УДК 519.688+517.55

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ АЛГОРИТМОВ В ЗАДАЧЕ КОЭФФИЦИЕНТНОГО ОПИСАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. В. Лобода, В. И. Суковых

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 23.12.2014 г.

Аннотация. В задаче описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства предлагается использовать средства символьной математики. В обсуждаемом случае набор коэффициентов, определяющих однородную поверхность, выделяется из большой системы полиномиальных уравнений. Система частично решена, выделено ее ядро, содержащее 26 алгебраических уравнений относительно 16 неизвестных коэффициентов.
Ключевые слова: однородное многообразие, полиномиальное уравнение, символьные вычисления.
Annotation. In the problem of holomorphically homogeneous real hypersurfaces description of 3-dimensional complex space the using of symbolic mathematics is suggested. In the case under consideration, the set of coefficients defining a homogenious surface is extracted from large system of polynomial equations. The system is partially solved, its core containing 26 algebraic equations in the 16 unknown coefficients is extracted.
Keywords: homogeneous manifold, the polynomial equation, symbolic computations.

ВВЕДЕНИЕ

В статье обсуждаются технические вопросы, возникающие в одной «чисто математической» задаче из многомерного комплексного анализа. Эта задача связана с коэффициентным описанием однородных вещественно-аналитических поверхностей в 3-мерном комплексном пространстве (см. [1]; полное описание 2-мерного случая содержится в [2]).

С помощью пакета символьных вычислений Maple мы исследуем в статье необходимые (смешанные) условия однородности, сформулированные в [1]. Эти условия включают в себя 100 вещественных тейлоровских коэффициентов, однозначно определяющих любую такую поверхность, а также компоненты векторных полей, касательных к изучаемым поверхностям. В результате проведенного исследования удается освободиться от компонент векторных полей и уменьшить со 100 до 16 количество коэффициентов, отвечающих за однородность. Сами условия сведены к системе из 26 алгебраических уравнений на оставшиеся коэффициенты.

Разрабатываемые в статье методы по существу относятся к применению полиномиальных моделей при изучении математических и технических задач (см., например, [3]–[5]).

§ 1. НАЧАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предметом данной статьи является изучение и упорядочение информации, связанной с большой системой алгебраических уравнений. Эти уравнения представляют собой условия, необходимые для того, чтобы веще-

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 14-01-00709 и проектом № 7.22.2014/К Министерства образования и науки РФ

ственно-аналитическая поверхность в комплексном пространстве C^3, заданная уравнением ($z=(z_1,z_2)$, w – координаты в C^3)

$$\operatorname{Im} w=\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)+\sum_{k,l\geq 2,m\geq 0} N_{klm}(z,\bar{z})(\operatorname{Re} w)^m \quad (1)$$

была голоморфно-однородной.

Необходимые теоретические пояснения, относящиеся к понятию однородности и к идеям, связанным с этим понятием, можно найти, например, в [1] или [6]. Здесь же обсуждается информационно-технический аспект проблемы классификации однородных поверхностей в C^3.

Все обсуждения нашей работы относятся к набору из семи многочленов

$$N_{220}, N_{221}, N_{222}, N_{320}, N_{321}, N_{420}, N_{330}, \quad (2)$$

входящих в уравнение (1). Согласно [1], уравнение (1) однородной поверхности полностью определяется именно этим набором.

Многочлены из набора (2) имеют в совокупности 100 вещественных коэффициентов. При этом в [1] выведены три уравнения, связанные с векторными полями на поверхностях вида (1). Эти уравнения имеют вид (3)–(5).

Помимо многочленов из набора (2) в уравнения (3)-(5) входят также младшие компоненты (f_0,f_1,f_2,g_0,g_2) векторного поля $Z=f(z,w)\dfrac{\partial}{\partial z}+g(z,w)\dfrac{\partial}{\partial w}$, касательного к обсуждаемой поверхности. При этом параметры $f_0(0)=p\in C^2$, $g_0(0)=q\in R$ являются свободными для любой однородной поверхности, а характер остальных компонент такого поля (свободный или связанный) определяется соотношениями (3)–(5). Отметим также, что со свободой некоторых параметров поля Z, отличных от основной пятерки (p,q), связано наличие у однородных поверхностей богатых групп симметрий.

Основной задачей нашей работы является уменьшение до обозримых пределов числа коэффициентов набора (2), по существу отвечающих за однородность. Для этого требуется выделить из уравнений (3)–(5) информацию о коэффициентах набора (2) в «сжатой» форме, замкнутой относительно этого набора.

