УДК 510.22(075.8)

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ДВУХКОМПОНЕНТНЫМИ НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

М. Г. Матвеев*, Я. А. Воронцов*, О. И. Канищева**

**Воронежский государственный университет*
*** Военно-учебный научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж)*

Поступила в редакцию 03.06.2014 г.

Аннотация. В статье рассматриваются двухкомпонентные нечеткие числа (для треугольных функций принадлежности), показано, что они образуют поле P относительно сложения и умножения. Ограничение расширение неопределенности результата операций достигается за счет разрешения компенсации противоположных оценок эксперта в исходных нечетких числах и вычитания коэффициентов нечеткости в зависимых числах.
Ключевые слова: нечеткие числа, нечеткие множества, нечеткие отношения, теория нечетких множеств, алгебраические операции над нечеткими числами.
Annotation. The proposed two-fuzzy numbers (for triangular membership functions) form a field under addition and multiplication, and overcome shortcomings *LR*-numbers. Restricting expansion uncertainty of the result of operations is achieved by allowing compensation opposing expert assessments in the initial fuzzy numbers and subtraction coefficients in dependence of the fuzzy numbers.
Keywords: fuzzy numbers, fuzzy sets, fuzzy relations, theory of fuzzy sets, algebraic operations on fuzzy numbers.

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач выбора или задач управления часто возникают ситуации, когда численная оценка параметров модели производится в условиях неполной определенности. Обычно в таких ситуациях для описания неопределенности используется либо вероятностный подход – вводятся случайные величины с соответствующими характеристиками, либо подход, основанный на теории нечетких множеств, когда параметры отображаются нечеткими числами. Второй подход часто оказывается более предпочтительным, так как при вероятностном подходе возникают трудности получения необходимых оценок характеристик случайных величин, а также отсутствует принципиальная возможность получения аналитических выражений при решении задач.

В то же время широкое использование нечетко-множественного подхода сдерживается отсутствием развитой теории выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Можно выделить два основных направления реализации нечетких вычислений: принцип обобщения Заде и его α -уровневый аналог и разнообразные арифметики с аппроксимацией нечетких чисел LR -функциями [1]. Основными недостатками этих подходов являются:

– функция принадлежности результата определяется на максимально широком носителе, что завышает степень неопределенности;

Грант РФФИ № 13-08-00532

– вычислительные операции над нечеткими числами могут приводить к нарушению истинности естественных отношений, например, операция вычитания с равными нечеткими числами не приводит к единственному нулю; не выполняется тождественность четкого уравнения с нечеткими параметрами после подстановки нечеткого решения и т. п.;

– существуют ограничения на применение операций, обратные числа определены только для положительных значений моды;

– нелинейные операции умножения и деления искажают форму числа (α -уровневый принцип обобщения с интервальной арифметикой).

Основной причиной указанных недостатков является то, что структура множества нечетких подмножеств (то есть множества нечетких чисел) представляет собой векторную решетку [1], которая неадекватна вычислительным задачам выбора и управления. Подмножество этого множества – выпуклые нормальные нечеткие числа (LR -числа), представляют собой коммутативное полукольцо, что недостаточно для получения адекватных результатов. Возможное разрешение проблемы состоит в выборе подходящего пространства над адекватной алгебраической структурой множества нечетких чисел. Такой подход был применен, например, в работе [2], где вводится поле нечетких LR -чисел, что казалось бы позволило преодолеть часть из указанных недостатков. Однако введенные в работе обратные элементы (по сложению и умножению) не отвечают определению LR -чисел, так как содержат отрицательные коэффициенты нечеткости, что ставит под сомнение корректность предлагаемых групповых операций. Действительно, левый и правый коэффициенты нечеткости это расстояние (всегда неотрицательное) от моды числа до его левой и правой границы соответственно. При этом левая граница получается вычитанием левого коэффициента нечеткости из моды, а правая – прибавлением правого коэффициента нечеткости к моде. Изменение знаков коэффициентов нечеткости влечет зеркальное отражение сторон нечеткого числа и формально соответствует следующему соотношению: $(-m;-l,-r)=(-m;r,l)$, т. е. в введенном в работе [2] обратном элементе по сложению коэффициенты нечеткости l и r меняются местами относительно моды m. Но в этом случае $(m;l,r)+(-m;-l,-r)=(0;l+r,r+l)$, что не соответствует нейтральному элементу по сложению – $(0;0,0)$. Ситуация аналогична и в случае введенного обратного элемента по умножению.

