УДК 519.81

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ТЕРСТОУНА-МОСТЕЛЛЕРА В ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

**Ю. В. Бугаев, И. Ю. Шурупова, М. К. Бабаян**

*Воронежский государственный университет инженерных технологий*

**Поступила в редакцию 14.10.2014 г.**

**Аннотация.** Предлагается теоретически обоснованный подход к применению процедуры коллективного выбора Терстоуна-Мостеллера в методе экстраполяции экспертных оценок при экспертном ранжировании обучающей выборки на разностно-классификационной шкале.

**Ключевые слова:** альтернатива, профиль экспертных упорядочений, метод экстраполяции экспертных оценок, разностно-классификационная шкала, коллективный выбор.

**Annotation.** Proposes an approach of theoretically substantiated to the application procedure of collective choice Thurstone-Mosteller in the method of extrapolation of expert estimations with expert rankings of training sample to difference-classification scale.

**Keywords:** alternative, a profile of expert orderings, a method of extrapolation of expert estimations, a difference-classification scale, a collective choice.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методы экспертных оценок (ЭО) – это способы организации работы со специалистами-экспертами и обработки их мнений, выраженных в количественной и/или качественной форме с целью подготовки информации для лица, принимающего решение (ЛПР). При анализе мнений экспертов применяются разнообразные статистические методы, одной из важнейших целей которых является преобразование мнения отдельных членов экспертной группы, вообще говоря, несовпадающие, в некий единый коллективный выбор. В работе [1] было проведено сравнение четырёх известных процедур построения коллективных экспертных оценок по их вероятностным характеристикам:

1) процедура Борда [2];

2) процедура Терстоуна-Мостеллера [3];

3) метод экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО) [4];

4) МЭЭО, использующий метод максимального правдоподобия (МЭЭО-ММП) [5].



Каждая процедура позволяет получить численные оценки полезностей сравниваемых альтернатив, используя результаты их экспертного сравнения на порядковой шкале.

Анализ показал, что процедуры 2) и 4) по большинству характеристик превосходят остальные и показывают примерно одинаковые результаты. Преимущество МЭЭО состоит в том, что помимо порядковой шкалы процедура МЭЭО-ММП допускает также использование более сильной шкалы [6, 7], которую авторы назвали *лингвистической*. (Поскольку это название может навести на неверную мысль об использовании лингвистической переменной Л. А. Заде, то в дальнейшем будем называть её *разностно-классификационной* или *РК-шкалой*). Её применение позволяет значительно повысить точность статистических оценок и состоит в следующем.

Пусть для пары альтернатив $(A_1, A_2)$ эксперт способен оценить величину разности в их полезности. На основании такой оценки пара должна быть отнесена к одному из классов $Q_0, Q_1, \dots, Q_s$, каждый из которых характеризуется определенной степенью различия в полезности $A_1$ и $A_2$. Например, принадлежность $\left(A_1, A_2\right) \in Q_0$ будем соотносить с ситуацией неразличимости по полезности $A_1$ и $A_2$. Следующий класс $Q_1$ соответствует уровню «малое» превосходство $A_1$ над $A_2$ и т. д. по порядку возрастания силы превосходства. Более подробное описание использования РК-шкалы в процедуре МЭЭО-ММП приведено в [6, 7].

Поскольку с вычислительной точки зрения процедура Терстоуна-Мостеллера значительно проще, чем МЭЭО-ММП, то представляется важным разработка для неё способа использования РК-шкалы.

