УДК 519. 3:62-50

УПРАВЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева

Поступила в редакцию 10.11.2014 г.

Аннотация. Изучены вопросы аналитического и приближенного решения подвижного точечного нелинейного оптимального управления в нелинейной обратной задаче для системы с уравнением псевдопараболического типа и с обыкновенным дифференциальным уравнением при смешанных, начальном и дополнительном условиях. Рассмотрен квадратичный критерий оптимальности. Использован метод разделения переменных в виде ряда Фурье для решения рассматриваемого уравнения в частных производных. С применением дополнительного условия относительно функции восстановления получено нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода. С помощью неклассического интегрального преобразования оно сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. На основе принципа максимума сформулированы необходимые условия нелинейной оптимальности управления. Получены: формулы для приближенных вычислений функции восстановления, подвижного нелинейного оптимального управления и оценка для допускаемой погрешности по оптимальному управлению. Приведены формулы для приближенного вычисления нелинейного оптимального процесса и минимального значения функционала качества.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, подвижное точечное управление, нелинейная обратная задача, необходимые условия оптимальности управления, нелинейность управления, минимизация функционала.

Annotation. It is studied the questions of analytical and approximation solving the nonlinear dot mobile point optimal control in nonlinear inverse problem for a system of differential equation of pseudoparabolic type and ordinary differential equation with mixed value, initial value and additional conditions. It is considered the quadratic optimality criterion. It is used the Fourier method of separation variables for solving the considering partial differential equation. Appling the additional condition with respect to restore function it is obtained the nonlinear Volterra integral equation of first kind. By the aid of nonclassic integral transformation it is reduced to the nonlinear Volterra integral equation of second kind. On the base of maximum principle it is formulated the necessary conditions for nonlinear optimal control. It is obtained the formulas for approximation calculating the restore function, dot mobile nonlinear optimal control and the estimate for the permissible error with respect to optimal control. It is given the formulas for approximation calculating the nonlinear optimal process and the minimum value of the functional of quality.

Keywords: Pseudoparabolic equation, dot mobile point problem, nonlinear inverse problem, necessary conditions for optimal control, nonlinearity of control, functional minimization.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике. Например, вопросы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к изучению начальных, смешанных и обратных задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка [1, 2]. Теория смешанных задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок, задачи изгиба пластин и оболочек при сложных условиях их опирания [3].

Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем. Обратную задачу назовем нелинейной, если функция восстановления входит в данное уравнение нелинейно. Нелинейные обратные задачи рассматривались, в частности в [4–8].

С другой стороны, теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами получила бурное развитие. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д. [9–15].

Одним из направлений теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является разработка методов решения задач оптимального управления при наличии подвижных источников. В задачах оптимального управления с точечными подвижными источниками часто приходится учитывать вспомогательные элементы. Эти элементы часто имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях [16].

Разрабатываются эффективные численные методы и программные средства для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используются широкий спектр разных методов (см., напр. [17–21]).

В данной работе рассматриваются вопросы аналитического и приближенного решения подвижного точечного нелинейного оптимального управления в нелинейной обратной задаче для дифференциального уравнения псевдопараболического типа при начальных, граничных и дополнительном условиях и с квадратичным критерием оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в области D управляемый процесс описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x)-\nu\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}= \qquad (1)$$
$$=\delta\left(x-\sigma(t)\right)f\left(t,\,\omega(t),p(t)\right)$$

со смешанными

$$u\ (t,x)_{|t=0}=\varphi(x), \qquad (2)$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=0 \qquad (3)$$

и дополнительным

$$u(t,x_0)=\psi(t),\ t\in D_T \qquad (4)$$

условиями, где $f(t,\omega,p)\in C(D_T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, $\omega\ (t)\in C(D_T)$ – функция восстановления, $p(t)\in C(D_T)$ – управляющая функция, $\varphi(x)_{|x=0}=\varphi(x)_{|x=l}=0$, $\varphi(x)\in C^3(D_l)$, $\delta\left(x-\sigma\ (t)\right)$ – дельта-функция Дирака, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv\left[\,0,T\,\right]$, $\Omega_1\equiv\left[0,l^*\right]$, $\Omega_2\equiv\left[0,M^*\right]$, $0<x_0<l,\ 0<l^*<\infty$, $0<M^*<\infty,\ D_l\equiv\left[\,0,l\,\right],\ 0<T<\infty,\ 0<l<\infty$.