Предлагаемое исследование направлено на формирование алгебраической структуры с обратными элементами, отвечающими аксиомам поля для множества нечетких чисел.

1. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЧЕТКОГО *LR*-ЧИСЛА

Нечеткие LR -числа представляются с помощью функции принадлежности [1]

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\gamma}\right), & x\le m,\\ R\left(\dfrac{x-m}{\delta}\right), & x\ge m. \end{cases} \quad \gamma\ge 0,\ \delta\ge 0.$$

Здесь m – мода нечеткого числа, γ, δ – левый и правый коэффициенты нечеткости соответственно. При заданных функциях L и R нечеткое число $\tilde{X}$ однозначно определяется тройкой действительных чисел $\tilde{X}=(m;\gamma,\delta)$.

Представляется целесообразным иное, эквивалентное представление, состоящее из двух компонент. Для этого зададим α -интервалы LR -числа и запишем левые и правые границы этих интервалов как функции от α, обратные функциям $L(x)$ и $R(x)$:

$$\tilde{X}=(\,l(\alpha),r(\alpha)), \tag{1}$$

где $\alpha\in[0,1]$ – значения α -уровней функции принадлежности.

Такое представление позволяет рассматривать вычислительные операции над нечеткими LR -числами как операции над функциями $l(\alpha)$ и $r(\alpha)$, а также исследовать алгебраическую структуру множества таких функций.

В дальнейшем будем рассматривать подмножество нечетких LR -чисел – нечеткие числа с треугольной функцией принадлежности или треугольные нечеткие числа, представляемые с помощью коэффициентов нечеткости $\gamma,\ \delta$ – $\tilde{X}=(m;\gamma,\delta)$ или тройкой $\tilde{X}=(l;m,r)$, где $l,\ r$ – левая и правая границы носителя соответственно. Эквивалентным представлением треугольного LR-числа может служить выражение (1) в виде [3]

$$\tilde{X}=(a_1+b_1\alpha,\ a_2-b_2\alpha), \qquad (2)$$

где $l(\alpha)=a_1+b_1\alpha;\ \ r(\alpha)=a_2-b_2\alpha$ – левая и правая функции границ α-интервалов треугольной функции принадлежности такие, что $l(1)=r(1)=m,\ \ l(\alpha),r(\alpha)\in R$. Например, нечеткое число (2; 3, 1) с $L(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ и $R(x)=3-x$ может быть записано в виде ($3\alpha-1, 3-\alpha$). Нетрудно заметить, что параметры a_1 и a_2 численно равны соответствующим границам носителя треугольного числа, а параметры b_1 и b_2 равны соответствующим коэффициентам нечеткости.

Будем рассматривать операции над треугольными нечеткими числами как операции над левой и правой функциями (компонентами) выражения (2). Очевидно, что эти функции можно рассматривать как LL и RR-числа с линейной функцией принадлежности и обратной ей функцией, описывающей изменение границ α-интервалов $x(\alpha)=a+b\alpha$, где $x(\alpha)=l(\alpha)$ для LL-чисел, $x(\alpha)=r(\alpha)$ для RR-чисел, $a,b\in R$.

Поставим задачу построить алгебру $(K;+,\cdot)$ на множестве $K=\{x(\alpha)\}$ нечетких LL и RR-чисел с алгебраической структурой поля, то есть построить поле нечетких LL и RR-чисел. Тогда операции на множестве треугольных нечетких чисел вида (2) можно представить в виде

$$\tilde{X}_1*\tilde{X}_2=(l_1(\alpha)*l_2(\alpha);\ r_1(\alpha)*r_2(\alpha)),\ \ *\in\{+,\cdot\}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ *LL*, *RR*-ЧИСЕЛ

Введем на множестве K бинарную операцию сложения следующим образом

$$x_3=x_1(\alpha)+x_2(\alpha)=a_1+a_2+(b_1+b_2)\alpha\ ;$$
$$x_3(\alpha)\in K. \qquad (3)$$

Заметим, что результатом сложения может быть как LL так и RR-число. Это будет определяться знаком параметра перед α, если b_1+b_2 положительно, то получим LL-число, если отрицательно – RR-число. При нулевом значении этого параметра получим частный случай нечеткого числа – обычное, четкое число.