Ясно, что решение поставленной объемной задачи по обработке математической информации возможно лишь с использованием современных информационных технологий. Авторы использовали для этого пакет компьютерной алгебры Maple.

§ 2. КОММЕНТАРИИ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Входящие в систему (3)–(5) многочлены $N_{220}, N_{221}, N_{222}$ являются элементами некоторого 5-мерного (см. [7]) вещественного пространства $\mathcal{N}_{22}$ многочленов от комплексных переменных. В качестве базиса в этом пространстве удобно рассматривать (6).

Многочлены N_{320}, N_{321} принадлежат пространству $\mathcal{N}_{32}$ многочленов вида

$$\sum_{1\leq k\leq 3, 0\leq j\leq 3} \omega_{k+3j} z_1^{3-j} z_2^{j} \bar{z}_1^{2-k+1} \bar{z}_2^{k-1},$$

имеющему комплексную размерность 10 в силу т.н. tr-условий

$$\left(g_0(0)N_{221}-g_0'(0)N_{220}\right)+2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{220}(f_1)\right\}_N+2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{320}(f_0(0))\right\}_N\equiv 0, \quad (3)$$

$$\begin{gathered}\left(g_0(0)N_{321}-g_0'(0)N_{320}\right)+\left(2i\langle z,f_0'(0)\rangle N_{220}-2i\langle z,z\rangle\bar{\partial}N_{220}\left(\bar{f}_0'(0)\right)\right)+\\+\left(i\langle z,f_0(0)\rangle N_{221}-i\langle z,z\rangle\bar{\partial}N_{221}\left(\bar{f}_0(0)\right)\right)+\left\{\partial N_{220}(f_2^*)\right\}_N+\\+\left\{\partial N_{420}(f_0(0))\right\}_N+\left\{\bar{\partial}N_{330}\left(\bar{f}_0(0)\right)\right\}_N+\left(\partial N_{320}(f_1)+\bar{\partial}N_{320}(\bar{f}_1)\right)\equiv 0,\end{gathered} \quad (4)$$

$$\begin{gathered}\left(g_0(0)N_{222}-g_0''(0)N_{220}\right)+\operatorname{Re}\left\{2\partial N_{221}(f_1)+2\partial N_{220}(f_1')\right\}+\\+2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{321}(f_0(0))\right\}_N+2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{220}(f_0'(0))\right\}_N\equiv 0.\end{gathered} \quad (5)$$

$$\begin{gathered}E_0=|z_1|^4-4|z_1|^2|z_2|^2+|z_2|^4,\ E_1=z_1^2\bar{z}_2^2+z_2^2\bar{z}_1^2,\ E_2=i\left(z_1^2\bar{z}_2^2-z_2^2\bar{z}_1^2\right),\\E_3=\left(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\right)\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right),\ E_4=i\left(z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1\right)\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right).\end{gathered} \quad (6)$$

$$3\omega_1 + \omega_5 + \omega_9 = 0,$$
$$3\omega_{12} + \omega_8 + \omega_4 = 0. \tag{7}$$

Будем задавать эти многочлены (4×3)-матрицами их комплексных коэффициентов

$$N_{320} \cong \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \end{pmatrix}, \quad N_{321} \cong \begin{pmatrix} \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' \\ \omega_4' & \omega_5' & \omega_6' \\ \omega_7' & \omega_8' & \omega_9' \\ \omega_{10}' & \omega_{11}' & \omega_{12}' \end{pmatrix} \tag{8}$$

Аналогично, многочлены N_{420}, N_{330} будем описывать матрицами

$$N_{330} \cong \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{pmatrix}, \quad N_{420} \cong \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s_{13} & s_{14} & s_{15} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

так что

$$N_{420} = \sum_{1\le k\le 3, 0\le j\le 4} s_{k+3j} z_1^{4-j} z_2^{j} \overline{z}_1^{2-k+1} \overline{z}_2^{k-1},$$
$$N_{330} = \sum_{1\le k\le 4, 0\le j\le 3} t_{k+4j} z_1^{3-j} z_2^{j} \overline{z}_1^{3-k+1} \overline{z}_2^{k-1}. \tag{10}$$