Функция $\sigma(t)\in C(D_T)$ описывает изменение положения подвижного точечного источника в пределах от нуля до l и определяется как решение следующей задачи Коши

$$\sigma\,'(t)=q\left(t,\sigma\ (t)\right),\ \sigma\ (0)=\sigma_0=const, \qquad (5)$$

где $q\ (t,\sigma)\in C^{0,1}(D_T\times D_l)$.

В данной работе при фиксированных значениях функции восстановления $\omega(t)$ и функции управления $p(t)$ используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\cdot b_i(x), \qquad (6)$$

где $b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\lambda_i x, \quad \lambda_i=\frac{i\pi}{l},\ i=1,2,\ldots$.

Задача. Найти такую управляющую функцию $\bar{p}(t)\in\left\{\bar{p}:\left|\bar{p}(t)\right|\le M^*, t\in D_T\right\}$ и соответствующее им состояние $\bar{u}(t,x)$ – решение смешанной задачи (1)–(3), а также функцию восстановления $\omega(t)\in C(D_T)$, что доставляют минимум функционалу

$$J[p]=\int_0^l\left[u(T,y)-\xi(y)\right]^2dy+ \\ +\alpha\int_0^T p^2(t)dt+\beta\int_0^T\sigma^2(t)\,dt \qquad (7)$$

где $\xi(x)$ – заданная функция такая, что $\xi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i b_i(x),\ \ \xi_i=\int_0^l\xi(y)b_i(y)dy,\ \ \xi(0)=0,$ $0<\alpha,\ \ \beta=const$.

В данной работе, в отличия от работ [22–25], с помощью дополнительного условия (4) определяется функция восстановления, на основе принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности, вычисляется управляющая функция и решается соответствующая смешанная задача (1)–(3).

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Обозначим

$$\bar{C}_u^{1,2}(D)=\left\{u(t,x):u\in C^{1,2}(D),\ u(t,0)=u(t,l)=0\right\},$$

$$\bar{C}_w^{1,2}(D)=\left\{w(t,x):w\in C^{1,2}(D), w(T,x)=0\right\}.$$

Замыкание этих пространств по норме

$$\|\,u\,\|_{\bar{H}(D)}=\left\{\int_0^T\int_0^l\left|u(t,x)\right|^2dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty$$

обозначим, соответственно $\bar{H}_u(D),\bar{H}_w(D)$.

Для числовой последовательности φ_i в пространстве ℓ_2 используется следующая норма

$$\left\|\varphi\right\|_{\ell_2}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Кроме того, в данной работе используются следующие обозначения.

Класс функций, ограниченных по норме числом M, обозначим через $Bnd\,(M)$. Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u,\vartheta,\ldots$ с коэффициентом L, обозначим через $Lip\left\{L_{|u,\vartheta,\ldots}\right\}$. А для функций одной переменной индекс опускается.

Определение. Если функция $u(t,x)\in\bar{H}_u(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial w(t,y)}{\partial t}-\nu\frac{\partial^3 w(t,y)}{\partial t\partial y^2}-\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2}\right]-\right. \\ \left.-\delta(y-\sigma(t))f\left(t,\omega(t),p(t)\right)w(t,y)\right\}dydt= \\ =\int_0^l\varphi\left[w(t,y)-\nu\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2}\right]_{t=0}dy \qquad (8)$$

для любой функции $w(t,x)\in\bar{H}_w(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Как и в работах [26–28] можно убедиться, что решение смешанной задачи (1)–(3) с помощью ряда Фурье (6) и интегрального тождества (8) при фиксированных значениях функции восстановления и управляющей функции представляется в следующем виде

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{W_i(t)+\right. \\ \left.+\int_0^t G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds\right\}\cdot b_i(x), \qquad (9)$$

