УДК 519. 3:62-50

НЕЛИНЕЙНАЯ ТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Т. К. Юлдашев

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева*

Поступила в редакцию 09.07.2014 г.

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы аналитического и приближенного решения точечной задачи нелинейного оптимального управления для псевдопараболического уравнения третьего порядка при смешанных условиях. Сформулированы необходимые условия оптимальности управления. Получены формулы вычисления оптимального управления, оптимального процесса и минимального значения функционала.
Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, смешанные условия, необходимые условия оптимальности управления, обобщенная разрешимость, минимизация функционала.
Annotation. In this article it is considered the analytical and approximation solving problem of nonlinear point optimal control for partial pseudoparabolic differential equations of the third order with mixed value conditions. It is formulated the necessary conditions for optimal control. It is obtained the formulas for calculating the optimal control, the optimal process and the minimum value of the functional.
Keywords: pseudoparabolic equations, mixed value conditions, necessary conditions for optimal control, generalized solvability, functional minimization.

ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к изучению начальных, смешанных и обратных задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка [1, 2].

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований к быстродействию и точности систем регулирования. На основе математической теории оптимального управления разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления [3–7].

Сложность задач теории оптимального управления потребовала более широкой математической базы для ее построения. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями с частными производными, стала разрабатываться сравнительно недавно. За короткое время она получила бурное развитие все шире проникая в различные области техники и технологических процессов. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д [8–14].

Одним из направлений теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является разработка методов решения задач оптимального управления при наличии подвижных источников. В задачах оптимального управления с точечными подвижными источниками часто приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях.

Разработка математических методов и создание на их основе пакетов прикладных программных комплексов, ориентированных на автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением современных компьютеров, являются в настоящее время важнейшими задачами. Успешному решению этой задачи в значительной мере способствует разработка эффективных численных методов и программных средств для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используются широкий спектр разных методов (см. [15–17]).

В данной работе рассматриваются вопросы аналитического и приближенного решения точечной нелинейной задачи оптимального управления для псевдопараболического уравнения с начальными и граничными условиями и квадратичным критерием оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в области D управляемый процесс описывается псевдопараболическим уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x)-\nu\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}= \tag{1}$$
$$=\delta(x-x_0)\,f\big(t,\ p(t)\big)$$

со смешанными условиями

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi(x), \tag{2}$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=1}=0, \tag{3}$$

где $f\big(t,p\big)\in C(D_T\times\Omega)$, $p(t)$ – управляющая функция, $0<\nu$ – малый параметр, $\varphi(x)_{|x=0}=\varphi(x)_{|x=1}=0$, $\varphi(x)\in C^3(D_1)$, $\delta(x-x_0)$ – дельта-функция Дирака, $D\equiv D_T\times D_1$, $D_T\equiv[\,0,T\,]$, $\Omega\equiv[\,0,M\,]$, $0<M<\infty$, $D_1\equiv[\,0,1\,]$, $0<x_0<1$, $0<T<\infty$.

Здесь, как и в работах [18–20], при фиксированном управлении $p(t)$ используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\cdot b_i(x), \tag{4}$$

где $b_i(x)=\sqrt{2}\,\sin\lambda_i x$, $\lambda_i=i\pi$, $i=1,2,\ldots$.

Задача. Найти такую управляющую функцию

$$p^*(t)\in\left\{p^*:\left|\ p^*(t)\right|\le M^*,\ t\in D_T\right\}$$

и соответствующее ей состояние $u^*(t,x)$ – решение смешанной задачи (1)–(3), что доставляют минимум функционалу

$$J[p]=\int_0^1\left[u(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2(t)\,dt, \tag{5}$$

где $\xi(x)$ – заданная функция такая, что

$$\xi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i b_i(x),\ \ \xi_i=\int_0^1\xi(x)b_i(x)\,dx,$$
$$\xi(0)=0,\ \ 0<\beta=\text{const}.$$

В данной работе, в отличия от работ [21, 22], на основе принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности, вычисляется управляющая функция и решается соответствующая смешанная задача (1) и (3).

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Обозначим
$\bar{C}_u^{2,1}(D)=\left\{u(t,x): u\in C^{2,1}(D),\, u(t,0)=u(t,1)=0\right\}$,

$\bar{C}_w^{2,1}(D)=\left\{w(t,x):\, w\in C^{2,1}(D),\; w(T,x)=0\right\}$.

