\right)$, где $0<L_4(\omega)$ – случайная постоянная матрица;

2) $0<\varepsilon=\max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1}\left|\Phi(k,\mu)\right|:k\in D_k\right\}<\infty$;

то имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\left|J[u]-J_r[u]\right|=0. \qquad (13)$$

Доказательство. В силу условий теоремы, с учетом (10) из (5) и (12) получаем следующую оценку

$$\left|J[u]-J_r[u]\right|\le$$
$$\le L_4(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1}\Phi(k,\mu)\left|\vartheta(\mu,\omega)-\vartheta_r(\mu,\omega)\right|\le$$
$$\le\frac{\left[Q(\omega)\right]^r\varepsilon L_4(\omega)\left[\gamma+M(\omega)\left(k_1-k_0-1\right)\right]}{E-Q(\omega)}\times$$
$$\times\frac{\left(k_1-k_0-1\right)}{E-Q(\omega)}.$$

Из последней оценки переходом к пределу при $r\to\infty$ следует справедливость (13). Теорема доказана.

Пусть $u^*(k,\omega)$ оптимальное допустимое управление в задаче 2. Предполагается, что для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\left|u^*(k,\omega)-u_r^*(k,\omega)\right|\le\delta_r(k,\omega),\qquad \lim_{r\to\infty}\delta_r(k,\omega)=0. \qquad (14)$$

Из (1), (5), (6) и (12) приходим к следующим соотношениям:

$$\vartheta^*(k,\omega)=\sum_{\mu=k_0}^{k-1}K(k,\mu,u^*(\mu,\omega),\ \max\left\{\vartheta^*(\theta,\omega)\,\middle|\,\theta\in\left[\tau_1^*;\tau_2^*\right]\right\},\xi(\mu)), \qquad (15)$$

где $\tau_i^*=\tau_i\left(\mu,u^*(\mu,\omega),\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1}H_i(\mu,\nu)\vartheta^*(\nu,\omega)\right)$, $i=1,2$,

$$\begin{cases}\vartheta_0^*(k,\omega)=\varphi\left(k_0,\omega\right),\ r=0,1,2,\ldots,\\ \vartheta_{r+1}^*(k,\omega)=\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1}K(k,\mu,u^*(\mu,\omega),\\ \qquad\max\left\{\vartheta_r^*(\theta,\omega)\,\middle|\,\theta\in\left[\tau_{1r}^*;\tau_{2r}^*\right]\right\},\ \xi(\mu)),\end{cases} \qquad (16)$$

где $\tau_{ir}^* = \tau_i\left(\mu, u^*(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H_i(\mu,\nu)\vartheta_r^*(\nu,\omega)\right)$, $i = 1, 2$,

$$J[u^*] = \\ = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} g\left(k, u^*(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} \Phi(k,\mu)\vartheta^*(\mu,\omega)\right), \quad (17)$$

$$J_r[u^*] = \\ = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} g\left(k, u^*(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} \Phi(k,\mu)\vartheta_r^*(\mu,\omega)\right), \quad (18)$$

$$J_r[u_r^*] = \\ = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} g\left(k, u_r^*(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} \Phi(k,\mu)\vartheta_r^*(\mu,\omega)\right). \quad (19)$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Если

$$g(k, u^*, \vartheta^*, \omega) \in Lip\left(L_4(\omega)\big|_{u^*,\vartheta^*}\right)$$

и выполняется условие (14), то имеет место следующее соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \left| J[u^*] - J_r[u_r^*] \right| = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Формулы (11) и (13) в случае (15)–(18) выглядят так

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \vartheta^*(k,\omega) - \vartheta_r^*(k,\omega) \right\| = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{r\to\infty} \left| J[u^*] - J_r[u^*] \right| = 0. \quad (22)$$

Рассмотрим оценку разности $J[u_r^*] - J_r[u_r^*]$. В силу условия теоремы, из (18) и (19) получаем

$$\left| J[u_r^*] - J_r[u_r^*] \right| \le \\ \le L_4(\omega)\Big(\left\| u^*(k,\omega) - u_r^*(k,\omega) \right\| + \\ + \left\| \vartheta^*(k,\omega) - \vartheta_r^*(k,\omega) \right\| \Big). \quad (23)$$

С учетом (14) и (21) из (23) получаем, что справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \left| J[u_r^*] - J_r[u_r^*] \right| = 0. \quad (24)$$

Так как

$$\left| J[u^*] - J_r[u_r^*] \right| \le \left| J[u^*] - J_r[u^*] \right| + \\ + \left| J[u_r^*] - J_r[u_r^*] \right|,$$