Операция сложения коммутативна

$$a_1+a_2+(b_1+b_2)\alpha=a_2+a_1+(b_2+b_1)\alpha$$

и ассоциативна

$$a_1+b_1\alpha+(a_2+a_3+(b_2+b_3)\alpha)=$$
$$=(a_1+a_2+(b_1+b_2)\alpha)+a_3+b_3\alpha.$$

Определим единственный нулевой элемент $\tilde{0}=(0+0\alpha)\in K$ такой, что

$$x(\alpha)+\tilde{0}=a+b\alpha+0+0\alpha=x(\alpha)$$

для любого элемента множества K.

Введем на множестве K бинарную операцию умножения. Эту операцию можно было бы определить как обычное перемножение компонент нечеткого числа

$$x_4=x_1(\alpha)\cdot x_2(\alpha)=$$
$$=a_1a_2+a_1b_2\alpha+a_2b_1\alpha+b_1b_2\alpha^2.$$

Однако такое определение влечет искажение треугольного вида нечеткого числа, а, следовательно, результат $x_4(\alpha)$ не будет принадлежать множеству K. Устранить такую ситуацию можно интерполированием нелинейной зависимости $x_4(\alpha)$ в двух точках: при $\alpha=0$ и при $\alpha=1$. Прямая проведенная через эти две точки определяет адекватную операцию умножения

$$x_4=x_1(\alpha)\cdot x_2(\alpha)=$$
$$=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2)\alpha; \qquad x_4(\alpha)\in K. \qquad (4)$$

Следует заметить, что формула (4) справедлива при любых значениях коэффициентов (положительных или отрицательных) и обеспечивает результат в виде LL или RR-числа.

Нетрудно убедиться, что операция умножения (4) коммутативна и ассоциативна. Доказательства этих свойств следуют из определения операции умножения и аналогичны доказательствам свойств операций сложения.

Определим единичное число $\tilde{1}=1+0\alpha$ такое, что для любого нечеткого числа $x(\alpha)\in K$

$\tilde{1} \cdot x(\alpha) = (1+0\alpha)(a+b\alpha) = x(\alpha)$.

Убедимся, что операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения, т. е.

$$x_1(\alpha) \cdot x_2(\alpha) + x_1(\alpha) \cdot x_3(\alpha) = \\ = x_1(\alpha) \cdot (x_2(\alpha) + x_3(\alpha)). \quad (5)$$

Выполним действия в левой и правой частях равенства (5) и сравним полученные результаты:

$$(a_1 + b_1\alpha) \cdot (a_2 + b_2\alpha) + (a_1 + b_1\alpha) \cdot (a_3 + b_3\alpha) = \\ = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2)\alpha + a_1a_3 + \\ + (a_1b_3 + a_3b_1 + b_1b_3)\alpha.$$

$$(a_1 + b_1\alpha) \cdot (a_2 + b_2\alpha + a_3 + b_3\alpha) = \\ = (a_1 + b_1\alpha) \cdot (a_2 + a_3 + (b_2 + b_3)\alpha) = \\ = a_1a_2 + a_1a_3 + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2)\alpha + \\ + (a_1b_3 + a_3b_1 + b_1b_3)\alpha.$$

Сравнение слагаемых в первом и втором результате подтверждает равенство (5), т. е. дистрибутивность операции умножения относительно операции сложения.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ ВЫЧИТАНИЯ И ДЕЛЕНИЯ *LL* И *RR*-ЧИСЕЛ

Интервальная алгебра, лежащая в основе определения арифметических операций с помощью α-уровневого принципа обобщения определяет операции вычитания и деления как самостоятельные операции. При этом интервальные числа в общем случае не обладают свойством дистрибутивности умножения относительно сложения; отсутствуют понятия противоположного элемента (обратного элемента по сложению) и обратного элемента (по умножению). Это приводит к искажению естественных математических соотношений. Так, вычитание из интервального числа равного ему в общем случае не приводит к единственному нуль-интервалу, как и деление интервального числа на равное ему не дает единственной интервальной единицы [4]. Следствием этого является трудности предметной интерпретации математических моделей, используемых при решении задач выбора и управления. Например, балансовое уравнение, полученное в ходе нечетких вычислительных операций, становится неадекватным реально существующему балансу.

В этой связи определение противоположного и обратного элементов и их использование для реализации операций вычитания и деления может оказаться целесообразным.