где

$$W_i(t)=\varphi_i\exp\left\{-\mu_{1i}(\nu)t\right\},$$

$$G_i(t,s)=\frac{1}{\mu_{0i}(\nu)}\exp\left\{-\mu_{1i}(\nu)(t-s)\right\},$$

$$\mu_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\quad \mu_{1i}(\nu)=\frac{\lambda_i^2}{\mu_{0i}(\nu)},$$

$$\varphi_i=\int_0^l\varphi(y)b_i(y)dy.$$

Предположим, что нелинейная функция $f\left(t,\omega(t),p(t)\right)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f\left(t,\omega(t),p(t)\right)\in Bnd\,(M_0), \\ 0<M_0=const; \qquad (10)$$

$$f_p\left(t,\omega(t),p(t)\right)\neq 0, \tag{11}$$

где $f_p\left(t,\omega(t),p(t)\right)=\dfrac{\partial f\left(t,\omega(t),p(t)\right)}{\partial p}$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)\in L_2(D_l)$ и функция $f\left(t,\omega(t),p(t)\right)$ удовлетворяет условиям (10), (11). Тогда для функции (9) справедливо: $u(t,x)\in \bar{H}_u(D)$.

Доказательство. Действительно, имеем

$$\int_0^T\int_0^l u^2(t,y)dydt\leq$$

$$\leq\int_0^T\int_0^l \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[W_i(t)+\int_0^t G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds\right]\cdot b_i(y)\right\}^2 dydt\leq$$

$$\leq 2\int_0^T\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[W_i(t)\right]^2+2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[W_i(t)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^t G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^t G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds\right]^2\right\}dt\leq$$

$$\leq 2TM_1^2+4\sqrt{2}T^2M_0M_1M_2M_3+$$

$$+4T^3\left(M_0M_2M_3\right)^2<\infty,$$

где

$$M_1=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left\{W_i(t)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left\|W(t)\right\|_{B_2(T)},$$

$$M_2=\left\|G(t,s)\right\|_{B_2(T)},\ M_3=\left\|b\left(\sigma(t)\right)\right\|_{B_2(T)}.$$

Отсюда следует утверждения теоремы. И при этом нетрудно убедиться, что при выполнении условий этой теоремы функция (9) является единственным решением смешанной задачи (1)–(3) при фиксированных значениях функций $\omega(t)$, $p(t)$, $\sigma(t)$.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $\omega(t)$

Используя дополнительное условие (4) из (9) получаем

$$\psi(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{W_i(t)+\int_0^t G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)\times\right.$$

$$\left.\times f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds\right\}\cdot b_i(x_0)$$

или

$$\int_0^t G_0(t,s)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds=\tau(t), \tag{12}$$

где

$$G_0(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}G_i(t,s)b_i\left(\sigma(s)\right)b_i(x_0),$$

$$\tau(t)=\psi(t)-\bar{W}(t),$$

$$\bar{W}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}W_i(t)\cdot b_i(x_0).$$

(12) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $\omega(t)$. Его преобразуем следующим образом. Сначала (12) записываем в виде

$$\omega(t)+\int_0^t H(s)ds=\omega(t)+\int_0^t H(s)ds-$$
$$-\int_0^t G_0(t,s)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds+\tau(t), \tag{13}$$

где $0<H(t)$ произвольная функция такая, что

$$e^{-\eta(t)}\ll 1,\ 2\int_0^t H(s)e^{-\eta(t-s)}ds\ll 1,$$

$$\eta(t)=\int_0^t H(s)ds.$$

Из (13), как и в работах [4–8], получаем следующее специальное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\omega(t)=\Theta(t;\omega)\equiv\left[\omega(t)+\int_0^t H(s)\omega(s)ds-\right.$$

$$\left.-\int_0^t G_0(t,s)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds+\tau(t)\right]e^{-\eta(t)}+$$

$$+\int_0^t H(s)e^{-\eta(t-s)}\left[\omega(t)+\int_0^t H(s)\omega(s)ds-\right.$$

$$-\int_0^t G_0(t,s)f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds+\tau(t)-$$

$$-\omega(s)-\int_0^s H(\theta)\omega(\theta)d\theta+$$

$$\left.+\int_0^s G_0(s,\theta)f\left(\theta,\omega(\theta),p(\theta)\right)d\theta-\tau(s)\right]ds. \tag{14}$$

В качестве нормы для произвольной функции $\hbar(t)\in C(D_T)$ используем евклидову норму

$$\| \hbar(t) \|_C = \max_{t \in D_T} |\hbar(t)|.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если:

1. $\tau_0 = \max_{t \in D_T} |\tau(t)| < \infty;$

2. $f(t, \omega, p) \in Lip\{L_{0|\omega}\}, 0 < L_0 = const;$

3. $$q = \left(1 + \max_{t \in D_T} \int_0^t H(s) ds + L_0 M_2 M_3^2 T \right) \times$$
$$\times \max \{ A(t) : t \in D_T \} < 1,$$

где $A(t) = e^{-\eta(t)} + 2\int_0^t H(s) e^{-\eta(t-s)} ds,$ то нелинейное интегральное уравнение (14) имеет единственное решение на отрезке D_T.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\omega_0(t) = 0, \ \omega_1(t) =$$
$$= \left[\tau(t) - \int_0^t G_0(t,s) f(s, 0, p(s)) ds \right] e^{-\eta(t)} +$$
$$+ \int_0^t H(s) e^{-\eta(t-s)} \left[\tau(t) - \int_0^t G_0(t,s) f(s, 0, p(s)) ds - \right.$$
$$\left. - \tau(s) + \int_0^s G_0(s, \theta) f(\theta, 0, p(\theta)) d\theta \right] ds, \quad (15)$$

$$\omega_k(t) = \Theta(t; \omega_{k-1}), \ k = 2, 3, 4, \ldots \ . \quad (16)$$

Для функции $G_0(t,s)$ справедлива оценка

$$|G_0(t,s)| \le \sum_{i=1}^{\infty} |G_i(t,s)| |b_i(\sigma(s))| |b_i(x_0)| \le$$
$$\le M_2 M_3^2. \quad (17)$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (15) и (16) с учетом (17) получаем

$$\| \omega_1(t) - \omega_0(t) \|_C \le$$
$$\le \tau_0 M_0 M_2 M_3^2 \max \{ A(t) : t \in D_T \}; \quad (18)$$

$$\| \omega_k(t) - \omega_{k-1}(t) \|_C \le$$
$$\le \Big[\| \omega_{k-1}(t) - \omega_{k-2}(t) \|_C +$$
$$+ \int_0^t H(s) \| \omega_{k-1}(s) - \omega_{k-2}(s) \|_C ds +$$
$$\left. + L_0 \int_0^t |G_0(t,s)| \| \omega_{k-1}(s) - \omega_{k-2}(s) \|_C ds \right] A(t) \le$$
$$\le q \| \omega_{k-1}(t) - \omega_{k-2}(t) \|_C < \| \omega_{k-1}(t) - \omega_{k-2}(t) \|_C . \quad (19)$$

Из оценок (18) и (19) следует, что оператор в правой части (14) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (14) имеет единственное решение на отрезке D_T. Теорема доказана.

4. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть $\bar{p}(t)$ являются оптимальными управлениями:

$$\Delta J[\bar{p}(t)] = J[\bar{p}(t) + \Delta \bar{p}(t)] - J[\bar{p}(t)] \ge 0,$$

где $\bar{p}(t) + \Delta \bar{p}(t) \in \bar{H}(D_T)$.

Не трудно показать, что применение принципа максимума приводит к следующим необходимым условиям оптимальности [12]

$$\vartheta(t, \sigma(t)) f_p(t, \omega(t), \bar{p}(t)) - 2\alpha \bar{p}(t) = 0, \quad (20)$$

$$\vartheta(t, \sigma(t)) f_{pp}(t, \omega(t), \bar{p}(t)) - 2\alpha < 0, \quad (21)$$

где $\vartheta(t, x)$ – обобщенное решение следующей задачи

$$\vartheta_t(t,x) + \nu \vartheta_{txx}(t,x) + \vartheta_{xx}(t,x) = 0, \ (t,x) \in D,$$
$$\vartheta(t,x) = -2[u(T,x) - \xi(x)], \ \vartheta(t,0) = \vartheta(t,l) = 0,$$

сопряженной с задачей (1)–(3) и определяется по формуле

$$\vartheta(t,x) = -2 \sum_{i=1}^{\infty} \Big[W_i(T) +$$
$$\left. + \int_0^T G_i(T,s) b_i(\sigma(s)) f(s, \omega(s), p(s)) ds - \xi_i \right] \times$$
$$\times G_i(T,t) b_i(x). \quad (22)$$