то, переходя к пределу при $r \to \infty$, с учетом (22) и (24) получаем (20). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми интегральными уравнениями с нелинейными максимумами, очень сложно. Поэтому на практике используются приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одной нелинейной случайной системы интегральных уравнений Вольтерра с нелинейными максимумами и с нелинейным критерием оптимальности. При этом используются итерации (16) и (19). Доказывается сходимость последовательности функционала качества (19). В качества примера для интегрального уравнения с максимумами (1) составляется математическая модель экономики производственного предприятия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример математической модели. Рассмотрим производственный процесс одной компании в условиях рыночных отношений. Пусть компания производит n видов продукции и $u_i(t)$ – объем i-й продукции компании, реализованной к моменту времени t, $i = \overline{1,n}$. Её доход от реализации i-й продукции к данному моменту времени t составляет

$$y_i(t) = p_i(t)u_i(t),\ i = \overline{1,n}, \quad (25)$$

где $p_i(t)$ – рыночная цена реализации i-й продукции производимой компанией в момент времени t.

Из (25) видно, что если цена реализации продукции возрастает, то и доход предприятия тоже возрастает к данному моменту времени t. Но, повышение цены может отрицательно отражаться в скорости дальнейшей реализации товара, производимой компанией.

Путем дифференцирования соотношения (25) по времени t находим скорость реализации i-й продукции

$$y_i'(t) = p_i'(t)u_i(t) + p_i(t)u_i'(t),\ i = \overline{1,n}, \quad (26)$$

где $p_i'(t)$ – тенденция формирования ценообразования i-й продукции.

Нас интересует случай, когда $y_i'(t) > 0,$ то есть с течением времени все больше и больше продукции реализуются. Из формулы (26) видно, что это зависит от тенденции формирования ценообразования $p_i'(t)$ и скорости выпуска продукции $u_i'(t)$. Но, $p_i'(t)$ определяется из равновесия спроса и предложения на i-ю продукцию на рынке к моменту времени t.

Скорость выпуска i-й продукции определяется из следующего соотношения

$$u_i'(t) = \alpha_i(t)\, z_i\left(t - \tau_i(t)\right), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (27)$$

где $z_i(t)$ – функция инвестиций, направленных на расширение производства i-й продукции, $\alpha_i(t)$ – коэффициент эффективности использования инвестиций, $0 < \alpha_i(t) < 1,$ $0 < t_0 < \tau_i(t) < t.$ Если функция запаздывания $\tau_i(t)$ меньше будет, то это способствует тому, что скорость выпуска i-й продукции больше становится. Если $\tau_i(t) = t,$ то процесс инвестирования будет останавливаться. Очевидно, что запаздывание $\tau_i(t)$ зависит от объема продукций $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\right)$ и скорости реализации производимых компанией продукций $y'(t) = \left(y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t)\right)$ к моменту времени $t,$ то есть

$$\tau_i(t) = \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right), \; i = \overline{1,n}.$$

Тогда формула (27) приобретает вид

$$u_i'(t) = \alpha_i(t)\, z_i\left(t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right)\right), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (28)$$

Величина инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода

$$z_i(t) = q_i(t)\, y_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (29)$$

где $q_i(t)$ – доля прибыли в составе дохода от реализации i-й продукции, $0 < q_i(t) < 1.$ Величина $q_i(t)$ характеризует рентабельность производства i-й продукции.

Подставляя (29) в (28), получаем

$$\begin{gathered} u_i'(t) = \alpha_i(t)\, q_i\left(t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right)\right) \times \\ \times y_i\left(t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right)\right), \quad i = \overline{1,n}. \end{gathered} \qquad (30)$$

Из формулы (30) следует, что величина скорости выпуска i-й продукции $u_i'(t)$ взаимосвязана с величиной рентабельности производства этой продукции. Запаздывание τ_i характеризуется величиной продукций, накопленных в складах компании, и скоростью выпуска продукций к данному моменту времени t.

