УДК 519.816

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИЙ АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНОЧНЫХ СИСТЕМ

Т. М. Леденева, Д. А. Денисихина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.10.2014 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается аксиоматический подход к выбору функций агрегирования при разработке оценочных систем для сложных объектов, основанных на многокритериальных (многоатрибутных) моделях.
Ключевые слова: многокритериальность, функция (операция) агрегирования, весовые коэффициенты.
Annotation. TThis article discusses the axiomatic approach to the choice of aggregation functions in the development of evaluation systems for complex objects based on multicriteria models.
Keywords: multicriteriality, function (operation) aggregation, weights.

ВВЕДЕНИЕ

Практические задачи оценки сложных объектов отличаются наличием значительного количества критериев (показателей, признаков, атрибутов), характеризующих их свойства. В связи с этим задача формирования подходящих моделей оценки имеет особую актуальность. Основой для ее решения служат многокритериальные модели. Под критерием понимается такой показатель, который на оптимальном решении достигает своего экстремального значения (максимум прибыли, минимум времени и т.п.). С другой стороны, можно выделить задачи, где требуется построить некоторую комплексную характеристику, которая в целом характеризует объекты. Такие показатели в иностранной литературе называются атрибутами, а соответствующие модели – многоатрибутными. Многокритериальные и многоатрибутные модели, по сути, имеют одинаковую структуру. Они широко используются для оценки сложных объектов, проектов, процессов и систем в технике, экономике, в социальных системах (оценка качества продукции, оценка социально-экономического развития региона за определенный период, оценка знаний, рейтинги и т.д.). Следует заметить, что не всегда учитываются те возможности математического моделирования, которые существуют в настоящее время для построения методов оценки и обработки полученной информации. Ключевую роль играет выбор операции агрегирования, которая позволяет сопоставить каждому объекту некоторое число, которое характеризует его в целом, по всему набору критериев (показателей).

Цель статьи заключается в развитии аксиоматического подхода к построению функций (операций) агрегирования, что позволит, в конечном счете, повысить степень обоснованности и корректности оценочных процедур.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу: пусть $U = \{u\}$ – заданное множество объектов, $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ – множество показателей (критериев, атрибутов), характеризующих свойства объектов из U; $P_i(u) = x_i$ – частная оценка объекта u по i-му показателю, так что $x = (x_1, \dots, x_n)$ – векторная оценка объекта u. Требуется построить ранжирование объектов или выбрать лучший на основе некоторой комплексной характеристики, учитывающей все показатели или их большую часть, при этом под комплексной характеристикой объекта будем понимать его оценку, которая получается на основе агрегирования компонент x_i векторной оценки x в соответствии с определенным принципом.

Под *агрегированием* будем понимать переход от векторной оценкиразмерности n к скалярной величине, которая называется *обобщенной* (групповой, комплексной, интегральной) *оценкой* объекта.

Под *оценочной системой* будем понимать кортеж [1]

$$\left(U, P, S, A, R\right),$$

где U – множество объектов, P – множество показателей (атрибутов, критериев), S – совокупность шкал показателей, A – функция агрегирования, R – правило принятия решений.

При построении оценочной системы на этапе предварительного анализа должны быть решены следующие задачи [1, 2]:

– формирование множества показателей, характеризующих объекты и отражающие цели принятия решений (результат – перечень показателей);

– разбиение показателей на группы однородных по типу информации (результат – группы показателей, имеющих одинаковую природу);

– выявление взаимосвязей между показателями (результат – иерархия (дерево) показателей, регрессионные, логические и другие модели);

– формализация показателей с помощью соответствующих переменных и построение шкал (результат – шкалы);

– обеспечение свойства однородности информации за счет перехода к универсальным шкалам (результат – универсальные шкалы);

– формирование требований к процедуре агрегирования и выбор подходящего оператора агрегирования.

В связи с многообразием операторов агрегированияпроблема выбора подходящего для конкретной задачи оператора занимает центральное место, поскольку ее решение влияет на ключевые свойства оценочной системы, такие, как адаптивность, эффективность вычислений, учет типа исходных данных и стратегии агрегирования. Большое значение имеют параметрические формы функций агрегирования, так как за счет выбора подходящих значений параметров можно обеспечить гибкость системы и ее настройку на информационную среду конкретного пользователя.

2. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПЕРАЦИЙ АГРЕГИРОВАНИЯ

Наиболее общий подход к агрегированию информации заключается в аксиоматическом определении функции (операции) агрегирования.

Исследователи определяют функцию агрегирования, исходя из различных наборов свойств, среди которых определяющими являются монотонность, ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, наличие нейтрального элемента, а также дополнительные условия, накладываемые на обобщенную оценку [2]. Комбинирование перечисленных свойств порождает различные семейства операторов агрегирования, многие из которых являются параметрическими.

Пусть $x = \left(x_1, \dots, x_n\right)$ – векторная оценка объекта. В дальнейшем будем полагать, что $\forall i = \overline{1,n} \quad \left(x_i \in \left[0,1\right]\right)$, компоненты x_i будем называть *частными оценками*.

Формально операция агрегирования n $\left(n \geq 2\right)$ частных оценок представляет собой отображение $A : \left[0,1\right]^n \to \left[0,1\right]$.

В качестве основных для определения операции агрегирования будем рассматривать следующие свойства (аксиомы).

Свойство 1 (граничные условия) заключается в выполнении следующих условий: $A\left(0,\dots,0\right) = 0, \;\; A\left(1,\dots,1\right) = 1.$

Свойство 2 (монотонность). Для любых пар векторных оценок $x = \left(x_1, \dots, x_n\right)$ и $y = \left(y_1, \dots, y_n\right)$ из $\left[0,1\right]^n$ таких, что $x \leq y \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,n}\left(x_i \leq y_i\right)$, выполняется неравенство $A\left(x\right) \leq A\left(y\right)$.

Свойство 3 (непрерывность). $A\left(x_1, \dots, x_n\right)$ – непрерывная функция.

Свойство 4 (коммутативность). Для любой векторной оценки $x = \left(x_1, \dots, x_n\right)$ имеет место

$$A(x_1,...,x_n)=A(x_{p(1)},...,x_{p(n)}),$$

где $(p(1),...,p(n))$ – произвольная перестановка индексов $\{1,...,n\}$.

Свойство 5 (идемпотентность). Для любой векторной оценки $(c,...,c)$ выполняется $A(c,...,c)=c$.

Перечисленные свойства являются вполне естественными и отражают интуитивные требования к результату агрегирования. Свойство 1 означает, что если все частные оценки минимальные (0) или максимальные (1), то и обобщенная оценка минимальна (0) или максимальна (1). Монотонность означает, что если хотя бы одна частная оценка увеличится (уменьшится), то и обобщенная оценка увеличится (уменьшится). Согласно свойству 3, малым изменениям частных оценок соответствует небольшое изменение обобщенной оценки. Коммутативность означает, что все оценки являются одноуровневыми и оказывают равноценное влияние на обобщенную оценку. Идемпотентность отражает тот факт, что если все частные оценки равны между собой, то и обобщенная оценка должна быть такая же.

Перечисленные свойства являются основными, их комбинации порождают основные классы операций (функций) агрегирования.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Если операция агрегирования $A(x_1,...,x_n)$ удовлетворяет свойствам 2 и 5, то для нее также выполняется следующее неравенство

$$\min\{x_1,...,x_n\}\le A(x_1,...,x_n)\le \max\{x_1,...,x_n\}. \quad (1)$$

В самом деле, пусть $x_*=\min\{x_1,...,x_n\}$, $x^*=\max\{x_1,...,x_n\}$, тогда в силу свойств 2 и 5 получим

$$x_*=\min\{x_*,...,x_*\}\le A(x_1,...,x_n)\le \\ \le \max\{x^*,...,x^*\}=x^*.$$

Утверждение 2. Если операция агрегирования $A(x_1,...,x_n)$ удовлетворяет (1), то она является идемпотентной, т.е. выполняется свойство 5.

Заметим, что для произвольной векторной оценки $(b,...,b)$ имеет место

$$b=\min\{b,...,b\}\le A(b,...,b)\le \\ \le \max\{b,...,b\}=b,$$

откуда с очевидностью $A(b,...,b)=b$.

Таким образом, все операции агрегирования $A(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющие свойству (1), являются идемпотентными. Они образуют семейство *операций осреднения* [4].

Укажем некоторые примеры операций агрегирования, относящихся к данному классу.

Обобщенное среднее определяется формулой

$$A_\alpha(x_1,...,x_n)=\left(\frac{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, \quad (2)$$

где $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_i\ne 0$ для всех $i\in\{1,...,n\}$, когда $\alpha<0$.

Рассмотрим некоторые предельные значения параметра α.

При $\alpha\to 0$ обобщенное среднее $A_\alpha(x_1,...,x_n)$ превращается в среднее геометрическое

$$A_0(x_1,...,x_n)=(x_1\cdot...\cdot x_n)^{1/n}. \quad (3)$$

В самом деле, найдем предел, используя правило Лопиталя,

$$\lim_{\alpha\to 0}\ln A_\alpha(x_1,...,x_n)= \\ =\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(x_1^\alpha+...+x_n^\alpha)-\ln n}{\alpha}= \\ =\lim_{\alpha\to 0}\frac{x_1^\alpha\ln x_1+...+x_n^\alpha\ln x_n}{x_1^\alpha+...+x_n^\alpha}= \\ =\frac{\ln x_1+...+\ln x_n}{n}=\ln(x_1\cdot...\cdot x_n)^{1/n},$$

откуда $\lim\limits_{\alpha\to 0}A_\alpha(x_1,...,x_n)=(x_1\cdot...\cdot x_n)^{1/n}$.

Также можно показать, что

$$A_{-\infty}(x_1,...,x_n)=\lim_{\alpha\to-\infty}A_\alpha(x_1,...,x_n)= \\ =\min\{x_1,...,x_n\}, \quad (4)$$

$$A_{\infty}(x_1,...,x_n)=\lim_{\alpha\to\infty}A_\alpha(x_1,...,x_n)= \\ =\max\{x_1,...,x_n\}. \quad (5)$$

Функция $A_\alpha(x_1,...,x_n)$ представляет параметрическое семейство непрерывных, коммутативных и идемпотентных операций осреднения. Наиболее известные операции, принадлежащие данному семейству, следующие [4]: при $\alpha=-1$ получим *среднее гармоническое*

$$A_{-1}(x_1,...,x_n)=\frac{n}{1/x_1+...+1/x_n}, \quad (6)$$

а при $\alpha=1$ имеем среднее арифметическое

$$A_1(x_1,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i. \quad (7)$$

Другой класс операций осреднения образуют *порядковые операторы взвешенного агрегирования* – OWA [3, 5].

n-местный OWA*-оператор*, ассоциированный с вектором весов $W=(w_1,...,w_n)$, который удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ $\left(\forall i=\overline{1,n}\left(w_i \in (0,1]\right)\right)$, определяется следующим образом:

$$A_W(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_{\sigma(i)}, \qquad (8)$$

где $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$ – перестановка, такая, что $x_{\sigma(1)} \ge x_{\sigma(2)} \ge ... \ge x_{\sigma(n)}$.

Таким образом, обобщенная оценка, вычисленная на основе OWA-оператора, есть результат скалярного произведения вектора весов Wна вектор, полученный из $(x_1,...,x_n)$ упорядочением элементов по невозрастанию. Обозначим $\hat{x}_i = x_{\sigma(i)}$,, тогда $\hat{x}=(\hat{x}_1,...,\hat{x}_n)$ – это упорядоченный вектор *x*, и $A_W(x)=\sum_{i=1}^{n} w_i\hat{x}_i=(W,\hat{x})$.

Для специальных наборов весов получим следующие операции [3]:

а) при $W_*=(0,...,0,1)$ $A_{W_*}(x)=\min\{x_1,...,x_n\}$,

б) при $W^*=(1,0,...,0)$ $A_{W^*}(x)=\max\{x_1,...,x_n\}$,

в) при $W_\Delta=\left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)$ $A_{W_\Delta}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Рассмотрим некоторые дополнительные свойства операций и функций агрегирования.

<u>*Утверждение 3*</u>. Пусть $A:[0,1]^n \to \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая свойствам 1 и 2, а также свойству

$$\begin{gathered} A(x_1+y_1,...,x_n+y_n)= \\ =A(x_1,...,x_n)+A(y_1,...,y_n), \end{gathered} \qquad (9)$$

где $x_i, y_i, x_i+y_i \in [0,1]$ для всех $i\in\{1,...,n\}$, тогда

$$A(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \qquad (10)$$

где $w_i>0$ для каждого $i\in\{1,...,n\}$.

Доказательство. Введем функции $\lambda_i(x_i)=A(0,...0,x_i,0,...,0)$ для всех $i\in\{1,...,n\}$. Заметим, что в этом случае имеет место выражение

$$\lambda_i(x+y)=\lambda_i(x)+\lambda_i(y), \qquad (11)$$

которое известно как функциональное уравнение Коши и его решением является функция [6] $\lambda_i(x)=w_i x$, где $x\in[0,1]$ и $w_i>0$.

Таким образом, в силу (9) и (11), получим

$$\begin{gathered} A(x_1,...,x_n)=A(x_1,0,...,0)+A(0,x_2,0,...0)+... \\ +A(0,...,0,x_n)=\lambda_1(x_1)+\lambda_2(x_1)+...+\lambda_2(x_1)= \\ =w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i. \end{gathered}$$

Заметим,чтофункция $A(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ удовлетворяет свойству 5, так как $A(b,...,b)=\sum_{i=1}^{n} w_i b = b\sum_{i=1}^{n} w_i = b\cdot 1 = b$ для любого $b\in[0,1]$.

<u>*Утверждение 4*</u>. Пусть $A:[0,1]^n \to [0,1]$ – операция агрегирования, удовлетворяющая свойствам 1 и 3, а также свойствам

$$\begin{gathered} A(\max\{x_1,y_1\},...,\max\{x_n,y_n\})= \\ =\max\{A(x_1,...,x_n),A(y_1,...,y_n)\}, \end{gathered} \qquad (12)$$

$$\lambda_i(\lambda_i(x_i))=\lambda_i(x_i), \qquad (13)$$

где $\lambda_i(x_i)=A(0,...0,x_i,0,...,0)$ для всех $i\in\{1,...,n\}$, тогда

$$\begin{gathered} A(x_1,...,x_n)= \\ =\max\{\min\{x_1,w_1\},...,\min\{x_n,w_n\}\}, \end{gathered} \qquad (14)$$

где $(w_1,...,w_n)$ – набор весов, таких, что $w_i\in[0,1]$ для всех $i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Так как $A(x_1,...,x_n)=A(\max\{x_1,0\},...,\max\{x_n,0\})$, то с учетом (12) получим

$$\begin{gathered} A(x_1,...,x_n)=\max\{A(x_1,0,...,0), \\ A(0,x_2,0,...,0),...,A(0,...,0,x_n)\}. \end{gathered}$$

Заметим, что $A(0,x_2,x_3,...,x_n)$ можно заменитьна $\max\{A(0,x_2,0,...,0),A(0,0,x_3,0,...,0)\}$. Повторяя такое преобразование для переменных $x_3,x_4,...,x_n$, через определенное число шагов получим

$$\begin{gathered} A(x_1,...,x_n)=\max\{A(x_1,0,...,0), \\ A(0,x_2,0,...,0),...,A(0,...,0,x_n)\}= \\ =\max\{\lambda_1(x_1),...,\lambda_n(x_n)\}. \end{gathered}$$

Покажем, что $\lambda_i(x_i)=\min\{w_i,x_i\}$ для всех $i\in\{1,...,n\}$. В самом деле, по условию $\lambda_i(x_i)$ – непрерывная, неубывающая функция, такая что $\lambda_i(0)=0$. В силу (13) $\lambda_i(\lambda_i(x_i))=\lambda_i(x_i)$. Пусть при $x_i=1$ $\lambda_i(1)=A(0,...0,\underset{i}{1},0,...,0)=w_i$, тогда область значений $\lambda_i(x_i)$ есть промежуток $[0,w_i]$. Для любого $x_i\in[0,w_i]$ существует такое значение t_i, что $x_i=\lambda_i(t_i)$, и тогда $\lambda_i(x_i)=\lambda_i(\lambda_i(t_i))=\lambda_i(t_i)=x_i=\min\{w_i,x_i\}$. Для любого $x_i \in [w_1, 1]$ имеем $w_i = \lambda_i(1) = \lambda_i(\lambda_i(1)) = \lambda_i(w_i) \le \lambda_i(x_i) \le \lambda_i(1) = w_i$ и, следовательно, $\lambda_i(x_i) = w_i = \min\{w_i, x_i\}$. Доказательство завершено.

Функции, для которых выполняется (14) называются *взвешенными квазисредними* [4].

Аналогично доказывается следующее

Утверждение 5. Пусть $A:[0,1]^n \to [0,1]$ – функция агрегирования, удовлетворяющая свойствам 1 и 3, а также свойства

$$A(\min\{x_1, y_1\}, ..., \min\{x_n, y_n\}) = \\ = \min\{A(x_1, ..., x_n), A(y_1, ..., y_n)\}, \quad (15)$$

$$\lambda_i(x \cdot y) = \lambda_i(x) \cdot \lambda_i(y) \text{ и } \lambda_i(0) = 0 \\ \text{для всех } i \in \{1, ..., n\}, \quad (16)$$

где $\lambda_i(x_i) = A(1, ...1, x_i, 1, ..., 1)$ для каждого $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда существуют такие числа $v_1, ..., v_n \in [0,1]$, что

$$A(x_1, ..., x_n) = \min\{x_1^{v_1}, ..., x_n^{v_n}\}. \quad (17)$$

Таким образом, арсенал операций и функций агрегирования многообразен, причем в конкретных задачах могут быть актуализированы те или иные свойства, что позволяет ограничиться некоторыми классами этих важнейших операций.

3. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

При проектировании систем вентиляции помещений важно количественно оценить каждый проект в целом и выбрать лучший для реализации. Пусть имеется помещение определенного объема, которое делится на несколько зон. Предположим, что в помещении осуществляются замеры параметров, характеризующих комфортность, в N точках, которые определенным образом распределены в объеме. Каждая точка может быть отнесена к одной из категорий $\{A, B, C, D\}$, образующих упорядочение $A \succ B \succ C \succ D$, причем A соответствует самой высокой категории комфортности, а D означает отсутствие комфортности (дискомфорт). Будем считать, что каждая из зон имеет свою значимость при проектировании системы вентиляции, однако могут быть и такие зоны, для которых особых требований не выдвигается. Очевидно, что, если зона имеет большой вес, то плотность контрольных точек в ней может быть большей, чем в той зоне, которая в меньшей степени влияет на комфортность помещения. По сути, каждая из зон представляет собой множество точек, каждая из которых имеет определенную категорию.

Пусть $Z^+ = \{Z_{i_1}^+, ..., Z_{i_{S_1}}^+\}$ – подмножество зон, к которым предъявляются требования, а $Z^- = \{Z_{i_1}^-, ..., Z_{i_{S_2}}^-\}$ включает те зоны, к которым требования не предъявляются, так что $Z^+ \cup Z^- = Z$ – множество всех зон, которые выделены в помещении, $s_1 + s_2 = s$ – их количество. Каждая из зон может быть отнесена только к одному классу Z^+ или Z^-.

Для вычисления комплексной оценки проекта предлагается формула

$$ComplexValue = \alpha \cdot \underbrace{Agg_1\left(f\left(Z_{i_1}^+\right), ..., f\left(Z_{i_{S_1}}^+\right)\right)}_{Value(Z^+)} + \\ + (1-\alpha) \cdot \underbrace{Agg_2\left(g\left(Z_{i_1}^-\right), ..., g\left(Z_{i_{S_2}}^-\right)\right)}_{Value(Z^-)},$$

где f, g – функции агрегирования для каждого типа зоны, с помощью параметра $\alpha \in [0,1]$ можно регулировать отношением к тем или иным зонам. Если $\alpha = 0.5$, то оба типа зон будут считаться одинаково значимыми для комплексной оценки; если $\alpha > 0.5$, то большую значимость при оценке проекта будут иметь зоны, для которых установлены требования по комфортности.

Рассмотрим общие требования к функциям f, g, Agg_1, Agg_2.

В класс Z^+ входят зоны $Z_j^+ \left(j \in \{i_1, ..., i_{s_1}\}\right)$, к которым предъявляются требования. Пусть $Z_j^+ = \{x_1^j, ..., x_{n_j}^j\}$ – множество точек, образующих зону Z_j^+, каждая из которых относится к той или иной категории, причем в каждой точке x_t^j известно требование ε_t^j к категории, $\left(t = \overline{1, n_j}\right)$. Очевидно, что в этом случае комплексная оценка проекта должна учитывать, выполнены ли в данной точке требования.

Для оценки несоответствия введем функцию расстояния между категориями. Так как категории упорядочены по предпочтительности, то каждой из них поставим в соответствие позицию (номер) в этом упорядочении, т.е. категории $K_i \in \{A, B, C, D\}$ поставим в соответствие позицию $\partial(K_i) = j$, если категория K_i стоит на j-м месте в упорядочении

$A \succ B \succ C \succ D.$ Расстояние между категориями K_i и K_j будем вычислять по формуле $\rho\left(K_i, K_j\right) = \frac{\left|\pi\left(K_i\right) - \pi\left(K_j\right)\right|}{3} \in [0,1].$ Легко показать, что $\rho\left(K_i, K_j\right)$ удовлетворяет аксиомам функции расстояния.

Таким образом, для каждой точки x_t^j, к которой предъявляется требование ε_t^j, будет вычислено расстояние $\rho\left(x_t^j, \varepsilon_t^j\right) \in [0,1].$ Для определения обобщенной оценки зоны $f\left(Z_j^+\right)$ целесообразно использовать операцию порядкового агрегирования OWA, сформировав вектор весов на основе квантора нечеткого большинства [3]. Другой вариант – вычислить среднюю величину расстояния для всего множества точек Z_j^+. В результате обобщенные оценки $f\left(Z_{i_1}^+\right), \ldots, f\left(Z_{i_{S_1}}^+\right)$ позволят вычислить несоответствие требуемым категориям в каждой из зон. Каждая из зон $Z_j^+ \in Z^+$ может иметь свой весовой коэффициент w_j, который назначается экспертом так, чтобы выполнялось условие нормировки $\sum_{j=1}^{s_1} w_j = 1.$ Тогда обобщенная оценка для класса Z^+ может быть представлена в виде

$$Value\left(Z^+\right) = Agg_1\left(f\left(Z_{i_1}^+\right), \ldots, f\left(Z_{i_{S_1}}^+\right)\right) = \sum_{j=1}^{s_1} w_j \cdot f\left(Z_j^+\right)$$

и характеризует в целом несоответствие предъявляемым требованиям.

Для точек из класса Z^- требований не задано, однако каждая из зон $Z_l^- \in Z^-$ также, как и предыдущем случае, может иметь свой вес v_l, причем $\sum_{l=1}^{s_2} v_l = 1.$ При определения качества каждой зоны $Z_l^- = \left\{y_1^l, \ldots, y_{n_l}^l\right\}$ будем считать, что чем больше точек, имеющих категорию A (или A и B), тем лучше. Поэтому в качестве оценки $g\left(Z_l^-\right)$ будем использовать относительную частоту появления точек с указанными категориями, т. е. $g\left(Z_l^-\right) = \frac{n_l^{(A)}}{n_l}$ или $g\left(Z_l^-\right) = \frac{n_l^{(A)} + n_l^{(B)}}{n_l}$, где $n_l^{(A)}$, $n_l^{(B)}$ – количество точек, имеющих категорию A и B соответственно. Обобщенная оценка класса Z^- может быть вычислена по формуле взвешенного среднего

$$Value\left(Z^-\right) = Agg_2\left(g\left(Z_{i_1}^-\right), \ldots, g\left(Z_{i_{S_2}}^-\right)\right) = \sum_{j=1}^{s_2} v_l \cdot g\left(Z_l^-\right).$$

Преимуществами предложенной методики являются гибкость при построении комплексной оценки проекта, возможность учитывать требования к различным зонам помещения и простота вычислений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение операций и функций агрегирования на тестовых примерах позволило сделать следующие выводы:

1. Операции max и min, реализующие дизъюнктивное и конъюнктивное агрегирование соответственно, являются жесткими, в том смысле даже значительные изменения аргументов могут не оказать влияния на результат операции. Дизъюнктивное агрегирование обусловлено лучшей из частных оценок, а конъюнктивное – худшей. max и min – пара операций, обладающих противоположными свойствами при агрегировании.

2. Операции взвешенного порядкового агрегирования OWA обладают способностью реализовать компромисс межу конфликтующими критериями (показателями) [7, 8]. Они обладают рядом числовых характеристик, которые позволяют идентифицировать стратегию агрегирования, отношение к риску, наличие компенсационных свойств а, следовательно, появляется возможность целенаправленного выбора операции агрегирования.

3. Различные операции, относящиеся к семействам средних, полезны при агрегировании несильно отличающихся данных, в то время, как для векторных оценок со значительным разбросом они не подходят.

4. Для многоступенчатых процедур принятия решений могут использоваться разные операции агрегирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леденева Т. М.* Моделирование оценочных систем на основе принципа многоальтернативности / Т. М. Леденева, С. Л. Подвальный // Си-

стемы управления и информационные технологии. – Т. 57. – № 3-1, 2014. – С. 155–161.

2. *Леденева Т. М.* Моделирование процесса агрегирования информации в целенаправленных системах (Серия: Моделирования, Оптимизация и компьютеризация в сложных системах, Кн. 8) // Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во Воронежского государственного технического университета, 1999. – 155 с.

3. *Леденева Т. М., Тафинцева М.* Моделирование свойств порядковых операторов взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, М. Тафинцева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – № 1, 2006. – С. 66–72.

4. *Джини К.* Средние величины / К. Джини. – М. : Статистика, 1970. – 448 с.

5. *Yager R. R.* Ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18(1988), pp. 183–190.

6. *Acsel J.* Lectures on Functional Equations and Their Applications / J. Acsel. – New York : Academic Press, 1969.

7. *Леденева Т. М.* О формализации компромиссной стратегии агрегирования / Т. М. Леденева // Сб. матер. IIIВсерос. научн.-техн. конф. «Теория конфликта и ее приложения». – Воронеж, 2004. – С. 101–109.

8. *Леденева Т. М., Недикова Т. Н.* Операторы агрегирования в оценочных моделях / Т. М. Леденева, Т. Н. Недикова // Информационные технологии. – № 2, 2003. – С. 2–9.

Леденева Татьяна Михайловна – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Денисихина Дарья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теплогазоснабжения и вентиляции, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
E-mail: denisikhina@mail.ru

Ledeneva Tatiana. M. – Doctor of Technic Science, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University. E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Denisihina Daria M. – Candidate of Physical andMathematical Sciences, Associate professor, Assistant professor of Heat and Ventilation, Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering.
E-mail: denisikhina@mail.ru