С учетом условий (10), (11) условия оптимальности (20), (21) перепишем в следующем виде

$$2\alpha p(t) f_p^{-1}(t, \omega(t), p(t)) = \vartheta(t, \sigma(t)), \quad (23)$$

$$f_p(t, \omega(t), p(t)) \left(\frac{p(t)}{f_p(t, \omega(t), p(t))} \right)_p > 0. \quad (24)$$

С учетом (24) из (22) и (23) получаем

$$\alpha p(t) f_p^{-1}(t, \omega(t), p(t)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T G_i(T,t) G_i(T,s) b_i^2 \times$$

$$\times\left(\sigma(s)\right) f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(W_i(T)+\xi_i\right)G_i(T,t)b_i\left(\sigma(t)\right)$$

или

$$\alpha\, p(t) f_p^{-1}(t,\omega(s),p(t)) +$$

$$+\int_0^T Q(t,s) f\left(s,\omega(s),p(s)\right)ds = F(t), \qquad (25)$$

где

$$Q(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}G_i(T,t)G_i(T,s)b_i^2(\sigma(s)),$$

$$F(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(W_i(T)+\xi_i\right)G_i(T,t)b_i\left(\sigma(t)\right).$$

В уравнение (25) положим

$$\alpha\, p(t) f_p^{-1}\left(t,\omega(t),p(t)\right)=g(t).$$

Здесь $g(t)$ – пока неизвестная функция. Но, мы для начала предположим, что она задана. Тогда имеем следующее функциональное уравнение

$$p(t)=\frac{g(t)}{\alpha} f_p\left(t,\omega(t),p(t)\right). \qquad (26)$$

Пусть выполняется следующее условие

$$f_p\left(t,\omega(t),p(t)\right)\in Bnd\,(\bar{N}_1)\cap Lip\left\{\bar{L}_{1|p}\right\},$$

$$0<\bar{N}_1,\ \bar{L}_1=const.$$

Тогда функциональное уравнение (26) имеет единственное решение, которое на отрезке D_T находится из следующего итерационного процесса:

$$p^{n+1}(t)=\frac{g(t)}{\alpha} f_p\left(t,\omega(t),p^n(t)\right),\ n=1,2,\ldots \qquad (27)$$

Это решение обозначим так

$$p(t)=h(t,g(t)). \qquad (28)$$

Теперь для определения функции $g(t)$, подставляя (28) в (25), получаем интегральное уравнение Фредгольма

$$g(t)+\int_0^T Q(t,s) f\left(s,\omega(s),h\left(s,g(s)\right)\right)ds = F(t). \qquad (29)$$

Теорема 3. Пусть:

1) Выполняются условия теоремы 1, 2 и условие (24);

2) $\xi(x)\in L_2(D_l)$;;

3) $h\left(t,g(t)\right)\in Bnd(N_1)\cap Lip\left\{L_{1|g}\right\},\ \ 0<N_1,$ $L_1=const;$

4) $f\left(t,\omega,h(t)\right)\in Bnd\,(N_2)\cap Lip\left\{L_{2|g}\right\},$

$$0<N_2,\ L_2=const;$$

5) $\rho=\left(M_2M_3\right)^2 TL_1L_2<1.$

Тогда нелинейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода (29) имеют единственное решение $g(t)\in C(D_T)$.

Доказательство. Сначала заметим, что функции $Q(t,s)$ и $F(t)$ ограничены

$$\left|Q(t,s)\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|G_i(T,t)\right|^2\left|b_i(\sigma(t))\right|^2\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|G_i(T,t)\right|^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|b_i(\sigma(t))\right|^2= \qquad (30)$$

$$=\left(M_2M_3\right)^2<\infty,$$

$$\left|F(t)\right|\le\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{i=1}^{\infty}\left|W_i(T)+\xi_i\right|\left|G_i(T,t)\right|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|W_i(T)+\xi_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|G_i(T,t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le \qquad (31)$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left(M_1+\|\,\xi\,\|_{\ell_2}\right)M_2<\infty\,.$$

С учетом оценок (30) и (31) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} g^1(t)+\int_0^T Q(t,s) f\left(s,\omega(s),h\left(s,0\right)\right)ds = F(t), \\ g^{k+1}(t)+\int_0^T Q(t,s) f\left(s,\omega(s),h\left(s,g^k(s)\right)\right)ds = \\ \qquad\qquad = F(t), \quad k=1,2,\ldots. \end{cases} \qquad (32)$$

В силу условий теоремы из (32) получаем следующие оценки

$$\left\|g^1(t)\right\|_C\le\left\|F(t)-\int_0^T Q(t,s) f\left(s,\omega(s),h\left(s,0\right)\right)ds\right\|_C\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left(M_1+\|\,\xi\|_{\ell_2}\right)M_2+\left(M_2M_3\right)^2N_2T<\infty; \qquad (33)$$

$$\left\|\,g^{k+1}(t)-g^k(t)\right\|_C\le$$

$$\le\int_0^T\left|Q\,(t,s)\right|\left\|f\left(s,\omega(s),h\left(s,g^k(s)\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\,f\left(s,\omega(s),h\left(s,g^{k-1}(s)\right)\right)\right\|_C ds\le$$

$$\le\left(M_2M_3\right)^2TL_2\left\|h\left(s,g^k(s)\right)-h\left(s,g^{k-1}(s)\right)\right\|_C\le$$

$$\le\rho\left\|g^k(t)-g^{k-1}(t)\right\|_C<\left\|g^k(t)-g^{k-1}(t)\right\|_C. \qquad (34)$$

Из оценок (33) и (34) следует, что нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (29) имеет единственное решение $g(t) \in C(D_T)$. Теорема доказана.

Кроме того, из (29) и (32) аналогично (33) и (34) можно получить, что справедлива оценка

$$\left\| g(t) - g^k(t) \right\|_C \le$$
$$\le \frac{\rho^k}{1-\rho} \left[\sqrt{\frac{2}{l}} \left(M_1 + \|\xi\|_{\ell_2} \right) M_2 + \left(M_2 M_3 \right)^2 N_2 T \right].$$

Отсюда с учетом (28) и второго условия теоремы 3 для погрешности приближенного вычисления управляющей функции получаем оценку

$$\left\| p(t) - p^k(t) \right\|_C \le$$
$$\le \frac{\rho^k}{1-\rho} \left[\sqrt{\frac{2}{l}} \left(M_1 + \|\xi\|_{\ell_2} \right) M_2 + \left(M_2 M_3 \right)^2 N_2 T \right] L_1. \tag{35}$$

5. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА И ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Согласно (9) оптимальный процесс находим по формуле

$$\overline{u}(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ W_i(t) + \int_0^t G_i(t,s) b_i\left(\sigma(s)\right) \times \right.$$
$$\left. \times f\left(s, \omega(s), \overline{p}(s)\right) ds \right\} \cdot b_i(x). \tag{36}$$

Оптимальный процесс (36) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса Пикара

$$\overline{u}^{n,k}(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ W_i(t) + \int_0^t G_i(t,s) b_i\left(\sigma^k(s)\right) \times \right.$$
$$\left. \times f\left(s, \omega^k(s), \overline{p}^k(s)\right) ds \right\} \cdot b_i(x). \tag{37}$$

Минимальное значение функционала, согласно формулам (7) и (36) находится из следующей формулы

$$J[\overline{p}] =$$
$$= \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ W_i(T) + \int_0^T G_i(T,s) b_i\left(\sigma(s)\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times f\left(s, \omega(s), \overline{p}(s)\right) ds - \xi_i \right\} \cdot b_i(y) \right]^2 dy +$$
$$+ \alpha \int_0^T \left(\overline{p}(t) \right)^2 dt + \beta \int_0^T \left(\sigma(t) \right)^2 dt. \tag{38}$$

Из работы [29], в частности, следует, что задача Коши (5) при выполнении условия

$$q\left(t, \sigma(t)\right) \in Bnd\,(N_3) \cap Lip\left\{ L_{3|\sigma} \right\},$$
$$0 < N_3,\ L_3 = const$$

имеет единственное решение $\sigma(t) \in C(D_T)$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда функционал (38) принимает конечное значение.

