УДК 510.22

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЗОВАННОГО СРАВНЕНИЯ НЕЧЁТКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ЧИСЕЛ

Я. А. Воронцов, М. Г. Матвеев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.06.2014 г.

Аннотация. В данной статье рассматриваются методы параметризованного сравнения нечётких чисел, дающие чёткий и однозначный результат сравнения. Произведена классификация методов по семействам, выделены общие черты всех методов. Предложен α-уровневый метод сравнения с использованием L-преобразования нечётких чисел.
Ключевые слова: индекс ранжирования, оценочная функция, центроидный метод, максимизирующая и минимизирующая точки, α-взвешенное сравнение, L-преобразование.
Annotation. This article reviews methods of parametrized comparison of fuzzy numbers which produce crisp and unambiguous comparison results. Methods and techniques of comparison are classified into several families based on their similarity, their common features are discussed. A method of α-level valuation based on L-transform of fuzzy numbers is proposed.
Keywords: ranking index, valuation function, centroid method, maximizing and minimizing points, α-weighted valuation, *L*-transform.

ВВЕДЕНИЕ

Результаты расчётов в моделях принятия решений в нечёткой среде, как правило, выражаются нечёткими числами. При выборе одной из альтернатив лицо, принимающее решение, нуждается в математическом аппарате, который позволяет сравнивать между собой нечёткие числа. Задача сравнения нечётких чисел фундаментальна, и в настоящее время существует множество различных методов сравнения, которые, однако, не всегда работают удовлетворительно.

Обычно задача сравнения двух или более нечётких чисел сводится к установлению отношения линейного порядка Q – рефлексивного $\left(\forall\tilde{X}\in F:\tilde{X}Q\tilde{X}\right)$, антисимметричного $\left(\forall\tilde{X},\tilde{Y}\in F:\tilde{X}Q\tilde{Y}\wedge\tilde{Y}Q\tilde{X}\Rightarrow\tilde{X}=\tilde{Y}\right)$, транзитивного $\left(\forall\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\in F:\tilde{X}Q\tilde{Y}\wedge\tilde{Y}Q\tilde{Z}\Rightarrow\tilde{X}Q\tilde{Z}\right)$ и такого, что $\forall\tilde{X},\tilde{Y}\in F$ сравнимы – на множестве нечётких чисел F. В рамках данной статьи методы сравнения нечётких чисел будут рассматриваться на примере треугольных и трапециевидных чисел, которые чаще всего используются в задачах управления и планирования на предприятиях. Предполагается выделить те методы, которые позволяют дать однозначный ответ относительно упорядоченности/неупорядоченности нечётких чисел и могут быть эффективно алгоритмически реализованы для использования в программных пакетах.

В дальнейшем будем использовать предлагаемую в статье [1] классификацию методов сравнения нечётких множеств, которая справедлива и для нечётких чисел.

1. Методы с использованием α-срезов – множества сравниваются на основании сравнения их α-срезов. Обычно такие методы используются с целью быстрого получения результатов.

2. Лингвистические (теоретико-множественные) методы – множества сравниваются на основе степени их эквивалентности $\tilde{A}\leftrightarrow\tilde{B}$. Результат сравнения также является нечётким и описывается некоторой лингвистической переменной.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-07-00252 и РФФИ № 13-08-00532

3. Метрические методы – для сравнения множеств вводится некоторая функция расстояния, характеризующая схожесть чисел. Сюда также относятся методы, сравнивающие нечёткие числа на основании их комбинаций.

4. Интегральные методы – нечёткие множества упорядочиваются на основании своих «средних» чётких значений, которые могут быть получены различными способами.

5. Многомерные методы – для сравнения множеств с целью уменьшения вероятности ошибки используются сразу несколько индексов ранжирования/метрик, поскольку ни один из известных методов сравнения не застрахован от случайных неверных результатов сравнения (т.н. выбросов).

В рамках поставленной выше цели статьи, наибольший интерес представляют методы 1, 3 и 4 семейств. Стоит отметить, что большинство методов, принадлежащих к перечисленным выше семействам, позволяют вычислить функцию подобия, на основе которой делаются выводы. В статье [2] реализована данная методика для трапециевидных нечетких чисел.