Для каждого элемента множества K определим единственный противоположный элемент $-x(\alpha) = -a - b\alpha$ такой, что $x(\alpha) + (-x(\alpha)) = a + b\alpha - a - b\alpha = \tilde{0}$. Следует обратить внимание на изменение типа числа у противоположного элемента: число LL типа имеет противоположное RR-число и наоборот.

Несколько сложнее определение обратного элемента $x^{-1}(\alpha)$ такого, что $x(\alpha) \cdot x^{-1}(\alpha) = \tilde{1}$.

Обратный элемент должен принадлежать множеству K, то есть иметь структуру $x^{-1}(\alpha) = a' + b'\alpha$.

Достаточно очевидно, что первое слагаемое обратного элемента должно иметь вид $a' = a^{-1}$. Тогда $x(\alpha) \cdot x^{-1}(\alpha) = (a + b\alpha) \cdot (a^{-1} + b'\alpha) = = 1 + (ab' + a^{-1}b + bb')\alpha$. Потребуем, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$ab' + a^{-1}b + bb' = 0.$$

Отсюда $b' = \dfrac{-b}{a(a+b)}$.

Обратный элемент вводится в виде

$$x^{-1}(\alpha) = a^{-1} - \frac{b}{a(a+b)}\alpha; \quad a \neq 0, a \neq -b. \quad (6)$$

Полученные обратные элементы позволяют ввести операции вычитания и деления LL и RR-чисел.

Полученная в разделах 2 и 3 совокупность свойств алгебраической структуры $(K; +, \cdot)$ позволяет сделать вывод о возможности рассмотрения множества чисел $x(\alpha)$ как поля относительно введенных операций и возможности выполнения арифметических действий над числами $x(\alpha)$ как над действительными числами.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ДВУХКОМПОНЕНТНЫМИ НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

На первый взгляд принцип формирования результата операции над треугольными нечеткими числами из двух компонент выражения (2) очень простой – выполняются соответствующие операции над левыми и правыми компонентами, при этом левые результаты помещаются в левой компоненте представления (2), а правые в правой. Схему взаимодействия левой и правой компонент треугольного числа можно представить в следующем виде

$$(l_1, r_1) * (l_2, r_2) = (l_1 * l_2, r_1 * r_2) = (x_1, x_2);$$
$$* \in \{+, -, \cdot, /\}. \qquad (7)$$

При этом могут получиться следующие варианты представления результирующего числа: $(x_1, x_2) \in \{(l, r),\ (r, l),\ (l_1, l_2),\ (r_1, r_2)\}$. Тип функции ($l$ или r) определяется знаком параметра b в формуле (2): положительный знак определяет LL-число, а отрицательный RR-число.

Очевидно, что понятию треугольного числа отвечает только один тип – (l, r), к которому, в общем случае не приводятся результаты выполнения операций по схеме (7). Тип (l, r) может быть однозначно получен при использовании подходящей из возможных пар, определяемых прямым произведением $(l_1, r_1) \times (l_2, r_2) = (l_1 l_2, l_1 r_2, r_1 l_2, r_1 r_2)$, применяемых в зависимости от знаков коэффициентов функций l и r. Такой подход даст результаты полностью соответствующие, например, интервальной алгебре на выделенных α-уровнях со всеми присущими ей недостатками приведенными во введении.

Для их преодоления допустим, что представление (2) не отражает концепцию треугольного LR-числа, а рассматривается как двухкомпонентное отображение исходных оценок эксперта о степени пессимизма (например, l) и степени оптимизма (например, r) относительно достижения численной величины m. Допустим также, что в процессе обработки экспертной информации разрешается компенсировать противоположные оценки, т. е. при выполнении арифметических действий разрешается вычитаться коэффициентам нечеткости. Последнее допущение не противоречит здравому смыслу для ряда задач, хотя и не согласуется с постулатом теории вероятности о возрастании дисперсии результата действий над случайными числами.