Напомним, что процедура Терстоуна-Мостеллера в традиционном виде [11] представляет собой частный случай линейной модели парных сравнений. В рамках этой модели каждому из $N$ экспертов предъявляются пары альтернатив $(A_i, A_j)$ из исходной выборки, состоящей из $m$ вариантов $(1 \le i < j \le m)$. Эксперт для каждой пары должен определить лучшую, по его мнению, альтернативу: либо $A_i \succ A_j$, либо $A_j \succ A_i$. Предполагается, что каждая альтернатива $A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, обладает «истинной полезностью» $w_i$, а эксперт способен дать лишь некоторую её оценку $y_i$, которая, вообще говоря, отличается от $w_i$ и принимается за случайную величину. Таким образом, по мнению эксперта, $A_i$ превосходит $A_j$ ($A_i \succ A_j$) в том случае, если $y_i > y_j$, ($i, j = 1, \ldots, m$). Также имеет место допущение, что вероятность предпочтения $P(A_i \succ A_j) = \pi_{ij} = P(y_i - y_j > 0)$ зависит от численного значения разности $y_i - y_j$. Набор $\pi_{ij}$, удовлетворяет линейной модели, если существует набор действительных чисел $w_i$, таких, что $\pi_{ij} = H(w_i - w_j)$, где $H(x)$ – симметричная относительно нуля функция распределения непрерывной случайной величины, монотонно возрастающая от $H(-\infty) = 0$ до $H(+\infty) = 1$ и $H(-x) = 1 - H(x)$.

Процедура Терстоуна-Мостеллера основана на допущении, что экспертная оценка полезности $i$-ой альтернативы имеет нормальное распределение $y_i \sim N(w_i, \sigma^2)$.

Метод поиска оценок для «истинных полезностей» $w_i$, предложенный Ноезе, использует дополнительное условие: $\sum_{i=1}^{m} w_i = 0$ и состоит в следующем:

1) определяются экспериментальные вероятности парных предпочтений по следующей формуле:

$$p_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{N},$$

где $\alpha_{ij}$ – число случаев, когда эксперт предпочел $A_i \succ A_j$, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = N$ ($i, j = \overline{1,m}$, $i \ne j$).

2) значения вероятностей $p_{ij} = 0$ и $p_{ij} = 1$ заменяются на $p_{ij} = 1/(2n)$ и $p_{ij} = 1 - 1/(2n)$ соответственно, и вычисляются

$$d_{ij} = H^{-1}(p_{ij}),$$

где $H^{-1}(p_{ij})$ – функция, обратная функции нормального распределения.

3) по методу наименьших квадратов производится минимизация по $w_i$, ($i = \overline{1,m}$) величины

$$S = \sum_{i \ne j}^{t} \left[ d_{ij} - (w_i - w_j) \right]^2 \text{ при условии, что}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 0. \qquad (1)$$

Проблема применения разностно-классификационной шкалы состоит в том, что в процедуре Терстоуна-Мостеллера экспериментальная вероятность выполнения каждого предпочтения вычисляется по частоте его встречаемости в экспертных упорядочениях. При ранжировании на РК-шкале предпочтения имеют более сложную структуру, чем на порядковой шкале и, вследствие этого, они более разнообразны. Поэтому некоторые из них встречаются в явном виде в одних упорядочениях и не встречаются в других. Однако их выполнение может следовать из других явно присутствующих предпочтений.

**Пример 1.** Пусть два эксперта предложили следующие варианты упорядочения:

1) $(A_1, A_2) \in Q_1$; $(A_2, A_3) \in Q_1$; $(A_3, A_4) \in Q_1$.

2) $(A_1, A_2) \in Q_1$; $(A_2, A_3) \in Q_0$; $(A_3, A_4) \in Q_1$.

В соответствии с принципом применения РК-шкалы [7] этим упорядочениям будут соответствовать следующие системы неравенств:

$$1) \begin{cases} w_1 - w_2 \ge 0 \\ w_2 - w_3 \ge 0. \\ w_3 - w_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} w_1 - w_2 \ge 0 \\ w_3 - w_4 \ge 0 \\ w_1 - w_2 \ge w_2 - w_3 \\ w_3 - w_2 \le w_1 - w_2 \\ w_3 - w_4 \ge w_2 - w_3 \\ w_3 - w_2 \le w_3 - w_4 \end{cases},$$

где $w_i$ – полезность альтернативы $A_i$. Теперь надо подобрать такие значения $w_i$, при которых теоретические вероятности выполнения этих неравенств будут близки к экспертным значениям.