Введём некоторые обозначения, на которые в дальнейшем будем опираться:

- $\tilde{A}$ – треугольное (или трапециевидное) нечёткое число;
- $\mu_{\tilde{A}}(x):\mathbb{R}\to[0;1]$ – функция принадлежности нечёткого числа $\tilde{A}$;
- $S_{\tilde{A}}$ – носитель числа $\tilde{A}$;
- $SL_{\tilde{A}}$, $SR_{\tilde{A}}$ – левый и правый коэффициенты неопределённости нечёткого числа $\tilde{A}$ соответственно;
- $x^L_{\tilde{A}}(\alpha)$, $x^R_{\tilde{A}}(\alpha)$ – функции, описывающие левую и правую ветви нечёткого числа соответственно.

1. СРАВНЕНИЕ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНДЕКСА РАНЖИРОВАНИЯ

Нечёткие числа сравниваются как нечёткие подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Два нечётких числа $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ равны тогда и только тогда, когда их функции принадлежности совпадают, т. е.

$$\tilde{A}=\tilde{B}\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x). \qquad (1)$$

Случай с непересекающимися носителями также тривиален – больше будет то число, которое расположено правее по оси действительных чисел. В случае $S_{\tilde{A}}\bigcap S_{\tilde{B}}\neq\varnothing$ часто применяется следующий метод сравнения. Для чисел $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ вычисляется некоторая чёткая функция $H(\tilde{A},\tilde{B})$, называемая индексом ранжирования [4]. Значение индекса позволяет вычислить степень, с которой одно из них больше либо меньше другого. Исходя из идеи метода, его можно отнести к третьему семейству (метрические методы).

В зависимости от вида сравниваемых чисел, в качестве индекса ранжирования в [4] предлагается взять одну из описанных ниже функций.

$$H_1\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\sup_{a\in S_{\tilde{A}},\, b\in S_{\tilde{B}}}\min\left\{\mu_{\tilde{A}},\mu_{\tilde{B}},\mu_V\left(a,b\right)\right\}. \qquad (2)$$

Индекс (2) использует чёткие значения a, b нечётких чисел $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ соответственно; $\mu_V\left(a,b\right)$ – функция принадлежности нечёткого отношения предпочтения V между числами a, b, выбор которой зависит от эксперта. Часто применяется отношение предпочтения V_1 с функцией принадлежности

$$\mu_{V_1}\left(a,b\right)=\begin{cases}1;\, a\geq b\\ 0;\, a<b\end{cases}. \qquad (3)$$

В общем случае, независимо от выбранного отношения предпочтения V, считается, что $H_1\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq H_1\left(\tilde{B},\tilde{A}\right)\Rightarrow \tilde{A}\geq\tilde{B}$.

$$H_2^1\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=H_+\left(\tilde{A}\right)-H_+\left(\tilde{B}\right);$$

$$H\left(\tilde{A}\right)=\int_0^1 M\left(A_\alpha\right)d\alpha; \qquad (4)$$

$$H_2^2\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=H_*\left(\tilde{A}\right)-H_*\left(\tilde{B}\right);$$

$$H_*\left(\tilde{A}\right)=\frac{H_+\left(\tilde{A}\right)}{\sup\limits_{\alpha:A_\alpha\neq\varnothing}\alpha}. \qquad (5)$$

Индекс (4) оперирует α-срезами нечёткого числа, выбирая в рамках каждого из них чёткое значение $M\left(A_\alpha\right)=\frac{a_L+a_R}{2}$, где $a_L=\inf\limits_{a\in A_\alpha}a$, $a_R=\sup\limits_{a\in A_\alpha}a$. Индекс (5) является обобщением для предыдущего. Для (4) и (5) справедливо: $H_2^i\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq 0 \Rightarrow \tilde{A}\geq\tilde{B}$ при $i=\overline{1,2}$.