Отметим еще, что многочлен N_{330} является вещественнозначным, т. что матрица его коэффициентов – эрмитова (ее диагональные элементы t_1, t_6, t_{11}, t_{16} – вещественны, а внедиагональные – попарно комплексно сопряжены друг другу: $t_5 = \overline{t_2}$, $t_9 = \overline{t_3}$ и т.д.). Кроме того, для многочлена N_{330} выполняется свое tr-условие

$$3t_1 + t_6 + t_{11} + 3t_{16} = 0. \tag{11}$$

Везде ниже мы рассматриваем случай поверхностей, в уравнении (1) для которых многочлены N_{220}, N_{320} удовлетворяют следующим дополнительным ограничениям:

$$N_{220} = E_3 + \mu E_0 \left(\mu \in R\right), \quad \omega_3 \ne 0. \tag{12}$$

Первое из условий (12) является, в силу [8], условием общности положения обсуждаемых поверхностей (в отличие от случая $N_{220} = E_0$, связанного с богатыми группами симметрий и рассматривавшегося в [1] и в [9]). Второе условие в (12) представляет один из возможных частных случаев. Мы вводим его для упрощения вычислений и более наглядного представления эффективности предлагаемой схемы изучения однородности и получаемых на ее основе результатов.

Отметим, что помимо искусственного требования $\omega_3 \ne 0$ возможны и «естественные» дополнительные ограничения на коэффициенты уравнения (1). Например, поворотом координат $z_1 \to e^{i\theta} z_1$, $z_2 \to e^{i\theta} z_2$ с подходящим θ можно перевести любой ненулевой коэффициент многочлена N_{320} в вещественное состояние. Поэтому коэффициент ω_3 будет везде далее считаться не только отличным от нуля, но и вещественным.

Замечание 1. Наоборот, два коэффициента ω_6, ω_7 этого же многочлена, а также коэффициент λ_3' многочлена N_{221} можно приравнять нулю в обсуждаемом случае (12). Существование преобразований координат, обеспечивающих выполнение таких ограничений на коэффициенты при сохранении общего вида уравнения (1), связано со свойствами *нормальных* уравнений (1) (см. [1], [7]).

В уравнениях (3)–(5) используются несколько выражений, нуждающихся в дополнительных объяснениях.

Во-первых, через $\langle z, a\rangle$ обозначается эрмитово скалярное произведение пары векторов $z, a \in \mathbb{C}^2$, т.е. $\langle z, a\rangle = z_1\overline{a}_1 + z_2\overline{a}_2$.

Во-вторых, для произвольной функции $h\left(z_1, z_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2\right)$ и вектора $a \in \mathbb{C}^2$ используются обозначения

$$\partial h(a) = \frac{\partial h}{\partial z_1}\cdot a_1 + \frac{\partial h}{\partial z_2}\cdot a_2,$$
$$\overline{\partial} h(a) = \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_1}\cdot \overline{a}_1 + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_2}\cdot \overline{a}_2.$$

Для компонент векторного поля $f_k = f_k(z, w)$, $g_l = g_l(z, w)$ нижний индекс означает степень по переменной z, а производные типа f', g'' вычисляются по переменной w. При этом используются следующие упрощающие обозначения:

$$a = f_0'(0) \in \mathbb{C}^2, \;\; r = \Re\left(g_0''\right) = \Re\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0)\right),$$

$$f_1(z,w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ -\beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 + i\delta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

с вещественными функциями α_1, α_2, β_1, β_2, δ_2. Здесь согласно [1]

$$g_0'(u) = 2\alpha_1(u) \text{ при } u \in R,$$

и везде в уравнениях (3)–(5) под f_1 понимается $f_1(z,0)$.

Наконец, компонента f_2^* определяется формулой $\left\langle f_2^*, z \right\rangle = -\overline{\partial} N_{220}\left(\overline{a}\right)$.

Сами тождества (3)–(5) можно рассматривать как векторные уравнения, т.к. они описывают равенства нулю многочленов из пространств $\mathcal{N}_{22}$, $\mathcal{N}_{32}$ и $\mathcal{N}_{22}$ соответственно. В [1] они получены как (2,2,0)-, (3,2,0)- и (2,2,1)-компоненты некоторого аналитического тождества, описывающего однородные поверхности.

§ 3. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Параметры векторных полей, входящих в (2,2,0)-, (3,2,0)- и (2,2,1)-компоненты, разделяются на основную пятерку (p_1, p_2, q), связанную со сдвигами вдоль касательных направлений к однородной поверхности M и совокупность остальных (второстепенных) вещественных параметров. Всего таких параметров, отвечающих преобразованиям аналитических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, имеется 15 (см. [1], [7]). Для сферы все они свободны, а в нашем случае однородных поверхностей их количество не может быть меньше 5 и больше 15.