После преобразования всех неравенств к виду $\ldots \ge 0$ им будут соответствовать системы неравенств $C^{(r)}w \ge 0$, где $C^{(r)}$, $r = 1,2$ – структурные матрицы:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что строки матрицы $C^{(2)}$ с номерами 1 и 2 есть в обеих матрицах, значит, оцененная вероятность каждого из неравенств $w_1 - w_2 \ge 0$ и $w_3 - w_4 \ge 0$ будет равна 1. Но, например, строка номер 4 матрицы $C^{(2)}$, соответствующая неравенству $w_1 - w_3 \ge 0$, отсутствует в матрице $C^{(1)}$. Следовательно, вероятность выполнения соответствующего неравенства формально должна быть равна 0.5. Однако неравенство $w_1 - w_3 \ge 0$ является следствием двух неравенств $w_1 - w_2 \ge 0$ и $w_2 - w_3 \ge 0$ из первого упорядочения, т.к. получается из них сложением. Поэтому строка номер 4 из $C^{(2)}$ неявно присутствует и в $C^{(1)}$, т. е. экспериментальная вероятность выполнения этого неравенства на самом деле равна 1.

Следовательно, для корректного применения процедуры Терстоуна-Мостеллера при использовании РК-шкалы, необходимо разработать способ учёта подобных «скрытых» результатов экспертного упорядочения.

Пусть имеем систему линейных однородных неравенств

$$(a^{(k)})^T x \ge 0, k = 1,\ldots,m, \qquad (2)$$

и линейное однородное неравенство

$$b^T x \ge 0, \quad (x,\, b,\, a^{(k)} \in E^n) \qquad (3)$$

**Определение 1.** Будем говорить, что неравенство (3) следует из системы (2), если любое решение $x$ системы (2) удовлетворяет также и неравенству (3).

**Теорема 1.** Для того чтобы неравенство (3) следовало из системы (2) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $\tau_k \ge 0$, что

$$b = \sum_{k=1}^{m} \tau_k a^{(k)}, \qquad (4)$$

Достаточность с очевидностью вытекает из правила сложения неравенств одного типа.

Для доказательства необходимости воспользуемся следующими сведениями из [8].

**Определение 2.** Пусть $K$ – выпуклый конус. Множество векторов

$$K^* = \left\{ b \,|\, x \in K \Rightarrow b^T x \ge 0 \right\}$$

называется конусом, сопряжённым с $K$.

**Теорема** (Теорема 4.9 [8, стр. 47]). Если многогранный конус $K$ задан системой линейных неравенств (2), то сопряжённый ему конус $K^*$ состоит из элементов $b$, определяемых выражением (4).

**Доказательство необходимости в теореме 1.** Пусть для любого $x \in E^n$ из (1) следует (2). Покажем, что существуют соответствующие числа $\tau_k \ge 0$.

Система неравенств (2) определяет выпуклый конус $K$. Тогда по определению $b \in K^*$. Отсюда, по теореме 4.9, имеет место представление (4), что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Для $n$-мерной случайной величины $\xi$, нормально распределённой с параметрами $(w, \sigma^2 I)$, вероятность выполнения неравенства $a^T \xi \ge 0$, $a \in E^n$ равна $U\left(\dfrac{a^T w}{\sigma \| a \|}\right)$, где $U(x)$ – интеграл вероятности, $\|z\|$ – евклидова норма вектора $z$.

**Доказательство.** Сделаем замену переменных:

$$\eta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \xi \equiv A\xi.$$

По известной теореме [9] в результате такой замены получим случайный вектор $\eta$, имеющий нормальное распределение с параметрами $(Aw, \sigma^2 AA^T)$. Тогда вероятность неравенства $a^T \xi \geq 0$ будет, очевидно, равна вероятности $\eta_1 \geq 0$, которая вычисляется по формуле

$$P(\eta_1 \geq 0) = \int_0^{+\infty} f_1(t)dt,$$

где $f_1(t)$ – частная плотность распределения случайной величины $\eta_1$, которая, согласно той же теореме [9], является плотностью нормальной случайной величины с параметрами $(a^T w, \sigma^2 a^T a)$. Поскольку $\sigma^2 a^T a = (\sigma \cdot \|a\|)^2$, то

$$P(\eta_1 \geq 0) = P(a^T \xi \geq 0) = U\left(\frac{a^T w}{\sigma \| a\|}\right), \quad (5)$$

что и требовалось доказать.