$$H_3\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=P\left(pv\left(\tilde{A}\right)\geq pv\left(\tilde{B}\right)\right). \qquad (6)$$

Данный индекс определяется как вероятность того, что чёткое значение $pv\left(\tilde{A}\right)$ нечёткого числа $\tilde{A}$ не меньше чёткого значения $pv\left(\tilde{B}\right)$ нечёткого числа $\tilde{B}$. Если чёткие значения чисел выбираются независимо, то

$$H_3\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\frac{1}{C}\int\limits_{\substack{a\geq b\\ a\in S_{\tilde{A}},\, b\in S_{\tilde{B}}}}\mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}\,da\,db, \qquad (7)$$

где C – произведение площадей под графиками функций принадлежности чисел $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Существуют два варианта применения индекса ранжирования (6):

$$H_3\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq H_3\left(\tilde{B},\tilde{A}\right)\Rightarrow \tilde{A}\geq\tilde{B}$$

и $H_3\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq 0,5\Rightarrow\tilde{A}\geq\tilde{B}$.

$$H_4\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\int\limits_0^{0,5}\left(1-\mu_{\tilde{D}}\left(z\right)\right)dz+\int\limits_{0,5}^{1}\mu_{\tilde{D}}(z)dz;$$

$$\tilde{D}=\frac{\tilde{A}}{\tilde{A}+\tilde{B}}. \qquad (8)$$

При этом $H_4\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq 0,5\Rightarrow\tilde{A}\geq\tilde{B}$.

$$H_5^1(\tilde{A},\tilde{B})=\sup_{a\geq b}\min\left\{\mu_{\tilde{A}};\mu_{\tilde{B}}\right\}; \qquad (9)$$

$$H_5^2\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\sup_{a}\inf_{b\geq a}\min\left\{\mu_{\tilde{A}};1-\mu_{\tilde{B}}\right\}; \qquad (10)$$

$$H_5^3\left(\tilde{A}.\tilde{B}\right)=\inf_{a}\sup_{b\leq a}\max\left\{1-\mu_{\tilde{A}};\mu_{\tilde{B}}\right\}; \qquad (11)$$

$$H_5^4\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=1-\sup_{a\leq b}\min\left\{\mu_{\tilde{A}};\mu_{\tilde{B}}\right\}. \qquad (12)$$

Сравнение в рамках семейства индексов $H_5^i;\ i=\overline{1,5}$ происходит следующим образом: $H_5^i\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)\geq H_5^i\left(\tilde{B},\tilde{A}\right)\Rightarrow\tilde{A}\geq\tilde{B}$. Эти индексы в основном опираются на критические значения функции принадлежности.

Возможность того, что $\tilde{A}\geq\tilde{B}$ обозначается как $V\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=H_i\left(\tilde{A},\tilde{B}\right);\ \ i=\overline{1,5}$. Очевидно, что ответ на вопрос «Может ли $\tilde{A}$ быть больше, чем $\tilde{B}$» представляется в виде нечёткого подмножества множества $\left\{да, нет\right\}$, что быть неприемлемо в задачах, где требуется однозначное упорядочивание нечётких чисел либо выбор лучшей из альтернатив.

2. ЦЕНТРОИДНЫЙ МЕТОД

Метод, описанный в [5] для трапециевидны чисел, можно отнести к семейству 4 (интегральные методы), поскольку для нечётких чисел вычисляются «средние» значения. Обобщённое трапециевидное число $\tilde{A}=\langle a,b,c,d;w\rangle$, где a,b,c,d – абсциссы точек A, B, C, D соответственно (рис. 1), $w\in\left[0;1\right]$ – весовой параметр, разбивается на три фигуры, как показано на рис. 1, после чего находятся координаты точек

$$\left[\begin{array}{l} G_1=\left(\dfrac{a+2b}{3};\dfrac{w}{3}\right)\\ G_2=\left(\dfrac{c+d}{2};\dfrac{w}{2}\right)\\ G_3=\left(\dfrac{2c+d}{3};\dfrac{w}{3}\right)\end{array}\right., \qquad (13)$$

являющихся центрами тяжести полученных фигур. Далее находится центр тяжести $G_{\tilde{A}}\left(\overline{x}_0,\overline{y}_0\right)$ треугольника $G_1G_2G_3$.