Замыкание этих пространств по норме

$$\|\, u\,\|_{\bar{H}(D)}=\left\{\int_0^T \left|\, u(t,x)\right|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty$$

обозначим соответственно $\bar{H}_u(D)$, $\bar{H}_w(D)$.

Для числовой последовательности φ_i в пространстве ℓ_2 вводим следующую норму

$$\|\varphi\|_{\ell_2}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\,\varphi_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Определение. Если функция $u(t,x)\in\bar{H}_u(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^1\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial w(t,y)}{\partial t}-\nu\,\frac{\partial^3 w(t,y)}{\partial t\,\partial y^2}-\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2}\right]-\delta(y-x_0)\,f\left(t,p(t)\right)w(t,y)\right\}dydt=$$
$$=\int_0^1\varphi\left[w(t,y)-\nu\frac{\partial^2 w(t,y)}{\partial y^2}\right]_{t=0}dy \qquad (6)$$

для любой функции $w(t,x)\in\bar{H}_w(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Решение смешанной задачи (1)–(3) при фиксированных значениях управления с помощью ряда Фурье (4) и интегрального тождества (6) можно представить в следующем виде [19, 22]

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}+\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times b_i(x_0)f\left(s,p(s)\right)ds\right\}b_i(x), \qquad (7)$$

где $\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu$, $\quad \omega_{1i}(\nu)=\dfrac{\lambda_i^2}{\omega_{0i}(\nu)}$,

$$\varphi_i=\int_0^l\varphi(y)\,b_i(y)dy.$$

Пусть нелинейная функция $f\left(t,p(t)\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f\left(t,0\right)=0; \qquad (8)$$

$$f\left(t,p(t)\right)\in Bnd(M_0)\cap Lip\left\{L_{0|p}\right\},\quad 0<M_0,\ L_0=\text{const}; \qquad (9)$$

$$f_p\left(t,p(t)\right)\neq 0, \qquad (10)$$

где $f_p\left(t,p(t)\right)=\dfrac{\partial f\left(t,p(t)\right)}{\partial p}$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)\in L_2(D_1)$ и функция $f\left(t,p(t)\right)$ удовлетворяет условиям (8)–(10). Тогда для функции (7) справедливо: $u(t,x)\in\bar{H}_u(D)$.

Доказательство. Действительно, имеем

$$\int_0^T\int_0^1 u^2(t,x)dxdt\le\int_0^T\int_0^1\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}+\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times b_i(x_0)f\left(s,p(s)\right)ds\right]b_i(x)\right\}^2dxdt\le$$
$$\le 2\int_0^T\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}\right]^2+2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times b_i(x_0)f\left(s,p(s)\right)ds\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times b_i(x_0)f\left(s,p(s)\right)ds\right]^2\right\}dt\le$$
$$\le 2T\|\varphi\|_{\ell_2}^2+4\sqrt{2}T^2\|\varphi\|_{\ell_2}M_0M_1M_2+4T^3\left(M_0M_1M_2\right)^2<\infty,$$

где

$$M_1=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left\|\frac{1}{\omega_0(\nu)}\right\|_{\ell_2},$$

$$M_2 = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \max_{(t,s)} \left\{ \exp\left\{ -2\omega_{1i}(\nu)(t-s) \right\} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\| \max_{(t,s)} \left\{ \exp\left\{ -2\omega_1(\nu)(t-s) \right\} \right\} \right\|_{\ell_2} .$$

Отсюда следует утверждения теоремы. Нетрудно убедиться, что при выполнении условий этой теоремы функция (7) является единственным решением смешанной задачи (1)–(3).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть $p^*(t)$ является оптимальным управлением:
$\Delta J\left[p^*(t) \right] = J\left[p^*(t) + \Delta p^*(t) \right] - J\left[p^*(t) \right] \geq 0$,
где $p^*(t) + \Delta p^*(t) \in \bar{H}(D_T)$.