В этом случае при полном сохранении исходной экспертной информации отсутствует жесткая привязка к понятиям левый и правый коэффициенты нечеткости, левая и правая граница интервала. Нечеткая информация типа (r, l) будет иметь понятный содержательный смысл, например, степень оптимизма и степень пессимизма, такой же, как и у типа (l, r) – степень пессимизма и степень оптимизма. Содержательная интерпретация может быть определена для типов (l, l) и (r, r) как двойное, не совпадающее (на численном уровне) суждение о степени пессимизма или оптимизма. Такое представление нечеткого числа можно было бы назвать двухкомпонентным нечетким числом. Чтобы отличать двухкомпонентные нечеткие числа от треугольных LR-чисел будем обозначать их заглавными буквами латинского алфавита с крышкой, например, $\hat{A}$. Заметим, что введенные операции над компонентами нечеткого числа остаются прежними применительно к компонентам двухкомпонентных чисел. Арифметические действия над двухкомпонентными нечеткими числами можно совершать по схеме (7), сохраняя при этом алгебраическую структуру компонент. Дальнейшая обработка двухкомпонентных нечетких чисел, т. е. арифметические действия над результатами применения схемы (7), совершаются для каждой компоненты без оглядки на тип функции компоненты:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 * y_2, x_2 * y_2) = (z_1, z_2);$$
$$x, y, z \in K;\ * \in \{+, -, \cdot, /\}. \qquad (8)$$

Такой подход позволяет говорить об алгебре двухкомпонентных нечетких чисел. Основное преимущество предложенного подхода состоит в сохранении алгебраических свойств введенных операций и преодолении недостатков классических подходов. Для иллюстрации этих утверждений рассмотрим несколько примеров.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Для исходных нечетких чисел, например, тех, которые отображают суждения эксперта, представление в виде треугольных нечетких чисел и двухкомпонентных чисел эквивалентны. Для зависимых нечетких чисел, т. е. чисел полученных в результате выполнения операций, эти представления различаются. В примерах будем обозначать треугольные нечеткие числа большими латинскими буквами с волной и тройкой характеристических параметров, например, $\tilde{A} = (a; m; b)$; а двухкомпонентные числа – такими же буквами, только с крышкой и двумя функциями вида (2), например, $\hat{A} = (a_1 + b_1\alpha, a_2 - b_2\alpha)$.

Пример 1. Определить разность двух нечетких чисел с одинаковой степенью нечеткости:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (2;3;4) - (1;2;3) =$$

$$= (2+\alpha, 4-\alpha) - (1+\alpha, 3-\alpha).$$

Если рассматривать нечеткие числа как треугольные LR-числа (рис. 1), т. е. обеспечить правильное расположение компонент l и r, то результат (рис. 1) будет иметь вид: $(-1;1;3)$. Этот результат совпадает с результатом, получаемым с использованием традиционных подходов.

При действиях по схеме (8), т. е. представлении нечеткого числа как двухкомпонентного, результат $\hat{A} - \hat{B}$ (рис. 1) примет вид:

$$(2+\alpha, 4-\alpha) + (-1-\alpha, -3+\alpha) = (1+0\alpha, 1+0\alpha).$$

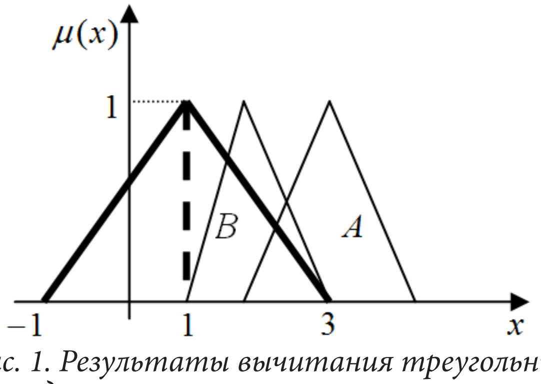

Рис. 1. Результаты вычитания треугольных и двухкомпонентных нечетких чисел

На рис. 1 результаты вычитания треугольных и двухкомпонентных нечетких чисел показаны толстой линией, сплошной и пунктирной соответственно.

Сравнение полученных результатов показывает, что в первом случае нечеткость результата удвоилась по отношению к исходным данным, а во втором полностью пропала, что объясняется разрешением компенсации противоположных экспертных оценок. Легко проверить, что вычитание эквивалентных нечетких чисел по первой схеме дает результат в виде нечеткого числа с нулевой модой и границами, определяемыми соответствующими границами исходных чисел, например:

$$(2+\alpha, 4-\alpha) + (-4+\alpha, -2-\alpha) =$$

$$= (-2+2\alpha, 2-2\alpha) = (-2, 0, 2).$$

Вторая схема для рассматриваемого примера дает результат

$$(2+\alpha, 4-\alpha) + (-2-\alpha, -4+\alpha) =$$

$$= (0+0\alpha, 0+0\alpha) = \tilde{0}.$$

Здесь и далее $\tilde{0} = (0+0\alpha, 0+0\alpha) = (0,0,0)$. Легко убедиться, что нечеткий нуль в двухкомпонентном представлении ничем не отличается от треугольного.