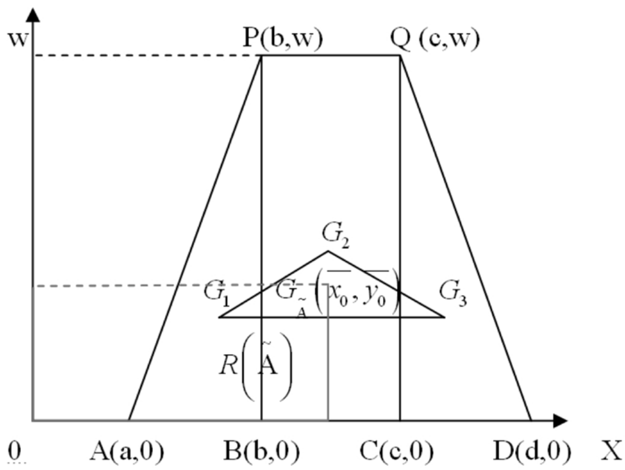

Рис.1. Нахождение центроида $G_{\tilde{A}}$ трапециевидного числа

Координаты этой точки используются для вычисления оценочной функции

$$R(\tilde{A})=\overline{x}_0\overline{y}_0=\frac{7w(2a+7b+7c+2d)}{324}. \qquad (14)$$

На основании оценок $R(\tilde{A}),\ \ R(\tilde{B})$ проводится первоначальное сравнение чисел:

$$\left[\begin{array}{l} R(\tilde{A})<R(\tilde{B})\Rightarrow\tilde{A}\prec\tilde{B}\\ R(\tilde{A})>R(\tilde{B})\Rightarrow\tilde{A}\succ\tilde{B}\end{array}\right.. \qquad (15)$$

Если оценки, полученные с помощью (14), совпадают, то происходит сравнение чисел по следующему набору характеристик:

• мода – при одинаковых оценках (14) большим является то число, у которого больше мода

$$m_{\tilde{A}} = \frac{w}{2}(b+c); \quad (16)$$

• обобщённая длина носителя – при равенстве мод число $\tilde{A}$ больше числа $\tilde{B}$, если длина его обобщённого носителя больше

$$S_{\tilde{A}} = w(d-a); \quad (17)$$

• левый коэффициент нечёткости – при равенстве обобщённых длин носителей большим считается число, у которого он больше

$$SL_{\tilde{A}} = w(b-a); \quad (18)$$

• весовой параметр w – при равенстве коэффициентов нечёткости большим является то число, у которого значение весового параметра больше. При равенстве $w_1 = w_2$ считается, что $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ И МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ НЕЧЁТКИХ ТОЧЕК

Идея, описанная в статье [6], предполагает ранжирование множества нечётких чисел $\Gamma = \left\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n\right\}$ на основании коэффициента близости к минимизирующей и максимизирующей точкам множества Γ. Этот подход к сравнению также относится к четвёртому семейству, и, в отличие от предыдущего метода, позволяет сразу строить отношение частичного порядка на множестве Γ или выбирать максимальное или минимальное число. Минимизирующая и максимизирующая точки являются нечёткими числами $\tilde{M}_{min}$ и $\tilde{M}_{max}$ соответственно и строятся на основании центров тяжести и левого и правого коэффициентов нечёткости. Для этого находятся координаты центров тяжести каждого из нечётких чисел $\left(\overline{x}_0(\tilde{A}_i), \overline{y}_0(\tilde{A}_i)\right)$, после чего вычисляются величины

$$\left(\overline{x}_0(\tilde{M}_{max}); \overline{y}_0(\tilde{M}_{max})\right) = \\ = \left(\max_{i=1..n}\{x_0(\tilde{A}_i)\}, \max_{i=1..n}\{y_0(\tilde{A}_i)\}\right); \quad (19)$$