Доказательство. Учитывая доказательства теорем 1, 2 и 3, из (38) получаем

$$J[\overline{p}] \le 2\left(M_1 + \|\xi\|_{\ell_2} \right)^2 +$$
$$2T\left(M_1 + \|\xi\|_{\ell_2} \right) M^0 \left(M_2 M_3 \right)^2 +$$
$$+ 2T^2 \left(M^0 M_2 M_3 \right)^2 + \alpha T \left(M^* \right)^2 + \beta T l^2 < \infty.$$

Отсюда следует, что функционал (38) принимает конечное значение. Теорема доказана.

Приближенное значение функционала вычисляется по следующему итерационному процессу

$$J[\overline{p}^{\,n,k}] =$$
$$= \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} \left\{ W_i(T) + \int_0^T G_i(T,s) b_i\left(\sigma^k(s)\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times f\left(s, \omega(s), \overline{p}^k(s)\right) ds - \xi_i \right\} \cdot b_i(y) \right]^2 dy +$$
$$+ \alpha \int_0^T \left(\overline{p}^k(t) \right)^2 dt + \beta \int_0^T \left(\sigma^k(t) \right)^2 dt. \tag{39}$$

$\sigma(t)$ определяется из следующего итерационного процесса

$$\sigma^{k+1}(t) = \sigma^0 + \int_0^t q\left(s, \sigma^k(s)\right) ds. \tag{40}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предлагается методика решения одной нелинейной задачи оптимального управления при наличии точечных подвижных источников для системы с дифференциальным уравнением псевдопараболического типа и с обыкновенным дифференциальным уравнением при смешанных, начальном и дополнительном условиях. Сначала используется метод разделения переменных и обобщенное решение смешанной задачи разыскивается в виде ряда Фурье при фиксированных значениях функции восстановления и управляющей функции. С применением дополнительного условия относительно функции восстановления получается нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода. С помощью неклассического интегрального преобразования оно сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. На основе принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности управления при квадратичных критериях. Доказываются существование и единственность оптимального управления. При этом используется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получаются формулы для аналитического и приближенного вычислений функции восстановления и подвижного оптимального управления и оценка для допускаемой погрешности по оптимальному управлению. Приводятся формулы для приближенного вычисления оптимального процесса и минимального значения функционала. При этом используются итерационные процессы (15), (16), (27), (32), (37), (39) и (40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27. – № 2. – С. 348–350.

2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.

3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М. : Наука, 1986. – 336 с.

4. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 28. – № 3. – С. 17–29.

5. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5. – № 1. – С. 69–75.

6. *Юлдашев Т. К., Середкина А. И.* Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 32. – № 3. – С. 46–55.

7. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 34. – № 1. – С. 56–65.

8. *Юлдашев Т. К.* Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 35. – № 2. – С. 39–49.

9. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

10. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М. : Наука, 1982. – 432 с.

11. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М. : Наука, 1978. – 464 с.

12. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Дисс. ... д. ф.-м. н.: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. – Бишкек : Институт математики НАН Кыргызской Республики, 2003. – 224 с.

13. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М. : Мир, 1972. – 412 с.

14. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

15. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М. : Высшая школа, 2009. – 680 с.

16. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

17. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

18. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автомат. и телемех. – 2013. – № 12. – С. 56–103.

19. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

20. *Тятюшкин А. И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: СО «Наука», 1992. – 193 с.

21. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М. : Наука, 1978. – 488 с.

22. *Юлдашев Т. К.* Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения // Моделирование и анализ информационных систем. – 2013. – Т. 20. – № 5. – С. 78–89.

23. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения // Вестник ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 1. – С. 45–51.

24. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение точечной подвижной задачи оптимального управления для нелинейного гиперболического уравнения // Моделирование и анализ информационных систем. – 2014. – Т. 21. – № 3. – С. 106–120.

25. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях // Проблемы управления. – 2014. – № 4. – С. 2 – 8.

26. *Юлдашев Т. К.* О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2011. – Вып. 4. – № 10 (227). – С. 40–48.

27. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2011. – Т. 51. – № 9. – С. 1703–1711.

28. *Юлдашев Т. К., Дыйканов Г. А.* О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 164–169.

29. *Юлдашев Т. К.* Развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами / Дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальные управления. – Бишкек : Институт математики НАН Кыргызской Республики, 1993. – 121 с.

Юлдашев Турсун Камалдинович – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики. Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия.
Тел.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru

Yuldashev Tursun Kamaldinovich – Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department. Siberian State Aerospace University.
Tel.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru