УДК 681.322

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПО КАНАЛУ КОНКУРИРУЮЩЕГО ДОСТУПА В СИСТЕМАХ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Г. В. Абрамов, А. Е. Емельянов

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный университет инженерных технологий

Поступила в редакцию 08.11.2014 г.

Аннотация. Сетевые характеристики делают анализ, моделирование и управление сетевыми системами управления более сложной и трудной задачей. Рассмотрен сетевой канал передачи со случайной задержкой и потерей пакетов данных. Время случайной задержки моделируется законом распределения Эрланга соответствующего порядка. Вероятность потери пакета зависит как от частоты поступления пакетов данных в канал передачи, так и от параметров закона распределения Эрланга. Предложена модель канала в виде последовательного соединения дискретных элементов. Дискретные элементы производят независимое квантование входного сигнала. Получена формула для определения вероятности потери пакета в процессе передачи.

Ключевые слова: сетевой канал, случайная задержка, вероятность потери пакета.

Annotation. The network characteristics make the analysis, modeling, and control of networked control systems more complex and challenging. Considered the networks channels with random delays and packet loss. Random delay modeled by appropriate distribution the Erlang. The probability of packet loss depends on the arrival rate of data packets in the transmission channel, and the parameters of the distribution Erlang. We propose a model of the channel in the form of a serial connection of discrete elements. Discrete elements produce independent quantizations of the input signal. Obtained a formula to determine the probability of packet loss during transmission.

Keywords: networks canal, random delay, packet loss probability.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ тенденций развития сетевых технологий показывает, что в системах управления все чаще стали использоваться сетевые технологии передачи данных не гарантирующие в общем случае режим реального времени. Использование таких каналов для подключения пространственно-распределенных компонентов системы обладает рядом преимуществ, таких как: снижение затрат на монтажные работы и проводку системы, простоты диагностики, конфигурации и обслуживания системы.

Однако традиционная теория управления динамическими системами предполагает, что сигналы передаются по идеальным каналам, задержки в процессе передачи являются незначительными или же постоянными, потери данных отсутствуют. Эти предположения неверны для каналов передачи данных, использующих конкурирующий доступ к среде передачи данных. Возникающие в процессе передачи случайные временные задержки и потери пакетов данных могут существенно снизить качество функционирования сетевой системы управления, а в отдельных случаях даже привести ее к потере устойчивости [1, 2]. Известны модели сетевого канала передачи данных при простой шинной топологией сети [3, 4]. При более сложной иерархическом построении сети необходимо учитывать ряд факторов:

• передача данных по каналу носит вероятностный характер, т. е. наблюдается случайная временная задержка при передаче пакета данных по каналу;

• в процессе передачи по каналу возможна потеря пакета данных с определенной вероятностью;

• в канале могут находиться одновременно несколько пакетов передаваемых данных, причем их передача должна происходить последовательно.

Попытки удовлетворить все эти требования одновременно приводят к достаточно большой размерности математической модели, что существенно снижает ее ценность [5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Необходимо получить математическую модель канала передачи с конкурирующим доступом, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) возможность использования для моделирования сетевых систем управления;

2) возможность оценки вероятности потери пакета данных;

3) относительно малая размерность модели.

При моделировании сетевого канала были приняты следующие допущения:

1. Закон распределения вероятностей времени передачи данных по сетевому каналу соответствует закону Эрланга порядка n с параметром λ:

$$f(t) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}; \qquad (1)$$

2. Вероятность потери пакета данных в процессе передачи по каналу зависит от закона распределения времени передачи данных.

3. Пакеты данных поступают в сетевой канал последовательно через постоянный промежуток времени T_0 с определенной вероятностью $P_{кв}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

С целью уменьшения размерности математической модели, сетевой канал предложено моделировать последовательным соединением n дискретных элементов. Дискретный элемент представляет собой совокупность квантователя и интегратора, охваченных отрицательной обратной связью [6]. При данном подходе предполагается, что квантователи функционируют независимо друг от друга. При квантовании, входной сигнал мгновенно появляется на выходе соответствующего дискретного элемента. Таким образом происходит последовательная передача сигнала от одного дискретного элемента к другому.

Все квантователи подчиняются одному и тому же закону: квантование осуществляется случайным образом с интенсивностью λ описывается экспоненциальным законом распределения:

$$f_к(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}; \qquad (2)$$

где $f_к(t)$ – плотность распределения вероятности времени между моментами квантования квантователя; t – время.

На вход канала подается информация (пакет данных, сигнал) с периодом T_0. Далее этот пакет последовательно проходит ряд квантователей.

Если пакет данных прошел все n квантователей, то передача считается успешной и пакет поступает на дальнейшую переработку (например, в контроллер). Так как квантователи функционируют независимо друг от друга, то может случится так, что пакет данных, который был передан позже, «догонит» передаваемый ранее пакет и «сотрет» его содержимое. Следовательно, данные этого пакета будут потеряны.

Таким образом, предложенная структурная модель позволяет моделировать сетевой канал, в котором:

1) осуществляется передача пакета данных со случайной временной задержкой, которая подчиняется закону Эрланга n-го порядка;

2) происходит потеря пакета данных в процессе передачи;

3) может одновременно осуществляться последовательная передача нескольких пакетов данных, т. е. в канале может находиться несколько пакетов данных одновременно.

Определим вероятность потери пакета данных в процессе передачи по сетевому каналу.

Вероятность потери пакета данных в сетевой системе управления можно представить следующим образом

$$P = q + P_{кв} \cdot P_n; \tag{3}$$

где P – вероятность потери пакета данных в сетевой системе управления; P_n – вероятность потери пакета данных в процессе передачи данных по каналу; q – вероятность потери пакета данных при квантовании.

$$q = 1 - P_{кв}. \tag{4}$$

Для вероятности P_n можно записать

$$P_n = P_{кв} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_\partial (jT_0). \tag{5}$$

Здесь каждое слагаемое характеризует вероятность того, что новый пакет данных поступает через j тактов квантования T_0 – $(P_{кв} \cdot q^{j-1})$ и при этом произошла потеря пакета в процессе передачи – $P_\partial (jT_0)$.

Вероятность P_∂ для периода квантования (jT_0) можно представить следующим образом

$$P_\partial = \sum_{i=0}^{n-1} P_i; \tag{6}$$

где P_i – вероятность потери пакета данных на i квантователе $(i = \overline{1, n-1})$; P_0 – вероятность потери пакета данных на входе в сетевой канал передачи, т. е. вероятность того, что 1-й квантователь не сработает за время (jT_0) и пакет данных не попадет в канал, так как новые данные «сотрут» старые.

Если пакет данных прошел n квантователей, то передача считается успешной.

Для P_0 имеем

$$P_0 = e^{-\lambda \cdot j \cdot T_0}; \tag{7}$$

Для P_i можно записать

$$P_i = \sum_{k=1}^{i} (\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}); \tag{8}$$

где $\overline{P}_k$ – вероятность того, что за время (jT_0) пакет данных пройдет ровно k квантователей; $P_{i-k,i}$ – условная вероятность того, что пакет данных, прошедший за время (jT_0) ровно k квантователей, далее успеет пройти ровно $(i-k)$ квантователей $(i \geq k)$, когда как следующий за ним пакет пройдет i квантователей и «сотрет» его содержимое, т. е. этот пакет данных будет потерян.

С учетом (8) выражение (6) можно записать

$$P_\partial = P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}); \tag{9}$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}$$

выражение (9) запишем

$$P_\partial = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}; \tag{10}$$

Вероятность $\overline{P}_k$ подчиняется закону Пуассона. Действительно, это вероятность того, что за время (jT_0) произойдет ровно k квантований

$$\overline{P}_k = \frac{(\lambda \cdot j \cdot T_0)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot j \cdot T_0}; \; k = \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Определим вероятность $P_{i,i+k}$.

Это вероятность того, что до момента потери пакета данных произошло i квантований для данного пакета и $(k+i)$ квантований для пакета, который должен «стереть» передаваемые данные.

Так как квантователи одинаковые и независимые, то задачу о нахождении данной вероятности, можно свести к задаче о случайном блуждании. Всего шагов $x = i + (k+i) = 2i + k$ – число срабатываний квантователей для двух пакетов до момента «стирания» старого пакета. В момент, когда «стирающий» пакет достигнет передающий пакет, разность срабатываний квантователей для двух пакетов составит $y = (k+i) - i = k$. Необходимо соблюсти условие: до момента x разность срабатываний квантователей y не должна превышать k.

Таким образом, вероятность $P_{i,i+k}$ соответствует вероятности впервые достигнуть уровня $y = k$ в момент $x = 2i + k$ при движении из начала координат.

Эту вероятность можно записать следующим образом

$$P_{i,i+k} = \frac{M}{N}; \tag{12}$$

где N – число всех путей выходящих из начала координат и достигающих точки (x, y), $x = 2i + k$, $y = k$; M – число всех путей выходящих из начала координат и впервые достигающих уровня $y = k$ в момент $x = 2i + k$.

Так как в каждой точке из $(2i+k)$ имеется 2 возможности (подняться вверх или опуститься вниз), то для N имеем

$$N = 2^{(2i+k)}; \tag{13}$$

Для нахождения M воспользуемся результатом, представленном в [7]:

$$M = \frac{y}{x} \cdot C_x^{(x+y)/2}; \tag{14}$$

Подставляя выражения для x и y в (14) имеем

$$M = \left(\frac{k}{2i+k}\right) \cdot C_{2i+k}^{i+k}; \tag{15}$$

Таким образом, для вероятности $P_{i,i+k}$ имеем

$$P_{i,i+k} = \frac{1}{2^{(2i+k)}} \cdot \left(\frac{k}{2i+k}\right) \cdot C_{2i+k}^{i+k}; \tag{16}$$

После подстановки (10) в (5) имеем

$$\begin{aligned} P_n = P_{\kappa в} \cdot \Bigg(& \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_0(jT_0) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k(jT_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} \Bigg). \end{aligned} \tag{17}$$

Второе слагаемое в скобках уравнения (17) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k(jT_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot \overline{P}_k(jT_0). \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда уравнение (17) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n = P_{\kappa в} \cdot \Bigg(& \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_0(jT_0) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot \overline{P}_k(jT_0) \Bigg). \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим бесконечные суммы, стоящие в скобках в выражении (19).

$$\begin{aligned} S_0 & = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_0(jT_0) = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot e^{-\lambda \cdot j \cdot T_0} = \\ & = e^{-\lambda \cdot T_0} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)^{j-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Введем следующее обозначение

$$u = q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}. \tag{21}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (u)^{j-1} = \left(\frac{1}{1-u}\right), \tag{22}$$

– сумма бесконечно убывающей прогрессии ($u < 1$).

Обозначим

$$Q_0(u) = \frac{1}{1-u}. \tag{23}$$

Тогда выражение (20) примет вид

$$S_0 = \frac{1}{q} \cdot u \cdot Q_0(u). \tag{24}$$

Рассмотрим следующий член выражения (19).

$$\begin{aligned} S_1 & = \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_1(jT_0) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot (\lambda \cdot j \cdot T_0) \cdot e^{-\lambda_j T_0} = \\ & \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot (\lambda \cdot T_0) \cdot e^{-\lambda \cdot T_0} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(q^{j-1} \cdot j \cdot e^{-\lambda (j-1) \cdot T_0}\right) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)}{q} \cdot u \cdot \frac{d}{du}\left[\sum_{j=1}^{\infty} (u)^j\right] = \\ & = \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)}{q} \cdot u \cdot \frac{d}{du}\left[u \cdot \frac{1}{1-u}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Введем обозначение

$$Q_1(u) = \frac{d}{du}\left[u \cdot Q_0(u)\right]. \tag{26}$$

Тогда выражение (25) с учетом (26) примет вид

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)}{q} \cdot u \cdot Q_1(u). \tag{27}$$

Аналогично имеем для произвольного члена второго слагаемого выражения (19)

$$\begin{aligned} S_m & = \sum_{i=0}^{n-m-1} P_{i,i+m} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_m(jT_0) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-m-1} P_{i,i+m} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)^m}{m! \cdot q} \cdot u \cdot Q_m(u). \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$Q_m(u) = \frac{d}{du}\left[u \cdot Q_{m-1}(u)\right]. \tag{29}$$

Таким образом, выражение (19) можно представить следующим образом

$$P_n = \left(\frac{P_{\kappa в} \cdot u}{q}\right) \cdot \left[Q_0(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)^k}{k!} \cdot Q_k(u)\right] \tag{30}$$

А вероятность потери пакета будет определяться по следующей формуле

$$P = q + \left(\frac{P_{\kappa в}^2 \cdot u}{q}\right) \cdot \left[Q_0(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} \cdot \frac{(\lambda \cdot T_0)^k}{k!} \cdot Q_k(u)\right]. \tag{31}$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Допустим, что реальный режим передачи данных в канале может быть аппроксимирован законом Эрланга 2-го порядка со следующими параметрами: $n = 2$; $\lambda = 300$ 1/с. Вероятность потери пакета данных в реальном канале: $P = 0,2$. Пусть, исходя из режима функционирования сетевой системы управления, такт квантования составляет $T_0 = 0,01$ с. Необходимо определить значение вероятности квантования в математической модели канала передачи, для адекватного описания режима передачи в реальном канале.

Вероятность потери пакета данных в модели канала передачи при детерминированном квантовании с тактом T_0 определяется по формуле (10) при $j = 1$:

$$P_{\min} = e^{-\lambda \cdot T_0} \cdot \left[1 + \frac{(\lambda \cdot T_0)}{2}\right] = 2,5 \cdot e^{-3} = 0,124.$$

Так как заданная вероятность $P > P_{\min}$, то возможна корректировка вероятности потери данных в канале передачи, путем имитации вероятностного квантования в математической модели.

Произведем расчет этой вероятности.

Для $n = 2$ из формулы (31) имеем

$$P = q + (P_{кв})^2 \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot T_0}}{(1 - q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0})} \times \left[1 + \frac{(\lambda \cdot T_0)}{2 \cdot (1 - q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0})}\right]. \quad (32)$$

Введем обозначения

$$z = \lambda \cdot T_0;\ a = e^{-\lambda \cdot T_0};\ x = 1 - a \cdot q.$$

Тогда уравнение (32) можно представить следующим образом

$$P = \frac{(1 - x)}{a} + \frac{(x - 1 + a)^2 \cdot (2 \cdot x + z)}{2 \cdot a \cdot x^2}.$$

Откуда

$$(z + 2 \cdot a \cdot (2 - P) - 2) \cdot x^2 + \\ +2 \cdot (1 - a) \cdot (1 - a - z) \cdot x + (1 - a)^2 \cdot z = 0. \quad (33)$$

Подставляя числовые значения в (32), имеем:

$$1,18 \cdot x^2 - 3,895 \cdot x + 2,7075 = 0.$$

Откуда

$$x \approx 0,9924.$$

Следовательно

$$q \approx 0,15.$$

А вероятность квантования

$$P_{кв} \approx 0,85.$$

Таким образом, допуская в математической модели канала передачи квантование с вероятностью $P_{кв} = 0,85$, мы получаем адекватную модель реального процесса передачи данных в сетевом канале системы управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная математическая модель канала передачи данных с конкурирующим доступом к среде передачи позволяет рассчитывать временные характеристики передачи данных при использовании нескольких сетевых устройств. При этом учитываются:

разнообразные законы распределения времени передачи пакетов данных;

вероятность потери пакета данных в процессе передачи;

последовательную передачу пакетов данных по каналу.

Данная модель позволяет рассчитывать широкий спектр топологий сети и обладает относительно малой размерностью, что приводит к снижению вычислительных затрат при моделировании сетевых систем управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дворянников Ю. В., Туманов М. П.* Переменное запаздывание в сетевом компоненте и его влияние на устойчивость систем управления // Системы управления и информационные технологии, 2007. – № 3 (29). – С. 32–35.

2. *Емельянов А. Е.* Повышение эффективности сетевых систем управления // ФЭС: Финансы. Экономика. Стратегия, 2010. – № 6. – С. 34–38.

3. *Абрамов Г. В., Емельянов А. Е., Колбая К. Ч.* Определение закона распределения времени обслуживания заявки информационной системы с множественным доступом к каналу // Системы управления и информационные технологии, 2008. – № 3 (33). – С. 49–51.

4. *Абрамов Г. В., Данилов Р. В.* Определение закона распределения времени доставки па-

кетов с сетях с конкурирующим доступом к среде передачи данных. / Г. В. Абрамов, Р. В. Данилов, // Вестник компьютерных и информационных технологий. – Москва, 2012. – № 10 (100) – С. 52–56.

5. *Абрамов Г. В., Емельянов А. Е., Ивлиев М. Н.* Моделирование сетевых систем управления с передачей информации по каналу множественного доступа с учетом зависимости потоков квантования. // Системы управления и информационные технологии, 2008. – № 1 (31). – С. 4–7.

6. *Абрамов Г. В., Емельянов А. Е., Ивашин А. Л.* Функционирование цифровой системы в асинхронном режиме. // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий, 2009. – № 2. – С. 84–88.

7. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. – М. : Наука, 1982. – 160 с.

Абрамов Геннадий Владимирович – д.т.н., профессор кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета. Тел.: (473) 2-20-83-48.
E-mail: agwl@yandex.ru

Емельянов Александр Егорович – к.т.н., доцент кафедры информационных и управляющих систем Воронежского государственного университета инженерных технологий.
Тел.: (473) 2-55-38-75.
E-mail: emalexeg@yandex.ru

Abramov Gennady Vladimirovich – Full Professor, Dr.Sci.Tech., Department of mathematics and applied analysis, Voronezh state University. Tel.: (473) 2-20-83-48.
E-mail: agwl@yandex.ru

Emelyanov Alexander Ye. – Ph.D., Associate Professor, Department of Information and Control Systems, Voronezh State University of Engineering Technology.
Tel.: (473) 2-55-38-75.
E-mail: emalexeg@yandex.ru