$$\left(\overline{x}_0(\tilde{M}_{min}), \overline{y}_0(\tilde{M}_{min})\right) = \\ = \left(\min_{i=1..n}\{\overline{x}_0(\tilde{A}_i)\}, \min_{i=1..n}\{\overline{y}_0(\tilde{A}_i)\}\right); \quad (20)$$

$$SL_{\tilde{M}_{max}} = \max_{i=1..n}\left\{SL_{\tilde{A}_i}\right\}; \quad SR_{\tilde{M}_{max}} = \max_{i=1..n}\left\{SR_{\tilde{A}_i}\right\}; \quad (21)$$

$$SL_{\tilde{M}_{min}} = \min_{i=1..n}\left\{SL_{\tilde{A}_i}\right\}; \quad SR_{\tilde{M}_{min}} = \min_{i=1..n}\left\{SR_{\tilde{A}_i}\right\}. \quad (22)$$

С помощью (19) и (21) строится число $\tilde{M}_{max}$, с помощью (20) и (22) – $\tilde{M}_{min}$. Процесс построения сводится к решению системы линейных уравнений и подробно описан в статье [7].

Для нахождения расстояний между нечёткими числами, каждое из них представляется в параметрической форме:

$$\tilde{A} = \left(\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right); \underline{u}(r) \le \overline{u}(r); 0 \le r \le 1, \quad (23)$$

где $\underline{u}(r)$, $\overline{u}(r)$ – невозрастающая и неубывающая непрерывные на $[0,1]$ функции соответственно. Расстояние между числами $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ определяется согласно следующей формуле:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \\ = \left[\int_0^1 \left(\underline{A}(r) - \underline{B}(r)\right)^2 dr + \int_0^1 \left(\overline{A}(r) - \overline{B}(r)\right)^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Коэффициент близости для нечёткого числа $\tilde{A}$ рассчитывается как

$$D(\tilde{A}) = \gamma(\tilde{A}) \frac{d(\tilde{A}, \tilde{M}_{min})}{1 + d(\tilde{A}, \tilde{M}_{max})}. \quad (25)$$

В формуле (25) коэффициент $\gamma(\tilde{A})$ равен

$$\gamma(\tilde{A}) = \begin{cases} 1, \int_0^1 \left(\underline{A}(r) + \overline{A}(r)\right) dr \ge 0 \\ -1, \int_0^1 \left(\underline{A}(r) + \overline{A}(r)\right) dr < 0 \end{cases}. \quad (26)$$

Окончательное упорядочивание чисел множества Γ ведётся на основании (27):

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{A}_i \prec \tilde{A}_j \Leftrightarrow D(\tilde{A}_i) < D(\tilde{A}_j) \\ \tilde{A}_i \succ \tilde{A}_j \Leftrightarrow D(\tilde{A}_i) > D(\tilde{A}_j) \\ \tilde{A}_i \approx \tilde{A}_j \Leftrightarrow D(\tilde{A}_i) = D(\tilde{A}_j) \end{array}\right. \quad (27)$$

4. α -ВЗВЕШЕННОЕ СРАВНЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Метод, описанный авторами статьи [8], основывается на сравнении значений некоторой оценочной функции, вычисленных для каждого нечёткого числа. В самом простом случае значение оценочной функции R вычисляется как

$$R(\tilde{A}) = \int_0^1 L(A_\alpha)d\alpha, \qquad (28)$$

где $A_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ – α-уровневое сечение числа $\tilde{A}$, а $L(A_\alpha)$ – функция, которая позволяет выбрать единственную точку из соответствующего α-интервала. Обычно в качестве L используют среднее арифметическое концов интервала.