## 2. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Из доказанных выше утверждений можно сделать следующие выводы.

1. Пусть имеем систему неравенств вида (1). Тогда для проверки того, следует ли какое-либо неравенство вида (3) из этой системы, надо проверить существование таких чисел $\tau_k \geq 0$, при которых выполняется равенство (4). Это можно сделать, например, посредством поиска допустимого решения следующей задачи линейного программирования (ЛП): $c^T \tau \to \min$ при условии $b = \sum_{k=1}^{m} \tau_k a^{(k)}$, $\tau_k \geq 0$, где $c \in E^n$ – произвольный вектор. Поскольку при проведении экспертного ранжирования объём обучающей выборки невелик, не более 9, то соответствующая задача ЛП имеет небольшую размерность и её решение не представляет сложности.

2. При использовании РК-шкалы экспертные предпочтения определяются выполнением соответствующих неравенств из системы $C^{(r)} w \geq 0$, а для определения теоретической вероятности выполнения этих неравенств можно воспользоваться формулой (5).

3. При определении вероятностей $p_{ij}$ экспертных предпочтений на порядковой шкале всегда можно выяснить следует ли из предпочтения эксперта определённое неравенство или нет. Например, если из двух экспертов один указал предпочтение $A_1 \succ A_2$, а второй – нет, это означает, что, по мнению второго, выполняется противоположное неравенство $A_2 \succ A_1$. При использовании же РК-шкалы такое правило «исключённого третьего» не действует.

Так, в примере 1 строка номер 6 структурной матрицы второго эксперта соответствует неравенству $w_2 - w_4 \geq 0$. У первого эксперта такое неравенство явно не присутствует, но оно следует из имеющихся неравенств $w_2 - w_3 \geq 0$ и $w_3 - w_4 \geq 0$. Следовательно, оба эксперта считают верным предпочтение $A_2 \succ A_4$. Что же касается неравенства $w_1 - 2w_2 + w_3 \geq 0$, присутствующего у второго эксперта, то невозможно определить – согласен с ним первый эксперт или отвергает его, т. к. из имеющихся предпочтений не следует ни это неравенство, ни противоположное.

Отсюда имеем следующий алгоритм.

1) Генерируем все возможные неравенства вида

$$(w_i - w_j) \geq (w_k - w_p) \text{ и } \left| w_i - w_j \right| \leq (w_k - w_p),$$
$$(i < j; k < p; (i, j) \neq (k, p));$$

обозначим полученную матрицу коэффициентов $T$.

2) Строим матрицы $C^{(r)}$ – матрицы предпочтений каждого $r$-го эксперта.

3) Для каждой $u$-й строки $T_{<u>}$ матрицы $T$ и каждой матрицы $C^{(r)}$ проверяем, существуют ли представления

$$T_{<u>} = \tau (C^{(r)})^T, \tau_k \geq 0 \quad (6)$$

и

$$-T_{<u>} = \tau (C^{(r)})^T, \tau_k \geq 0. \quad (7)$$

Если существует представление (6), то увеличиваем на 1 счетчик $SH_u$ строки $T_{<u>}$ и счётчик $SP_u$ числа выполнений неравенств с этой строкой. Если существует представление (7), то увеличиваем на 1 только $SH_u$. Если не выполняется ни (6) ни (7), то $u$-ю строчку исключаем из рассмотрения, поскольку данные о ней недостоверны.

4) Вероятность выполнения неравенства, реализованного каждой $u$-й строкой матрицы $T$, определяется как $P_u = SP_u / SH_u$.

5) Подставляем найденные экспертные вероятности, для которых $SH_u \neq 0$ в целевую функцию и минимизируем её.

Метод, предложенный Л. Терстоуном, основан на линеаризации каждой разности в скобках выражения

$$G = \sum_{i \neq j, j=1}^{m} \left[ p_{ij} - U\left( \frac{w_i - w_j}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \qquad (8)$$

и приведении целевой функции (8) к виду (1). Как известно [10], подобный подход приводит к значительной потере точности. Однако не стоит забывать, что статья [11] с описанием метода увидела свет в 1927 году во времена отсутствия даже примитивных компьютеров, и предложенный способ оптимизации был вынужденной мерой. В то же время, как показывают численные эксперименты, даже при использовании современных математических пакетов не всегда удаётся найти минимум функции (8) ввиду её плохой обусловленности при наличии $p_{ij} = 1$ ( $p_{ij} = 0$ ). Поэтому предлагается воспользоваться взвешенным МНК, описанным в [10].

Суть метода состоит в использовании специально подобранных весовых коэффициентов. Предположим, что уравнение, связывающее вход и выход исследуемого объекта, нелинейно по параметрам, т. е. имеет вид:

$$y = F(x, b). \qquad (9)$$

Решением (вектором коэффициентов) задачи среднеквадратичной аппроксимации при нелинейной модели (9) будем считать то значение вектора $b \in E^k$, для которого сумма квадратов отклонений

$$\Psi(b) = \sum (F(x_i, b) - y_i)^2$$

принимает минимальное значение. В некоторых случаях уравнение (9) можно преобразовать к линейному виду:

$$g(y) = g(F(x, b)) = b_1 f_1(x) + \ldots + b_k f_k(x). \quad (10)$$

Введя новую переменную $z = g(y)$, получаем обычный МНК.

При наличии ошибок в исходных данных преобразование (10) обычно приводит к потере точности, т. к. минимизация проводится уже преобразованной суммы квадратов, чьё оптимальное значение не соответствует минимуму $\Psi(b)$. Расхождение между истинным значением функции и её аппроксимацией, полученной в результате линеаризации, можно значительно уменьшить с помощью введения соответствующих весов $\rho_i$ для экспериментальных точек, т. е. минимизировать сумму:

$$\tilde{\Psi}(b) = \sum \rho_i^2 (g(F(x_i, b)) - g(y_i))^2. \quad (11)$$

где $\rho_i = \dfrac{1}{g'(y_i)}$ [10].

Для модели Терстоуна-Мостеллера $y = p$, $g(p_{ij}) = H^{-1}(p_{ij})$. Выражение для $g'(y)$ найдём по известной формуле производной обратной функции.

Пусть $f(x) = U\left(\dfrac{x}{s}\right)$ и $g(y) = f^{-1}(y)$. Имеем $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/s} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, $f'(x) = \dfrac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2}$. Тогда $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ в точке $y = f(x)$. Найдём соответствующее значение $x = f^{-1}(y) = U^{-1}(y) \cdot s$.

Отсюда $g'(y) = s\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{2}\left(U^{-1}(y)\right)^2}$, где $s = \sqrt{2}$. Значение $t = U^{-1}(y)$ можно вычислить с помощью соответствующей встроенной функции, имеющейся во многих математических пакетах. Например, в MathCad можно воспользоваться оператором $t := qnorm\ (y, 0, 1)$.

Соответствующие значения подставляем в формулу (11) и производим минимизацию полученного выражения.

Численные эксперименты показали, что ещё более точный результат можно получить, если воспользоваться нелинейным МНК, а решение, найденное посредством взвешенного МНК использовать в качестве начального приближения.

**Пример 2.** Пусть имеем 4 альтернативы и 10 экспертов. Пять из них упорядочили альтернативы на РК-шкале в соответствии с первым вариантом упорядочения примера 1, а пять – в соответствии со вторым вариантом. Матрица $T$, соответствующая возможным исходам ранжирования четырёх альтернатив на РК-шкале имеет вид

$$T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверка соотношений (6) и (7) для строк матрицы $T$ показала, что с вероятностями 1 выполняются неравенства, соответствующие строкам 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 17, 18, 21.