Не трудно показать, что применение принципа максимума приводит к следующим необходимым условиям оптимальности

$$\vartheta(t, x_0) f_p\left(t, p^*(t)\right) - 2\beta p^*(t) = 0, \quad (11)$$

$$\vartheta(t, x_0) f_{pp}\left(t, p^*(t)\right) - 2\beta < 0, \quad (12)$$

где $\vartheta(t,x)$ обобщенное решение следующей задачи

$$\vartheta_t(t,x) = \nu\vartheta_{txx}(t,x) + \vartheta_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D,$$
$$\vartheta(t,x) = -2\left[u(T,x) - \xi(x) \right],$$
$$\vartheta(t,0) = \vartheta(t,1) = 0,$$

сопряженной с задачей (1)–(3) и определяется по формуле

$$\vartheta(t,x) = -2\sum_{i=1}^{\infty} \Big[\varphi_i \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)T \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\omega_{0i}(\nu)} \int_0^T \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(T-s) \right\} \times$$
$$\times b_i(x_0) f\left(s, p(s)\right) ds - \xi \Big]_i \times$$
$$\times \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(T-t) \right\} b_i(x). \quad (13)$$

С учетом условий (8)–(10) условия оптимальности (11), (12) перепишем в следующем виде

$$2\beta p(t) f_p^{-1}(t, p(t)) = \vartheta(t, x_0), \quad (14)$$

$$f_p(t, p(t)) \left(\frac{p(t)}{f_p(t, p(t))} \right)_p > 0. \quad (15)$$

С учетом (15) из (13) и (14) получаем

$$\beta p(t) f_p^{-1}(t, p(t)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{0i}(\nu)} \int_0^T \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(2T-t-s) \right\} \times$$
$$\times b_i^2(x_0) f\left(s, p(s)\right) ds =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\varphi_i \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(2T-t) \right\} +$$
$$+ \xi_i \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(T-t) \right\} \Big) b_i(x_0)$$

или в компактной форме

$$\beta p(t) f_p^{-1}(t, p(t)) + \int_0^T Q(t,s) f(s, p(s)) ds = F(t), \quad (16)$$

где

$$Q(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(2T-t-s) \right\} b_i^2(x_0)}{\omega_{0i}(\nu)},$$

$$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\varphi_i \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(2T-t) \right\} +$$
$$+ \xi_i \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu)(T-t) \right\} \Big) b_i(x_0).$$

(16) является сложным интегро-дифференциальным уравнением. Поэтому с целью решения этого уравнения примем следующее обозначение

$$\beta p(t) f_p^{-1}(t, p(t)) = g(t). \quad (17)$$

Если предположим, что $g(t)$ заданная известная функция, то (17) можно рассматривать как дифференциальное уравнение. Его запишем в виде

$$p(t) = \frac{g(t)}{\beta} f_p(t, p(t)).$$

Интегрируя последнее уравнение на отрезке $[0, p]$, с учетом условие (8) получаем

$$p^2(t) = \frac{2}{\beta} g(t) f(t, p(t)). \quad (18)$$

Уравнение (18) перепишем в виде

$$p(t) + \int_0^t H(s) ds = p(t) + \int_0^t H(s) ds +$$
$$+ p^2(t) - \frac{2}{\beta} g(t) f(t, p(t)), \quad (19)$$

где $0 < H(t)$ произвольная функция такая, что

$$e^{-\eta(t)} << 1, \quad 2\int_0^t H(s) e^{-\eta(t-s)} ds << 1,$$

$$\eta(t)=\int_0^t H(s)ds.$$

Здесь явно видно, что уравнения (18) и (19) эквивалентны.

Из (19) получим следующее специальное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (см. [23–27]):

$$\begin{aligned}p(t)=\Theta(t;p)\equiv\Bigg[&p(t)+\int_0^t H(s)p(s)ds+\\&+p^2(t)-\frac{2}{\beta}g(t)f(t,p(t))\Bigg]e^{-\eta(t)}+\\&+\int_0^t H(s)e^{-\eta(t-s)}\Bigg[p(t)+\int_0^t H(s)p(s)ds+\\&+p^2(t)-\frac{2}{\beta}g(t)f(t,p(t))-\\&-p(s)-\int_0^s H(\theta)p(\theta)d\theta-\\&-p^2(s)+\frac{2}{\beta}g(s)f(s,p(s))\Bigg]ds.\end{aligned}\tag{20}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда уравнения (17) и (20) эквивалентны. Если

$$\rho=\left(3+\frac{2g_0}{\beta}L_0+\max_{t\in D_T}\int_0^t H(s)ds\right)\max\left\{G(t):t\in D_T\right\}<1,$$

где

$$G(t)=e^{-\eta(t)}+2\int_0^t H(s)e^{-\eta(t-s)}ds,$$

$$g_0=\max_{t\in D_T}|g(t)|,$$

то нелинейное интегральное уравнение (20) имеет единственное решение на отрезке D_T.