В [8] оценочная функция (28) обобщается до следующего вида:

$$R(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 L(\mathrm{A}_\alpha) f(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 f(\alpha)d\alpha}. \qquad (29)$$

В формуле (29) $f(\alpha):[0;1] \to [0;1]$ – функция веса конкретного α-уровня во всей оценке. В качестве функции $f(\alpha)$ в статье [8] рекомендуется использовать функцию из одного из двух комплементарных семейств функций:

- возрастающее семейство Ягера-Филева

$$f(\alpha) = \alpha^q; q \geq 0; q \in \mathbb{R}; \qquad (30)$$

- убывающее семейство Ягера-Филева

$$f(\alpha) = (1-\alpha)^q; q \geq 0; q \in \mathbb{R}. \qquad (31)$$

Интересны значения функции R в предельных случаях: при $q = 0$ (29) вырождается в (28), при $q \to \infty$ результаты (29) равны $\frac{m_1 + m_2}{2}$ для (30) и $\frac{x^L + x^R}{2}$. для (31). Однако такой выбор функции $f(\alpha)$ приводит к тому, что $\forall q: f(0) = 1, \quad f(1) = 0$ для функций из обоих семейств. Для обхода этого ограничения вводятся два дополнительных семейства функций

$$f_S(\alpha) = A_S + (B_S - A_S)\alpha^q; \quad A_S + B_S = 1, \qquad (32)$$

$$f_C(\alpha) = B_C + (A_C - B_C)(1-\alpha)^q; A_C + B_C = 1, \qquad (33)$$

первое из которых увеличивает значимость носителя в результате сравнения, а второе – значимость ядра.

В конечном итоге, нечёткие числа сравниваются на основании следующей оценки:

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{A} \succ \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) > R(\tilde{B}) \\ \tilde{A} \prec \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) < R(\tilde{B}) \\ \tilde{A} \approx \tilde{B} \Leftrightarrow R(\tilde{A}) = R(\tilde{B}) \end{array}\right. \qquad (34)$$

Результат сравнения напрямую зависит от параметра q, а также от значений параметров A_S, B_S, A_C, B_C в функциях (32) и (33), которые позволяют учесть, какую из составляющих нечёткого числа – ядро или носитель – нужно использовать в большей степени при сравнении чисел. На основании данного подхода, в статье [9] выведены конкретные выражения для сравнения треугольных, трапециевидных и гауссовских нечётких чисел.

5. α-УРОВНЕВОЕ СРАВНЕНИЕ

Для решения задачи сравнения также представляется возможным использование модифицированных треугольных нечётких чисел, описанных в [10–12]. Модифицированное нечёткое число $\tilde{A}^*$ является нечётким числом LL/RR-типа (т.е. имеющим только один ненулевой параметр нечёткости) и получается из исходного числа $\tilde{A}$ путём L-преобразования α-интервалов [12]:

$$\overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = L(A_\alpha) = \lambda x^L_{\tilde{A}}(\alpha) + (1-\lambda)x^R_{\tilde{A}}(\alpha) \qquad (35)$$

и нахождения функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}^*}(x) = \left(\overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha)\right)^{-1}$.

Рассмотрим два нечётких числа $\tilde{A}$, $\tilde{B}$. Для того, чтобы определить, какое из них больше, составим разность $\overline{x}_{\tilde{B}}(\alpha) - \overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha)$ и сравним результат с нулём. Обозначим результат вычитания $\overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = \overline{x}_{\tilde{B}}(\alpha) - \overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha)$. Если $\overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha)$ целиком лежит правее (левее) оси Oy, то результат сравнения однозначен:

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{B} < \tilde{A} \Leftarrow \overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha) < 0 \\ \tilde{B} > \tilde{A} \Leftarrow \overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha) > 0 \end{array}\right. \qquad (36)$$

В противном случае треугольное LL/RR-число $\tilde{C}^*$ делится осью ординат на две части. Обозначим площадь фигуры, расположенной левее оси ординат S_1, правее – S_2. Примем, что

$$\begin{cases} \tilde{A} > \tilde{B} \Leftarrow S_1 - S_2 > 0 \\ \tilde{A} < \tilde{B} \Leftarrow S_1 - S_2 < 0 \\ \tilde{A} = \tilde{B} \Leftarrow S_1 - S_2 = 0 \end{cases}. \quad (37)$$

Воздействие на результат сравнения оказывает параметр λ, от которого зависит L-преобразование. Этот подход идейно близок описанному ранее α-взвешенному сравнению Детинецки-Ягера, однако в большей степени относится к методам первого семейства, основанных на сравнении α-интервалов и чётких значений нечётких чисел на α-уровнях.

6. ПРИМЕР СРАВНЕНИЯ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

Сравним два нечётких числа $\tilde{A} = \langle 1,2,6 \rangle$ и $\tilde{B} = \langle 2,3,4 \rangle$, используя некоторые из предложенных выше способов.

Согласно центроидному методу (в [5] нормализованные треугольные числа считаются частным случаем обобщённых трапециевидных с коэффициентами $b = c$ и $w = 1$),

$$R(\tilde{A}) = \frac{2 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 2 \cdot 6}{18} \cdot \frac{7 \cdot 1}{18} = \frac{49}{54}, \quad (38)$$

$$R(\tilde{B}) = \frac{2 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{18} \cdot \frac{7 \cdot 1}{18} = \frac{7}{6}. \quad (39)$$

Из (38) и (39) получаем:

$$R(\tilde{A}) < R(\tilde{B}) \Rightarrow \tilde{A} < \tilde{B}.$$

При сравнении с использованием максимизирующей и минимизирующей точек, получаем:

$$SL_{\tilde{M}_{max}} = 1; SR_{\tilde{M}_{max}} = 4; SL_{\tilde{M}_{\min}} = 1; SR_{\tilde{M}_{\min}} = 1, \quad (40)$$

$$\tilde{M}_{max} = \langle 1,2,6 \rangle; \tilde{M}_{min} = \langle 2,3,4 \rangle. \quad (41)$$

Рассчитанные коэффициенты близости для чисел равны

$$D(\tilde{A}) = \sqrt{2} > D(\tilde{B}) = 0 \quad (42)$$

Из (42) следует, что $\tilde{A} > \tilde{B}$.

Применим метод α-уровневого сравнения. Для этого запишем результаты преобразования L для каждого из чисел:

$$\overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \lambda_1(\alpha + 1) + (1 - \lambda_1)(6 - 4\alpha), \quad (43)$$

$$\overline{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \lambda_2(\alpha + 2) + (1 - \lambda_2)(4 - \alpha). \quad (44)$$

Значения λ_1 и λ_2 возьмём равными $\frac{SL_{\tilde{A}}}{SL_{\tilde{A}} + SR_{\tilde{A}}}$ в соответствие с рекомендациями из [11]. Отсюда $\lambda_1 = 0,2$; $\lambda_2 = 0,5$ и, составляя разность $\overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = \overline{x}_{\tilde{B}}(\alpha) - \overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha)$, получаем:

$$\overline{x}_{\tilde{C}}(\alpha) = 3 - 5 + 3\alpha = 3\alpha - 2. \quad (45)$$

Полученное модифицированное число рассекается осью ординат на две части. Ордината точки пересечения $\alpha_0 = \frac{2}{3}$, поэтому

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1 = \frac{5}{6}. \quad (46)$$

Разность $S_1 - S_2 < 0$, поэтому $\tilde{A} < \tilde{B}$.

α – взвешенное сравнение по Детинецки-Ягеру с использованием функции типа (32) с параметрами $A_S = 0,2$; $B_S = 0,8$; $q = 3$ даёт следующие оценки (громоздкие промежуточные вычисления опущены):

$$R(\tilde{A}) = 2,55 < R(\tilde{B}) = 3. \quad (47)$$

Результат сравнения, исходя из (47) – $\tilde{A} < \tilde{B}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дан обзор методов параметризованного сравнения нечётких чисел, которые дают однозначный и непротиворечивый результат. Рассмотренные методы отличает одна общая черта – задача сравнения сводится к вычислению коэффициента ранжирования чисел либо оценочной функции, т. е. к «дефаззификации» чисел и их упорядочиванию соответственно полученным значениям. Стоит выделить центроидный метод, метод сравнения с построением минимизирующей и максимизирующей точек, метод Детинецки-Ягера и метод α-уровневого сравнения с использованием L-преобразования – все они позволяют однозначно сравнить два нечётких числа либо установить отношение частичного порядка при фиксированных параметрах сравнения, что важно в задачах управления и принятия решений. Можно дать следующие рекомендации по использованию описанных методов сравнения:

- наиболее фундаментален и универсален подход Детинецки-Ягера, который учитывает все α-уровни числа и обобщает большинство известных способов однозначного сравнения нечётких чисел с помощью параметризации коэффициентов весовой функции;

• метод α-уровневого сравнения хорош при решении нечёткой задачи как совокупности чётких, однако данный метод может вести себя неустойчиво на симметричных нечётких числах;

• центроидный метод лучше применять для трапециевидных чисел, поскольку он наиболее полно учитывает специфику данного вида чисел;

• основной случай применения метода построения максимизирующей и минимизирующей точек – упорядочивание нескольких нечётких чисел.

Наконец, рассмотренные в статье подходы к сравнению нечётких чисел не требуют значительных вычислительных ресурсов при реализации их на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chang P.-T.* Ranking of Fuzzy Sets Based on the Concept of Existence / P.-T. Chang, E.S. Lee // Computers and mathematics with applications. – Elsevier, 1994. – Vol.27, pp. 1–21.

2. *Нгуен Н.Х.* О вычислении функции подобия для нечетких чисел / Н.Х. Нгуен, Т.М. Леденева // Научно-теоретический журнал «Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова». 2011, № 4. – С. 177–182.

3. *Ибрагимов В.А.* Элементы нечёткой математики: [Электронный ресурс] // URL: http://www.anl.az/el_ru/i/iv_enm.pdf

4. *Алексеев А.В.* Обработка нечёткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.

5. *Rao P.P.B.* Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spreads and weight / P.P.B. Rao, N.R. Shankar // International Journal of Applied Science and Engineering. – 2012, № 10. – Vol. 1, pp. 41–57.

6. *Abbasbandy S.* Ranking fuzzy numbers using fuzzy maximizing-minimizing points / S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, S. Salahshour // Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-1022) and LFA-2011. – Atlantis-Press, 2011. – pp.763–769.

7. *Ahmadian A.* A New Distance Measure for Trapezoidal Fuzzy Numbers / A.Ahmaidan, M.J. Ebadi, F. Bt. Ismail et al. // Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013 – 2013. – http://dx.doi.org/10.1155/2013/424186

8. *Detyniecki M.* Ranking fuzzy numbers using α-weighted valuations / M. Detyniecki, R.R. Yager // International journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based systems. – 2001. – Vol 8(5), pp. 573–592.

9. *Леденева Т.М.* Параметрический метод сравнения нечетких чисел / Т.М. Леденева, Д.А. Черменев, С.С. Жданова // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010, № 6. – Т. 6, С. 62–66.

10. *Лебедев Г.Н.* Методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределённости / Г.Н. Лебедев, М.Г. Матвеев, М.Е. Семёнов, О.И. Канищева // Вестник ВГУ. Сер. «Системный анализ и информационные технологии». 2012, № 1. – С.

11. *Воронцов Я.А.* Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами / Я.А. Воронцов, М.Г. Матвеев // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII Международной научно-методической конференции. – Воронеж, издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. – Т. 1, С. 298–304.

12. *Воронцов Я.А.* Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами / Я.А. Воронцов, М.Г. Матвеев // Сборник трудов международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». Алушта, 2013. – М. : Изд-во МГУПИ, 2013. – С. 11–12.

Матвеев Михаил Григорьевич — д.т.н., проф., зав. каф. информационных технологий управления ФКН, Воронежский государственный университет.
Тел.: (473) 228-11-60+1606.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Воронцов Ярослав Александрович – аспирант, каф. информационных технологий управления ФКН, Воронежский государственный университет.
E-mail: voroncov_ya@sc.vsu.ru.

Matveev Mikhail Grigorievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, head of the dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University. Phone: (473) 228-11-60+1606.
E-mail:mgmatveev@yandex.ru

Vorontsov Yaroslav Alexandrovich – postgraduatestudent, dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University.
E-mail: voroncov_ya@sc.vsu.ru