Пример 2. Решить уравнение $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} = \tilde{0}$, $\tilde{A} = (1+\alpha, 5-3\alpha)$, $\tilde{B} = (2+3\alpha, 6-\alpha)$.

Правые и левые части уравнения содержат нечеткие числа, знак равенства рассматривается как равенство функций принадлежности левой и правой части.

Вычисления с использованием традиционных операций с треугольными числами дают следующий результат:

$$\tilde{X} = -\tilde{B} \cdot \tilde{A}^{-1} = (-6; -2,5; -0,4).$$

Подстановка результата в уравнение дает:

$$(-24; 0; 1,6) \neq \tilde{0}.$$

Равенство не выполняется, следовательно, полученный результат не может рассматриваться как решение.

Деление треугольного нечеткого числа само на себя не обеспечивает результат в виде $\tilde{1} = \hat{1} = (1+0\alpha; 1+0\alpha)$, например:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A}^{-1} = (1+\alpha; 5-3\alpha) \cdot (0,2+0,3\alpha; 1-0,5\alpha) =$$

$$= (0,2+0,8\alpha; 5-4\alpha) \neq \tilde{1}.$$

Вычисления по схеме (8) с применением алгебры двухкомпонентных чисел дают корень уравнения:

$$\hat{X} = -\hat{B} \cdot \hat{A}^{-1} =$$

$$= (-2-3\alpha, -6+\alpha) \cdot (1-0,5\alpha, 0,2+0,3\alpha) =$$

$$= (-2-0,5\alpha; -1,2-1,3\alpha).$$

Подстановка решения в уравнение дает тождество $\hat{0} = \hat{0}$.

Деление двухкомпонентного числа само на себя дает $\hat{1} = (1+0\alpha; 1+0\alpha)$, например:

$\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = (1+\alpha; 5-3\alpha) \cdot (1-0,5\alpha; 0,2+0,3\alpha) = \hat{1}$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений $\tilde{A}x = \tilde{B}$ методом Крамера, где элементы матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечеткие треугольные числа. Рассмотрим эту задачу на простом примере двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\tilde{A}_{11} = (1;3;4),\ \ \tilde{A}_{12} = (1;2,5;3),\ \ \tilde{A}_{21} = (2;2,5;4),$$
$$\tilde{A}_{22} = (1;2;4,5).$$
$$\tilde{B}_1 = (4;5;7),\ \ \tilde{B}_2 = (1;4;5).$$

Решение традиционными методами (использование интервальных арифметик или арифметик LR-чисел) получить нельзя, так как определитель системы $\tilde{\Delta} = (-11;-0,25;10)$ не может быть представлен каким-либо разумным способом как делитель.

Решение на основе алгебры двухкомпонентных чисел выполняется независимо для каждой из компонент. Для левых компонент определители и решение имеют вид:

$$\hat{\Delta}_l = (-1+0,75\alpha),\ \ \hat{\Delta}_l^{-1} = (-1-3\alpha),$$
$$\hat{\Delta}_1^l = (3-3\alpha),\ \ \hat{\Delta}_2^l = (-7+6,5\alpha).$$
$$\hat{X}_1^l = (-3+3\alpha),\ \ \hat{X}_2^l = (7-5\alpha).$$

Эти решения точно удовлетворяют системе уравнений из левых компонент:

$$\begin{cases}(1+2\alpha)\hat{X}_1^l + (1+1,5\alpha)\hat{X}_2^l = 4+\alpha,\\ (2+0,5\alpha)\hat{X}_1^l + (1+\alpha)\hat{X}_2^l = 1+3\alpha.\end{cases}$$

Для правых компонент определители и решение имеют вид:

$$\hat{\Delta}_r = (6-6,25\alpha),\ \ \hat{\Delta}_r^{-1} = (0,17-4,17\alpha),$$
$$\hat{\Delta}_1^r = (16,5-16,5\alpha),\ \ \hat{\Delta}_2^r = (-8+7,5\alpha).$$
$$\hat{X}_1^r = (2,75-2,75\alpha),\ \ \hat{X}_2^r = (-1,33+3,34\alpha).$$