Подстановка (30) в (26) дает нам следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} y_i'(t) = p_i'(t) u_i(t) + \\ + p_i(t)\alpha_i(t) q_i\left(t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right)\right) \times \\ \times y_i\left(t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right)\right), \end{gathered} \qquad (31)$$

где $0 < q_i(t) < 1$ – известные функции, $y_i(t)$ – неизвестная функция, $u_i(t)$ – функция управления, $t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right) \geq t_0 - \eta,$ $0 < \eta = const,$ $i = \overline{1,n}.$

Рассмотрим вопрос о максимизации дохода предприятия от реализации его продукции на отрезке времени $\left[t - \tau\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right].$ В этом случае дифференциальное уравнение (31) принимает вид

$$\begin{gathered} y_i'(t) = p_i'(t) u_i(t) + \beta_i(t) \times \\ \times \max\left\{q_i(\theta) : \theta \in \left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]\right\} \times \\ \times \max\left\{y_i(\theta) : \theta \in \left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]\right\}, \\ i = \overline{1,n}, \end{gathered} \qquad (32)$$

где $\beta_i(t) = p_i(t)\alpha_i(t),$ $0 < \beta_i(t) < 1.$

В системе дифференциальных уравнений (32) учтем фактор внешнего воздействия $f_i(t).$ Отметим, что фактор внешнего воздействия чаще всего зависит от дохода самой компании. Если учтем случайных внешних факторов, то система дифференциальных уравнений (32) приобретает вид

$$\begin{gathered} y_i'(t) = p_i'(t) u_i(t) + \beta_i(t) \times \\ \times \max\left\{q_i(\theta) : \theta \in \left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]\right\} \times \\ \times \max\left\{y_i(\theta) : \theta \in \left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]\right\} + \\ + f_i(t, y(t), \xi(t)), \; i = \overline{1,n}, \end{gathered} \qquad (33)$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в R^n.

Систему дифференциальных уравнений (33) будем рассматривать при начальном условии $y_i'(t) = \varphi_i(t),$ $t \in \left[-\eta; t_0\right],$ $0 < \eta = const,$ $i = \overline{1,n}.$

На большом временном отрезке $\left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]$ максимизировать доход компании очень сложно. Поэтому этот вопрос решается путем минимизации функции запаздывания $\tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right),$ управляя объемом продукции на отрезке времени D_T.

Примем обозначение $y_i'(t) = \vartheta_i(t)$. Тогда с учетом начального условия имеем

$$y_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vartheta_i(s)ds, \ i = \overline{1,n}.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (33) принимает вид системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\vartheta_i(t) = p_i'(t)u_i(t) + \beta_i(t) \times$$
$$\times \max\left\{q_i(\theta) : \theta \in \left[t - \tau_i\left(t, u(t), y'(t)\right); t\right]\right\} \times$$
$$\times \left[\varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \max\{\vartheta_i(\theta) :\right.$$
$$\left.\theta \in \left[s - \tau_i\left(s, u(s), \vartheta(s)\right); s\right]\} ds\right] +$$
$$+ f_i\left(t, \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vartheta_i(s)ds, \xi(t)\right)$$

с условием $\vartheta_i(t) = \varphi_i(t), \ t \in \left[-\eta; t_0\right], \ i = \overline{1,n}.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М. : Наука, 1982. – 432 с.

3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М. : Наука, 1978. – 464 с.

4. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Дисс. ... д. ф.-м. н.: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 2003. – 224 с.

5. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М. : Мир, 1972. – 412 с.

6. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

7. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М. : Высшая школа, 2009. – 680 с.

8. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

9. *Кротов В. Ф, Моржин О. В., Трушкова Е. А.* Разрывные решения задач оптимального управления. Итерационный метод оптимизации // Автомат. и телемех. – 2013. – № 12. – С. 31–55.

10. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автомат. и телемех. – 2013. – № 12. – С. 56–103.

11. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М. : Физматлит, 2000. – 160 с.

12. *Тятюшкин А. И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск : СО «Наука», 1992. – 193 с.

13. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М. : Наука, 1978. – 488 с.

14. *Юлдашев Т. К.* Нелинейная точечная задача оптимального управления для псевдопараболического уравнения // // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 3. – С. 9–16.

15. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение точечной подвижной задачи оптимального управления для нелинейного гиперболического уравнения // Моделирование и анализ информационных систем. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 106–120.

16. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях // Проблемы управления. – 2014. – № 4. – С. 2–8.

17. *Юлдашев Т. К.* О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка // Матем. теория игр и её прилож. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 105–119.

18. *Юлдашев Т. К.* Периодические случайные процессы в нелинейных динамических

системах с максимумами // Сб. «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения». Ташкент: Инст. математики АН Респ. Узб., 2005. – С. 201–203.

19. *Юлдашев Т. К.* Развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами / Дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальные управления. Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 1993. – 121 с.

Юлдашев Турсун Камалдинович – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики. Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия.
Тел.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru

Yuldashev Tursun Kamaldinovich – Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department Siberian State Aerospace University.
Tel.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru