УДК 519.71:612.171.1

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В МОДЕЛИ МАКШЕРРИ НА ОСНОВЕ ЭКСПОНЕНТ ЛЯПУНОВА

В. П. Марценюк, Р. О. Сарабун

Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевского

Поступила в редакцию 19.02.2014 г.

Аннотация. В данной работе рассмотрена модель МакШерри построения искусственных ЭКГ. С помощью разработанного программного обеспечения построения ЭКГ сигнала исследовано нелинейное поведение модели МакШерри на основе экспонент Ляпунова.
Ключевые слова: ЭКГ, модель МакШерри, экспоненты Ляпунова, нелинейная динамика.
Annotation. We considered a model McSharry for modeling ECG signal in this paper. We investigated the nonlinear behavior of the model McSharry based on Lyapunov's exponents with the help of software developed for constructing the ECG signal.
Keywords: ECG, McSharry's model, Lyapunov exponents, nonlinear dynamics.

ВВЕДЕНИЕ

Модель МакШерри предложена П. МакШерри, Г. Клиффорд, Л. Тарасенко и Л. Смитом в работе [1]. В работе [2] была предложена программная реализация модели.

Модель генерирует траекторию ЭКГ в трехмерном пространстве с координатами (x, y, z). Квазипериодичность ЭКГ отображается движением траектории по ограниченному кругу в плоскости (x, y). Каждый проход круга соответствует одному RR-интервалу. Отдельные зубцы на ЭКГ, такие как P, Q, R, S, T, отражении посредством движения траектории относительно оси z. Их находят по фиксированным углами θ_P, θ_Q, θ_R, θ_S, θ_T на круге в плоскости (x, y).

Для построения модели использована система трех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) - \omega y(t) \\ y'(t) &= \alpha y(t) + \omega x(t) \\ z'(t) &= -\sum_{i\in\{P,Q,R,S,T\}} a_i \Delta\theta_i \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}\right) - \left(z(t) - z_0(t)\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha = 1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, $\Delta\theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$, $\theta = \operatorname{atan2}(y(t), x(t))$ и ω – угловая скорость, $z_0(t) = A\sin(2\pi f_2 t)$, $A = 0{,}15$ мВ.

Для значения параметров θ_i, a_i, b_i использованы данные ЭКГ здорового пациента. Их значение показано в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров θ_i, a_i, b_i в модели МакШерри

Индекс i	P	Q	R	S	T
Время (с)	–0,2	–0,05	0	0,05	0,3
θ_i (рад)	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
a_i	60	–250	1500	–375	37,5
b_i	0,25	0,1	0,1	0,1	0,4

Очевидно, что время, необходимое для завершения одного цикла синтетического сигнала равно RR-интервалу ЭКГ.

Целью работы является исследовать нелинейное поведение модели МакШерри на основе экспонент Ляпунова.

Экспоненты Ляпунова

Две траектории в фазовом пространстве $x(t) = f^t(x_0)$ и $x(t) + \delta x(t) = f^t(x_0 + \delta x_0)$, которые размещены очень близко, удаляются друг от друга экспоненциально со временем. Средняя скорость расхождения этих траекторий называется экспонентой Ляпунова λ и определяетсяизсоотношения $\|\delta x(t)\| \approx e^{\lambda t}\|\delta x_0\|$ как

$$\lambda = \lim_{\substack{t\to\infty \\ \|\delta x_0\|\to 0}} \frac{1}{t}\ln\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|}. \qquad (2)$$

Алгоритм определения экспонент Ляпунова для дифференциальных уравнений

Определение экспонент Ляпунова системы дифференциальных уравнений в данной работе базируется на методике, предложенной в работах [3], [4] и [5].

Экспоненты Ляпунова определяются переходом вдоль главной оси из центра бесконечно малой сферы. Центр сферы получается на основе нелинейных дифференциальных уравнений при определенных начальных условиях. Траектории точек на поверхности сферы определяются на основе линеаризированных дифференциальных уравнений в точках бесконечно мало удаленных от центра сферы. Главная ось определяется линеаризированными уравнениями и набором ортонормированных векторов, прикрепленных к центру сферы. Для построение ортонормированного базиса использован метод Грамма-Шмидта.

Линеаризация модели МакШерри

Линеаризацию системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), осуществлено в окрестности стационарного состояния (x^*, y^*, z^*). Получена система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = \left(1-\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)x^* - \omega y^* +$$

$$+\left(1-\frac{(x^*)^2}{\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}}-\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)\left(x(t)-x^*\right)+$$

$$+\left(-\frac{y^*x^*}{\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}}-\omega\right)\left(y(t)-y^*\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(1-\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)x^* + \omega y^* +$$

$$+\left(-\frac{y^*x^*}{\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}}+\omega\right)\left(x(t)-x^*\right)+$$

$$\left(1-\frac{(y^*)^2}{\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}}-\sqrt{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)\left(y(t)-y^*\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\sum_{i\in\{P,Q,R,S,T\}}\left(a_i\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\cdot\exp\left(-\frac{\left(\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\right)^2}{2b_i^2}\right)\right)$$

$$-z^* - \sum_{i\in\{P,Q,R,S,T\}}\left(\begin{array}{l}\left(-\dfrac{y^*}{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)\cdot\exp\left(-\dfrac{\left(\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\right)^2}{2b_i^2}\right)\\ \left(a_i+\dfrac{\left(\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\right)^2}{2b_i^2}\right)\end{array}\right)\left(x(t)-x^*\right)-$$

$$\sum_{i\in\{P,Q,R,S,T\}}\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{x^*}{(x^*)^2+(y^*)^2}\right)\cdot\exp\left(-\dfrac{\left(\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\right)^2}{2b_i^2}\right)\\ \left(a_i+\dfrac{\left(\left(a\tan 2(y^*,x^*)-\theta_i\right)\bmod 2\pi\right)^2}{2b_i^2}\right)\end{array}\right)\left(y(t)-y^*\right)-$$

$$\left(z(t)-z^*\right).$$

Программная реализация алгоритма расчета экспонент Ляпунова

Программная среда, предложенная в данной работе, реализована в виде пакета Java-классов. В него входят следующие пакеты и классы.

Пакет fde предназначен для получения численного решения дифференциальных уравнений. Пакет graph содержит классы, предназначенные для графической визуализации решений уравнений. В пакете McSharryECGLiapunovExponent содержатся классы с описанием модели МакШерри и алгоритмом расчета экспонент Ляпунова. Сюда входят классы:

- McSharryECGSystemLiapunovExponentsSystem – описывает правые части дифференциальных уравнений модели МакШерри и алгоритм расчета экспонент Ляпунова;
- McSharryECGSystemLiapunovExponentsSystemGraph – используется для построения графиков решений уравнений;
- McSharryECGSystemLiapunovExponentsSystemGraph Menu – класс, который описывает главное меню программы;
- McSharryECGSystemLiapunovExponentsSystemInputDataFrame – класс-фрейм для ввода начальных параметров модели.

Экспоненты Ляпунова рассчитываются в ходе выполнения цикла

```
for (double i = x0; i <= x1;
     i + = hmax) {....}
```

Здесь i – счетчик цикла, x0 – начало интервала интегрирования, x1 – конец интервала интегрирования, hmax – шаг интегрирования.

На каждой итерации происходит построение ортонормированного базиса методом Грамма-Шмидта. Для этого осуществляется построение и нормализация первого вектора базиса:

```
znorm[1] = 0.;
for (int j = 1;
     j <= n_nonlinear_system; j++)
  {znorm[1] = znorm[1] +
   Math.pow (y [n_nonlinear_system *
             j+1], 2);}
znorm[1] = Math.sqrt (znorm[1]);
for (int j = 1;
     j <= n_nonlinear_system; j++)
  {y[n_nonlinear_system*j+1] =
   y[n_nonlinear_system*j+1] /
                       znorm[1];}
```

и на его основе построение остальных векторов базиса, которое осуществляется во время выполнения цикла:

```
for (int j = 2;
     j <= n_nonlinear_system; j++)
   {....}
```

На каждой итерации происходят следующие действия:

- определение коэффициентов ренормализации Грама-Шмидта

```
for (int k = 1; k <= j-1; k++)
   {gsc[k] = 0.;
    for (int l = 1;
    l<=n_nonlinear_system; l++)
      {gsc[k] = gsc[k] +
       y[n_nonlinear_system*l+j]
      *y[n_nonlinear_system*l+k];
      }
   }
```

- построение вектора

```
for (int k = 1;
     k <= n_nonlinear_system; k++)
  {for( int l=1; l<=j-1; l++)
     {
      y[n_nonlinear_system*k+j]=
      y[n_nonlinear_system*k+j]-
      gsc[l]*
      y[n_nonlinear_system*k+l];
     }
  }
```