Эти решения точно удовлетворяют системе уравнений из правых компонент:

$$\begin{cases}(4-\alpha)\hat{X}_1^r + (3-0,5\alpha)\hat{X}_2^r = 7-2\alpha,\\ (4-1,5\alpha)\hat{X}_1^r + (4,5-2,5\alpha)\hat{X}_2^r = 5-\alpha.\end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования показали, что множество нечетких LR-чисел в любом из рассматриваемых представлений не является полем относительно операций сложения и умножения, что обуславливает неоправданное расширение неопределенности результата и нарушение истинности естественных математических отношений. Предложенные двухкомпонентные нечеткие числа (для треугольных функций принадлежности) образуют поле P относительно сложения и умножения и позволяют преодолеть недостатки LR-чисел. Ограничение расширение неопределенности результата операций достигается за счет разрешения компенсации противоположных оценок эксперта в исходных нечетких числах и вычитания коэффициентов нечеткости в зависимых числах. Алгебра двухкомпонентных чисел обеспечивает истинность естественных математических отношений и сохраняет форму нечеткого числа. Как показано в примере 3, алгебра двухкомпонентных чисел может обеспечить решение уравнений в случаях, когда традиционные подходы не работают вследствие ограничений на знаки характеристик нечеткого числа. Предложенная форма двухкомпонентного числа может быть распространена на другие формы представления функций принадлежности выпуклого нормального нечеткого числа, что имеет особо важное значение в задачах оптимального управления экономическими системами в условиях интервальной неопределенности [5–7].

Множество K двухкомпонентных чисел можно рассматривать как линейное пространство над полем P, т. к. для всех элементов из K определены ассоциативные и коммутативные операции сложения и умножения на скаляр (частный случай умножения на нечеткое число), а само множество замкнуто относительно этих операций. При этом умножение дистрибутивно относительно сложения и определены: единственные нулевой и единичный элементы, противоположный элемент и обратный элемент. Наличие линейного пространства определяет дальнейшие перспективы развития вычислительных операций с элементами множества K.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / [А.Н. Аверкин и др.]; Под ред. Д.А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 311 с.

2. *Усков А.А., Сургучева И.В., Горбунов А.М.* Анализ систем обработки информации и управления с помощью групповых нечетких чисел // Программные продукты и системы, 2009. – № 3. С. 19–21.

3. Методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределённости / Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г., Семенов М.Е., Канищева О.И. // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии», научный журнал, № 1, 2012. – С. 102–106.

4. *Левин В.И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. – 1998. № 6. (Федеральный портал «Инженерное образование». Интеллектуальные системы. http://www.techno.edu.ru. – Дата доступа: 5.05.2005).

5. Дефаззификация решений дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами / Матвеев М.Г., Семенов М.Е., Канищева О.И., Абаполова Е.А. // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии», научный журнал, №1, 2011. – С. 179–183.

6. Модель оптимальной производственной стратегии в условиях нечетких параметров функции спроса / Семенов М.Е., Лебедев Г.Н., Абаполова Е.А., Матвеев М.Г., Гринева Е.А. // Современная экономика: проблемы и решения. № 6, 2012. – С. 71–76.

7. *Семенов М.Е., Матвеев М.Г., Лебедев Г.Н.* Оптимальное управление в задаче о выборе производственной и ценовой стратегии // Системы управления и информационные технологии, № 4.1 (38), 2009. – С. 71–75.

Матвеев Михаил Григорьевич – д.т.н., профессор, зав. кафедрой информационных технологий управления факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета.
Тел.: 8-910-344-97-47.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Канищева Олеся Ивановна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж).
Тел.: 8-910-245-49-54.
E-mail: oleka_olesya@mail.ru

Воронцов Ярослав Александрович – аспирант кафедры информационных технологий управления факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета.
Тел.: 8-908-131-57-45.
E-mail: Voroncov_ya@sc.vsu.ru

Matveev M.G. – doctor of technical sciences, professor, Head of chair of information technologies of management and control, Computer Science faculty of Voronezh State University.
Phone: 8-910-344-97-47.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Kanishcheva O.I. – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Associate professor of Military and air academy of a name of professor N. E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin (Voronezh). Phone: 8-910-245-49-54.
E-mail: oleka_olesya@mail.ru

Vorontsov Y.A. – Postgraduate student of chair of information technologies of management and control, Computer Science faculty of Voronezh State University.
Phone: 8-908-131-57-45.
E-mail: Voroncov_ya@sc.vsu.ru