В рассматриваемом случае многочлена N_{220}, имеющего вид (12), все 10 второстепенных параметров можно выразить через основную пятерку именно из (2,2,0)-, (3,2,0)- и (2,2,1)-соотношений. В силу линейной зависимости соотношений (3)–(5) от коэффициентов набора (2) и от параметров полей, касательных к изучаемой поверхности, для этого достаточно найти в обсуждаемой системе 10 скалярных уравнений, ранг которых относительно совокупности удаляемых параметров является полным.

Однако скалярные компоненты векторных уравнений (3)–(5) устроены достаточно сложно. Например, в зависимости от коэффициентов набора (2) определители некоторых линейных подсистем исходной системы могут быть равными нулю. Именно это и является причиной, требующей последовательного рассмотрения каждого из уравнений системы (3)–(5) по отдельности.

Прокомментируем общую идею таких рассмотрений.

В (2,2,0)- и (2,2,1)-компонентах имеется по 5 скалярных вещественных равенств, (3,2,0)-компонента распадается на 10 комплексных скалярных соотношений.

Некоторые из скалярных соотношений можно разрешить относительно входящих в них параметров (вещественных или комплексных) векторных полей. Например, из 5 вещественных соотношений, отвечающих (2,2,0)-компоненте, на эти цели удается использовать 4 уравнения, т.к. ранг этой системы относительно (второстепенных) параметров уравнений равен лишь 4. Пятое уравнение в такой ситуации зависит только от основных параметров и выполняется тождественно при любых значениях этих параметров.

Теперь для получения информации о коэффициентах канонического уравнения (т.е. о многочленах из набора (2)) остается воспользоваться следующим техническим утверждением.

Лемма 3.1. Если равенство $A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 \overline{p}_1 + A_4 \overline{p}_2 + A_5 q = 0$ выполняется тождественно по (p_1, p_2, q), где $p_1, p_2 \in C$, $q \in R$, то все коэффициенты из левой части этого равенства, т.е. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 равны нулю.

В рассмотрениях, связанных с уравнениями (3)–(5), роль таких коэффициентов играют комбинации коэффициентов многочленов из набора (2). Сложность таких комбинаций нарастает по мере продвижения от (3) к (5). При этом все же удается освободиться от всех второстепенных параметров и получить «абсолютные» соотношения на коэффициенты опорного набора, не зависящие от параметров векторных полей.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ (2,2,0)-СООТНОШЕНИЯ

Это уравнение содержит четыре слагаемых, каждое из которых разлагается по базису 5-мерного пространства полиномов. Итог «скалярной развертки» уравнения (3) в случае многочлена N_{220} вида (12) можно представить таблицей (табл. 1).

Из нее можно сделать следующие выводы:

Предложение 4.1. Из (2,2,0)-соотношения (3) выводится следующая информация о параметрах векторных полей (14)–(16).

Предложение 4.2. Из (2,2,0)-соотношения (3) выводится следующая информация о коэффициентах многочлена N_{320} (17).

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ (3,2,0)- И (2,2,1)-СООТНОШЕНИЙ

В каждой из двух оставшихся компонент мы также удаляем вспомогательные параметры векторных полей, после чего используем лемму 3.1. Так, из двух комплексных скалярных уравнений (3,2,0)-компоненты удается выразить (через основную пятерку) параметры $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. После этого в одном из восьми оставшихся в этой компоненте комплексных уравнений приходится выделить вещественную и мнимую части. Из мнимой части удается выразить еще один параметр α_2 векторного поля.

Таблица 1

	I	II	III	IV
E_0	$q\lambda_0'$	$-2\mu\alpha_1$	$4\mu\alpha_1 - 2\beta_1$	$-\operatorname{Re}\{\omega_5 p_1 + \omega_8 p_2\}$
E_1	$q\lambda_1'$	0	$2\beta_1$	$\operatorname{Re}\{3\omega_3 p_1 + 3\omega_{10} p_2\}$
E_2	$q\lambda_2'$	0	$-2\beta_2$	$\operatorname{Im}\{3\omega_3 p_1 - 3\omega_{10} p_2\}$
E_3	0	$-2\alpha_1$	$6\mu\beta_1 + 4\alpha_1$	$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{(2\omega_4 - \omega_8 + 3\omega_2)p_1 + (-3\omega_{11} - 2\omega_9 + \omega_5)p_2\}$
E_4	$q\lambda_4'$	0	$-6\mu\beta_2 + \alpha_2 - \delta_2$	$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\{(-2\omega_4 - \omega_8 + 3\omega_2)p_1 + (-3\omega_{11} + 2\omega_9 + \omega_5)p_2\}$

$$\beta_1 = -\frac{3}{2}\operatorname{Re}\left(\omega_3 p_1 + \omega_{10} p_2\right) - \frac{1}{2} q\lambda_1', \quad \beta_2 = \frac{3}{2}\operatorname{Im}\left(\omega_3 p_1 - \omega_{10} p_2\right) + \frac{1}{2} q\lambda_2', \tag{14}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(\left(18\mu\omega_3 - 2\omega_4 + \omega_8 - 3\omega_2\right)p_1 + \left(18\mu\omega_{10} - 3\omega_{11} + 2\omega_9 - \omega_5\right)p_2\right) + \frac{3}{2}\mu q\lambda_1', \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \delta_2 = \alpha_2 + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\left(-18\mu\omega_3 - 2\omega_4 - \omega_8 + 3\omega_2\right)p_1\right) + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\left(18\mu\omega_{10} - 3\omega_{11} + 2\omega_9 + \omega_5\right)p_2\right) + q_1\left(\lambda_4' - 3\mu\lambda_2'\right), \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \omega_6 = \omega_7 = 0, \\ \omega_4 = \frac{3\left(4\mu\omega_1 - 3\mu^2\omega_2 + \left(18\mu^3 + 6\mu\right)\omega_3 - \left(12\mu^2 + 4\right)\omega_{10} - 2\mu\omega_{11} - \left(3\mu^2 + 4\right)\omega_{12}\right)}{4 + 9\mu^2}, \\ \omega_5 = \frac{3\left(\left(12\mu^2 + 4\right)\omega_3 + \left(18\mu^3 + 6\mu\right)\omega_{10} + 3\mu^2\omega_{11} + 4\mu\omega_{12} - 6\mu^2\omega_1 - 2\mu\omega_2\right)}{4 + 9\mu^2}, \\ \omega_8 = \frac{3\left(3\mu^2\omega_2 - 4\mu\omega_1 - \left(18\mu^3 + 6\mu\right)\omega_3 + \left(12\mu^2 + 4\right)\omega_{10} + 2\mu\omega_{11} - 6\mu^2\omega_{12}\right)}{4 + 9\mu^2}, \\ \omega_9 = \frac{3\left(2\mu\omega_2 - \left(12\mu^2 + 4\right)\omega_3 - \left(18\mu^3 + 6\mu\right)\omega_{10} - 3\mu^2\omega_{11} - 4\mu\omega_{12} - \left(3\mu^2 + 4\right)\omega_1\right)}{4 + 9\mu^2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Отметим, что формулы при этом получаются достаточно громоздкие. Их, как и формулы для параметров полей из п. 3.2., можно подставить в оставшиеся одно вещественное и семь комплексных уравнений (3,2,0)-компоненты. После подстановки эти уравнения будут зависеть только от основной пятерки параметров, что позволяет применить к ним лемму 3.1.

Аналогично, в (2,2,1)-компоненте, содержащей пять скалярных вещественных уравнений, сначала определяется вещественный параметр r векторного поля (последний из десяти второстепенных параметров). На это расходуется одно из пяти уравнений, а к остальным четырем применяется лемма 3.1.

В итоге освобождение (3)–(5) от параметров векторных полей приводит к системе из семи комплексных «абсолютных» уравнений из (3,2,0)-компоненты, а также к пяти вещественным уравнениям, одно из которых получено в (3,2,0)-компоненте, а четыре – в (2,2,1)-компоненте основного тождества. Всю совокупность этих уравнений естественно разбить на p-группы, $\overline{p}$-группы и q-группы и исследовать их в таком порядке:

1. одно вещественное уравнение из (3,2,0)-компоненты;
2. группа уравнений $(3,2,0)_p$ (из которой выражаются коэффициенты многочлена N_{420});
3. «смешанная система» $(3,2,0)_q+(2,2,1)_p$ (из нее выражаются коэффициенты многочлена N_{321} и получаются 5 комплексных соотношений на коэффициенты набора (2));
4. группа уравнений $(2,2,1)_q$ (выражаются коэффициенты многочлена N_{222});
5. группа уравнений $(3,2,0)_{\overline{p}}$ (из которой выражаются практически все коэффициенты многочленов N_{330}, N_{221} и получаются 13 вещественных соотношений на оставшиеся коэффициенты набора (2)).

Приведем образцы получаемых (при помощи пакета Maple) результатов по отдельным группам уравнений.

1. Отделяя в одиночном вещественном уравнении его p_1, p_2-составляющие, мы получаем формулы, позволяющие выразить коэффициенты s_3, s_6 многочлена N_{420} через другие элементы набора (2).

$$\begin{gathered}108\mu\omega_3^2-6\omega_3\left(5\omega_2+2\omega_4-\omega_8\right)-\\-8i\lambda_1'+8\overline{t_3}+32s_3-8\lambda_2'+8=0,\\3\omega_3\left(18\mu\omega_{10}-\omega_5+2\omega_9+3\omega_{11}\right)-\\-6\omega_{10}\overline{\omega}_2+12\overline{t_4}+4s_6=0.\end{gathered}\tag{18}$$

q-компонента этого уравнения дает нам вещественное соотношение

$$\operatorname{Re}\left(2\omega_3'-\omega_2\left(\lambda_1'+i\lambda_2'\right)+9\omega_3\mu\lambda_1'\right)=0\tag{19}$$

на коэффициенты многочленов N_{320}, N_{321}, N_{221} и параметр μ из формулы (2).

2. В группу из 14 комплексных уравнений, образующих $(3,2,0)_p$-систему, 15 коэффициентов s_k многочлена N_{420} входят линейным образом. При этом ранг системы относительно s_k оказывается не полным, а равным 13. Благодаря этому удается выразить именно 13 коэффициентов s_k, остававшихся «свободными» после получения предыдущих двух формул. Например, (20).

Последнее из 14 уравнений $(3,2,0)_p$-компоненты дает еще одно соотношение на коэффициенты уменьшенного набора опорных коэффициентов (21).

Здесь возникают 5 комплексных соотношений на коэффициенты уменьшенного набора (3.2), простейшее из которых приведено в (22).

Формула для одного из коэффициентов многочлена N_{321} имеет вид (23).

Эта группа уравнений позволяет явным образом (по аналогии с описанием (2,2,0)-компоненты) получить формулы для четырех (из пяти) коэффициентов многочлена N_{222} и просто вывести их из обсуждений.

3. Тринадцать соотношений связывают набор из 11 вещественных коэффициентов ω_k многочлена N_{320}, входящих в них кубическим образом, с коэффициентами $a_4=\operatorname{Re}(t_4)$, $b_4=\operatorname{Im}(t_4),\lambda_2'$ многочленов N_{330} и N_{221} соответственно, входящими в уравнения линейно. Линейная часть одного из таких уравнений с коэффициентами, зависящими от N_{320}, приведена в (24) (здесь $\xi_k=\operatorname{Re}(\omega_k/\omega_3)$, $\eta_k=\operatorname{Im}(\omega_k/\omega_3)$).

$$s_{10}=\frac{3\omega_{10}}{2\omega_3\left(9\mu^2+4\right)}\begin{pmatrix}180\mu^3\omega_3^2-39\mu^2\omega_2\omega_3-30\mu^2\omega_{10}\omega_3-\\ -30\mu^2\omega_{12}\omega_3+24\mu^2 s_3+10\mu\omega_1\omega_3+75\mu\omega_3^2-\\ -5\mu\omega_{11}\omega_3-14\omega_2\omega_3-10\omega_{10}\omega_3-20\omega_{12}\omega_3+\dfrac{32}{3}s_3\end{pmatrix}. \tag{20}$$

$$\omega_3\begin{pmatrix}27\mu^4\omega_2^2+32\omega_{11}\omega_3-36\mu^4\omega_{12}^2-32\mu^2\omega_{12}^2-\\ -8\mu\omega_{11}\omega_2-16\mu\omega_{11}\omega_{12}-120\mu^2\omega_{10}\omega_{12}-\\ -16\mu\omega_1\omega_2+12\mu^2\omega_{10}\omega_2-27\mu^4\omega_{11}^2-8\mu^2\omega_{11}^2-\\ -54\mu^3\omega_{11}\omega_2+8\mu^2\omega_2^2+24\mu\omega_3\omega_{10}+\\ +432\mu^5\omega_3\omega_{12}+240\mu^3\omega_{12}\omega_3+32\mu\omega_3\omega_{12}-\\ -54\mu^5\omega_{11}\omega_{12}-84\mu^3\omega_{12}\omega_{11}-486\mu^6\omega_{10}\omega_{12}-\\ -522\mu^4\omega_{10}\omega_{12}-54\mu^5\omega_1\omega_2-84\mu^3\omega_1\omega_2-\\ -81\mu^6\omega_2\omega_{10}+9\mu^4\omega_2\omega_{10}+36\mu^4\omega_1\omega_{11}-\\ -108\mu^5\omega_2\omega_{11}+1053\mu^6\omega_{11}\omega_3+963\mu^4\omega_{11}\omega_3+\\ +300\mu^2\omega_3\omega_{11}-108\mu^5\omega_{10}\omega_{11}-36\mu^3\omega_{10}\omega_{11}-\\ -24\mu^3\omega_{12}\omega_{11}-32\mu\omega_{12}\omega_1-36\mu^4\omega_{12}\omega_2-\\ -48\mu\omega_2\omega_3+486\mu^6\omega_1\omega_3+954\mu^4\omega_3\omega_1-\\ -432\mu^5\omega_2\omega_3-288\mu^3\omega_2\omega_3+1458\mu^7\omega_3\omega_{10}+\\ +1188\mu^5\omega_3\omega_{10}+306\mu^3\omega_3\omega_{10}+456\mu^2\omega_1\omega_3-\\ -216\mu^5\omega_1\omega_{10}+1620\mu^6\omega_3^2+1656\mu^4\omega_3^2+564\mu^2\omega_3^2+\\ +36\mu^4\omega_1^2+32\mu^2\omega_1^2+64\mu\omega_3\omega_1+324\mu^6\omega_{10}^2-\\ -264\mu^3\omega_1\omega_{10}-64\mu\omega_1\omega_{10}+504\mu^4\omega_{10}^2+\\ +228\mu^2\omega_{10}^2+32\omega_{10}^2+64\omega_3^2\end{pmatrix}=0 \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\omega_{10}\overline{\omega}_2-4\omega_{10}\overline{\omega}_4+4\omega_{10}\omega_8+6\omega_{11}\omega_3-\\ -6\omega_{10}\omega_2-8\omega_3\omega_9+2\omega_{10}\overline{\omega}_8\end{pmatrix}\lambda_1'+\\ +\begin{pmatrix}-6i\omega_{10}\omega_2+8i\omega_9\omega_3-6i\omega_{11}\omega_3+4i\omega_{10}\omega_8-\\ -4i\omega_{10}\overline{\omega}_4-6i\omega_{10}\overline{\omega}_2+2i\omega_{10}\overline{\omega}_8-36i\mu\omega_{10}\omega_3\end{pmatrix}\lambda_2'+\\ +3i\omega_{10}\omega_3\overline{t}_7+60i\omega_{10}\omega_3\lambda_4'-27i\omega_{10}\omega_3^3+6is_9\omega_3^2-\\ -6i\omega_{10}\omega_2-6i\omega_{11}\omega_3+6i\omega_{10}\overline{\omega}_{10}s_7+3i\omega_{10}\omega_3\overline{t}_{10}+27i\overline{\omega}_{10}\omega_{10}^2\omega_3\end{pmatrix}=0 \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\omega_6'=\frac{9}{4}i\overline{\omega}_{10}\omega_4\omega_{10}+i\omega_9+\frac{3}{4}i\omega_3-\frac{9}{4}i\omega_3\overline{\omega}_9\omega_{10}+\frac{3}{2}\omega_3\lambda_1'+\lambda_1\omega_5-3\lambda_1\omega_{11}-\frac{9}{4}i\overline{\omega}_{10}s_{10}+\\ +\frac{9}{8}i\overline{\omega}_5\omega_3\omega_{10}-\frac{9}{4}i\overline{t}_8\omega_3-\frac{9}{8}i\overline{\omega}_{10}\omega_8\omega_{10}-3i\lambda_2\omega_{11}-\frac{3}{2}i\omega_3\lambda_2'+\frac{1}{2}i\omega_5+i\lambda_2\omega_5;\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}L=2\eta_{10}\lambda_2'+2\left(\xi_{10}\left(-\frac{3}{4}\xi_8+\frac{9}{2}\xi_{10}+\frac{3}{2}\xi_{12}\right)+\frac{3}{2}\xi_2\xi_{10}-\frac{3}{2}\eta_2\eta_{10}+3\right)a_4+\\ +\left(2\xi_{10}\left(\frac{9}{2}\eta_{10}-\frac{3}{4}\eta_8+\frac{3}{2}\eta_{12}\right)+\frac{3}{2}\eta_{10}\xi_2+\frac{3}{2}\eta_2\xi_{10}\right)b_4.\end{gathered} \tag{24}$$

ИТОГОВЫЕ ВЫВОДЫ

Приведенные описания вычислений и объемные результаты таких вычислений показывают, что получить обозначенные формулы «вручную» практически невозможно. В то же время они формируются с использованием простейших алгебраических операций и формального дифференцирования. Привлечение пакета Maple позволило сформировать эти уравнения и освободить их от большой группы коэффициентов, входящих в эти уравнения линейным образом.