Доказательство. Эквивалентность уравнений (17) и (20) мы уже показали. Чтобы показать существование и единственность решения уравнения (20), мы используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{aligned}p_0(t)=g(t),\ \ p_1(t)=&\left[-\frac{2}{\beta}g(t)f(t,g(t))\right]e^{-\eta(t)}+\\&+\int_0^t H(s)e^{-\eta(t-s)}\Bigg[-\frac{2}{\beta}g(t)f(t,g(t))+\\&+\frac{2}{\beta}g(s)f(s,g(s))\Bigg]ds,\end{aligned}\tag{21}$$

$$p_k(t)=\Theta(t;p_{k-1}),\ k=2,3,4,\dots\ .\tag{22}$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (21) и (22) получаем

$$\left\|p_1(t)-p_0(t)\right\|_C\le\frac{2g_0M_0}{\beta}\max\left\{G(t):t\in D_T\right\};\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\left\|p_k(t)-p_{k-1}(t)\right\|_C\le\\&\le\rho\left\|p_{k-1}(t)-p_{k-2}(t)\right\|_C<\left\|p_{k-1}(t)-p_{k-2}(t)\right\|_C.\end{aligned}\tag{24}$$

Из оценок (23) и (24) следует, что оператор в правой части (20) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (20) имеет единственное решение на отрезке D_T. Теорема доказана.

Решение уравнения (17) обозначим следующим образом

$$p=h(t,g(t)).\tag{25}$$

Теперь по нашему предположению функция (25) известная. Её нашли как предел итерационного процесса (21), (22). Кроме того, из уравнения (20) и из условий теоремы видно, что для этого решения справедливо соотношение

$$h(t,g(t))\in Bnd(\bar{M}_1)\cap Lip\left\{L_{1|g}\right\},\quad 0<\bar{M}_1,$$

$$L_1=\text{const}.\tag{26}$$

Найдем функцию $g(t)$, так как она не было задано. Подставляя (17) и (25) в (16), получим относительно $g(t)$ следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g(t)+\int_0^T Q(t,s)f\big(s,h(s,g(s))\big)ds=F(t),\tag{27}$$

В формуле (27) функции $Q(t,s)$ и $F(t)$ ограниченные:

$$\begin{aligned}0<Q(t,s)\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(2T-t-s)\right\}}{\omega_{0i}(\nu)}\le\\\le 2\left\|\max_{(t,s)}\exp\left\{-\omega_1(\nu)(t-s)\right\}\right\|_{\ell_2}\left\|\frac{1}{\omega_0(\nu)}\right\|_{\ell_2}<\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|F(t)|\le\sum_{i=1}^{\infty}\big(|\varphi_i|+|\xi_i|\big)\,|b_i(x_0)|\le\\\le\big(\|\varphi\|_{\ell_2}+\|\xi\|_{\ell_2}\big)\|b(x_0)\|_{\ell_2}<\infty.\end{aligned}$$

Из теории нелинейных интегральных уравнений Вольтерра известно, что в силу условий теоремы и (26) нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (27) имеет единственное решение $g(t)\in C(D_T)$. Это решение можно вычислить с помощью следующего итерационного процесса Пикара

$$g_0(t)=F(t),$$

$$g_{k+1}(t)=F(t)-\int_0^T Q(t,s)f\left(s,h(s,g_k(s))\right)ds,$$

$$k=0,1,2,\ldots .$$

Подставляя это решение в (20), окончательно находим оптимальное управление $p(t)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА И ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Согласно (7) и (25) оптимальный процесс находим по формуле

$$u^*(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}+ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times \times b_i(x_0)f\left(s,h(s,g^*(s))\right)ds\Big\}b_i(x), \tag{28}$$

где

$$\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\ \ \omega_{1i}(\nu)=\frac{\lambda_i^2}{\omega_{0i}(\nu)},$$

$$\varphi_i=\int_0^l\varphi(y)b_i(y)dy.$$

Оптимальный процесс (28) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса Пикара

$$u_k^*(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)t\right\}+ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\right\}\times \times b_i(x_0)f\left(s,h(s,g_k^*(s))\right)ds\Big\}b_i(x),$$

$$k=1,2,3,\ldots .$$

Минимальное значение функционала, согласно формулам (5), (25) и (28) находится из следующей формулы

$$J[p^*]=\int_0^1\Bigg[\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)T\right\}+ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^T\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(T-s)\right\}b_i(x_0)\times \times f\left(s,h(s,g^*(s))\right)ds-\xi_i\Big\}b_i(x)\Bigg]^2dx+ +\beta\int_0^T h^2\left(t,g^*(t)\right)dt, \tag{29}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда функционал (29) принимает конечное значение.

Доказательство. Учитывая доказательство теоремы 1 и (26), из (29) получаем

$$J[p^*]\le 2\left(\|\varphi\|_{\ell_2}+\|\xi\|_{\ell_2}\right)+ +4\sqrt{2}T\left(\|\varphi\|_{\ell_2}+\|\xi\|_{\ell_2}\right)M_0M_1M_2+ +4T^2\left(M_0M_1M_2\right)^2+2\beta T\overline{M}_1<\infty.$$

Отсюда следует, что функционал (29) принимает конечное значение. Теорема доказана.

Приближенное значение функционала вычисляется по следующему итерационному процессу

$$J[p_k^*]=\int_0^1\Bigg[\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\varphi_i\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)T\right\}+ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^T\exp\left\{-\omega_{1i}(\nu)(T-s)\right\}\times \times b_i(x_0)f\left(s,h(s,g_k^*(s))\right)ds-\xi_i\Big\}b_i(x)\Bigg]^2dx+ +\beta\int_0^T h^2\left(t,g_k^*(t)\right)dt,\ \ k=1,2,3,\ldots .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями с частными производными, получила бурное развитие, все шире проникая в различные области техники и технологических процессов. На практике широко используются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления.

В работе предлагается методика решения одной точечной задачи нелинейного оп-

тимального управления для псевдопараболического уравнения третьего порядка при смешанных условиях. Формулируются необходимые условия оптимальности нелинейного управления. Вычисление нелинейного оптимального управления с помощью специального интегрального преобразования сведено к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Получены формулы вычисления оптимального процесса и минимального значения функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27. – №2. – С. 348 – 350.

2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24. – №5. – С. 852 – 864.

3. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М. : Высшая школа, 1989. – 263 с.

4. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М. : Наука, 1976. – 424 с.

5. *Вязгин В. А., Федоров В. В.* Математические методы автоматизированного проектирования. – М. : Высшая школа, 1989. – 184 с.

6. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

7. *Куропаткин П. В.* Оптимальные и адаптивные управления. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

8. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

9. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.

10. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

11. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Дисс. ... д. ф.-м. н.: 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. – Бишкек, 2003. – 224 с.

12. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М. : Мир, 1972. – 412 с.

13. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

14. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М. : Высшая школа, 2009. – 680 с.

15. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М. : Физматлит, 2000. – 160 с.

16. *Тятюшкин А. И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск : СО «Наука», 1992. – 193 с.

17. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М. : Наука, 1978. – 488 с.

18. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Т. 52. – № 1. – С. 112 – 123.

19. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 277 – 295.

20. *Yuldashev T. K.* On differentiability of the solution of the mixed boundary value problem for a nonlinear pseudohyperbolic equation with respect to small parameters // Журн. Сибирского Федерального Университета. Серия: Математика и физика. – 2014. – Т. 7. – № 2. – С. 260 – 271.

21. *Юлдашев Т. К.* Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения // Моделирование и анализ информационных систем. – 2013. – Т. 20. – № 5. – С. 78 – 89.

22. *Юлдашев Т. К.* Приближенное решение задачи оптимального управления для нели-

нейного псевдопараболического уравнения // Вестник ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 1. – С. 45 – 51.

23. *Юлдашев Т.К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник ТомскГУ. Серия: Математика и Механика. – 2012. – № 2. – С. 56 – 62.

24. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка // Вестник Южно-УралГУ. – 2012. – Вып. 6. – № 11 (270). – С. 35 – 41.

25. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – Т. 28. – № 3. – С. 17 – 29.

26. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5. – № 1. – С. 69 – 75.

27. *Юлдашев Т. К., Середкина А. И.* Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 32. – № 3. – С. 46 – 55.

Юлдашев Турсун Камалдинович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики. Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия.
Тел.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru

Yuldashev Tursun Kamaldinovich – Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department Siberian State Aerospace University. Krasnoyarsk, Russia.
Tel.: 8-923-372-51-79
E-mail: tursunbay@rambler.ru