В результате применения метода линеаризации были получены следующие оценки полезностей (1.5263; 0; 0; – 1.5263). Рассчитанные при этих оценках вероятности оказались равными (0.86; 0.86; 0.985; 0.86; 0.86; 0.894; 0.969; 0.937; 0.969; 0.937; 0.969; 0.969; 0.894). Эти значения далеки как от исходных значений 1, так и от 0.95, полученных в процессе линеаризации.

При использовании нелинейного МНК, в котором начальные приближения находились с использованием взвешенного МНК, получились следующие оценки полезностей (4.8193; 0,1009; – 0,4246; –4.4956) и расчётные вероятности (1; 1; 1; 0.999; 0.998; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1), что хорошо коррелирует с экспертными вероятностями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бугаев Ю. В.* Вероятностный метод анализа процедур построения коллективных экспертных оценок / Ю. В. Бугаев, М. С. Миронова, Б. Е. Никитин // Вестник ВГУ. Серия «Системный анализ и информационные технологии». 2011, № 2. С. 130–135.

2. *Вольский В. И.* Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа / В. И. Вольский, З. М. Лезина. – М. : Наука, 1991. – 192 с.

3. *Шмерлинг Д. С.* Экспертные оценки. Методы и применение. (Обзор) / Д. С. Шмерлинг, С. А. Дубровский, Т. Д. Аржанова, А. А. Френкель // Статистические методы анализа экспертных оценок. Ученые записки по статистике, т. 29. – М. : Наука, 1977. – 384 с. / С. 290–382.

4. *Сысоев В. В.* Структурные и алгоритмические модели автоматизированного проектирования производства изделий электронной техники / В. В. Сысоев. – Воронеж : ВТИ, 1993. – 207 с.

5. *Бугаев Ю. В.* Экстраполяция экспертных оценок в оптимизации технологических систем / Ю. В. Бугаев // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2003. – № 3. – С. 90–96.

6. *Никитин Б. Е.* К вопросу о выявлении предпочтений ЛПР на лингвистической шкале / Б. Е. Никитин, Ю. В. Бугаев // Теория конфликта и ее приложения. I Всерос. науч.-техн. конф. Воронеж : ВГТА, 2000. – С. 23–24.

7. *Бугаев Ю. В.* Система поддержки принятия решений на основе экстраполяции экспертных оценок методом максимального правдоподобия / Ю. В. Бугаев, М. С. Миронова, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский // Вестник Брянского государственного технического университета. Брянск : 2010, № 1. – С. 84–90.

8. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М. : Наука, 1980. – 320 с.

9. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон / Пер. с англ. М. : Физматгиз, 1963. – 500 с.

10. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии / Е. З. Демиденко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

11. *Thurstone L. L.* A law of comparative judgment / L. L. Thurstone. // «Psychol. Rev.». – 1927. – v. 34. – P. 273–286.

**Бугаев Юрий Владимирович** – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры информационных технологий моделирования и управления Воронежского государственного университета инженерных технологий.
Тел.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mmtc@vgta.vrn.ru

**Шурупова Ирина Юрьевна** – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий моделирования и управления Воронежского государственного университета инженерных технологий.
Тел.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mmtc@vgta.vrn.ru

**Бабаян Михаил Кароевич** – аспирант кафедры информационных технологий моделирования и управления Воронежского государственного университета инженерных технологий.
Тел.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mixabmk@gmail.com

**Bugaev Yury Vladimirovich** – doctor of physical and mathematical sciences, professor of information technologies of modelling and management department, Voronezh University of Engineering Tehnologies.
Tel.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mmtc@vgta.vrn.ru

**Shurupova Irina Yurievna** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of information technologies of modelling and management department, Voronezh University of Engineering Tehnologies.
Tel.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mmtc@vgta.vrn.ru

**Babayan Mikhail Karoevich** – post-graduate student of information technologies of modelling and management department, Voronezh University of Engineering Tehnologies.
Tel.: (4732) 55-25-50,
E-mail: mixabmk@gmail.com