Возвращаясь к математическим истокам изученной задачи, можно сформулировать итоги нашего исследования в виде двух теорем.

Теорема 1. Если в уравнении (1) голоморфно-однородной поверхности M многочлен N_{220} имеет вид (12), то весь набор (2) определяется лишь своими 16 вещественными коэффициентами. В этом случае локальная группа $G(M)$ голоморфных преобразований поверхности M может быть только 5-мерной.

Теорема 2. 16 коэффициентов из теоремы 1 удовлетворяют системе из 26 (вещественных) полиномиальных уравнений.

В дальнейшем полученную переопределенную систему также планируется исследовать с использованием пакета Maple по аналогии с работами [10]–[14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Символьные вычисления, проводимые с помощью пакета Maple, применены для изучения одного класса голоморфно-однородных строго псевдо-выпуклых вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Опорный набор коэффициентов канонического уравнения, определяющего любую такую поверхность, уменьшен с потенциальных 100 коэффициентов до 16. Построена переопределенная система алгебраических уравнений на этот уменьшенный набор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобода А. В.* Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с 2-мерными группами изотропии // Матем. Сборник. – Т. 192. – N 12. – 2001. – С. 3–24.

2. *Cartan E.* Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes, Ann. Math. Pura Appl. // 11(4), 17-90 (1932).

3. *Кокс Д., Литтл Дж., О'ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: пер. с англ. – М. : Мир, 2000. – 687 с.

4. *Аладьев В. З.* Основы программирования в Maple. – Таллин, 2006.

5. *Деундяк В. М., Жданова М. А.* Полиномиальное представление скрытой полумарковской модели фергюссоновского типа // Вестник ВГУ, Серия «Системный анализ и информационные технологии», 2013. – N 2. – С. 71–78.

6. *Лобода А. В.* Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. Воронеж, 2009. – С. 71–91.

7. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math., 133, N 3. – 1974. – P. 219–271.

8. *Ежов В. В., Лобода А. В., Шмальц Г.* Каноническая форма многочлена четвертой степени в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Матем. заметки, 66:4 (1999), 624–626.

9. *Суковых В. И.* Об определении опорных коэффициентов уравнения голоморфно-однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ // Матер. ВЗМШ-2014, Воронеж. – С. 342–345.

10. *Лобода А. В., Нгуен Т. Т. З.* Об аффинной однородности поверхностей трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, 2012. – Т. 279. – С. 93–110.

11. *Лобода А. В., Нгуен Т. Т. З.* Об алгоритмах решения больших систем квадратичных уравнений // Сборник трудов междунар. конф. «Акт. проблемы прикл. математики, информатики и механики», Воронеж, 2012. – С. 236–240.

12. *Лобода А. В., Суковых В. И.* Использование тейлоровских коэффициентов при распознавании геометрических объектов // Матер. конф. Информатика: проблемы, методология, технологии, Воронеж, 2014. – Т. 2. – С. 123–125.

13. *Суковых В. И.* Применение средств компьютерной алгебры к выделению опорного набора коэффициентов в уравнениях однородных поверхностей // Матер. Междунар. Молодежн. Симп. «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». Воронеж, 18–19 ноября 2014 г.

14. *Sabzevari M., Hashemi A., M.-Alizadeh B., Merker J.* Applications of differential algebra for computing Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms http://arxiv.org/abs/1212.3070.

Лобода Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ВГАСУ, профессор кафедры цифровых технологий ВГУ.
Тел.: 278-10-28; 271-53-62
E-mail: lobvgasu@yandex.ru

Суковых Валерий Игоревич – аспирант кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет.
Тел. 8-920-406-99-99
E-mail: sukovyh@gmail.com

Loboda Alexander – doctor of Physics-math. Sciences, professor, chair of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, professor, chair of digital technologies of Voronezh State University
Tel.: 278-10-28; 271-53-62
E-mail: lobvgasu@yandex.ru

Sukovykh Valery – Post-Graduate Student, chair of digital technologies, Voronezh State University
Tel. 8-920-406-99-99
E-mail: sukovyh@gmail.com