- определение нормы вектора

```
znorm [j] = 0.;
for (int k = 1;
     k <= n_nonlinear_system; k++)
  {znorm[j]=znorm[j]+
   Math.pow(y[n_nonlinear_system*
   k+j], 2);}
znorm[j]=Math.sqrt(znorm[j]);
```

- нормализация вектора

```
for (int k = 1;
     k <= n_nonlinear_system; k++)
```

```
{if(znorm [j]! = 0.)
   {y[n_nonlinear_system*k + j] =
    y[n_nonlinear_system*k + j] /
                         znorm [j];}
 else
   System.out.println
            («Null exception»);}}
```

На следующем шаге выполнения алгоритма происходит построение экспонент Ляпунова:

```
for (int k = 1;
     k <= n_nonlinear_system; k++)
  {cum[k] = cum [k] +
  Math.log(znorm[k])/Math.log(2.);}
```

их нормализация и вывод на каждой итерации:

```
if ((Math.round (i/hmax))% io == 0)
  {for(int k = 1;
       k <= n_nonlinear_system; k++)
    System.out.println(«x =» + x +
    «,Liapunov exponent =» +
    cum[k] / x);}}}
```

Описание правых частей дифференциальных уравнений модели МакШерри и правых частей линеаризованных дифференциальных уравнений модели МакШерри происходит в функции fcn().

Численный эксперимент

Для вычисления экспонент Ляпунова были использованы параметры модели МакШерри, представлены в табл. 1. Окно ввода параметров показано на рис. 1.

В результате выполнения программы получены решения модели (1) (рис. 2) и значение экспонент Ляпунова: $\lambda_1 = 0,2994$, $\lambda_2 = -0,0205$, $\lambda_3 = -1,2696$.

ВЫВОДЫ

Экспоненты Ляпунова является фундаментальной характеристикой динамической системы, поскольку именно на них основывается самое общее определение хаоса [6]. А именно, динамическая система является хаотической, если ее аттрактор обладает по крайней мере одной положительной экспонентой Ляпунова.

Численный эксперимент выявил наличие положительной экспоненты Ляпунова λ_1, что свидетельствует о хаотическом характере траектории модели МакШерри.

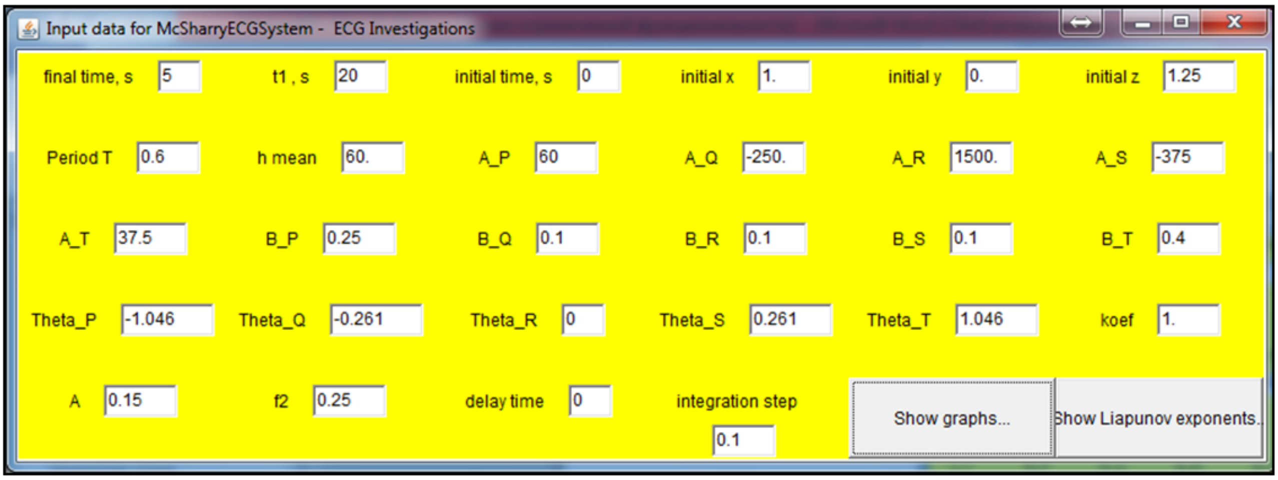

Рис. 1. Окно ввода параметров модели МакШерри

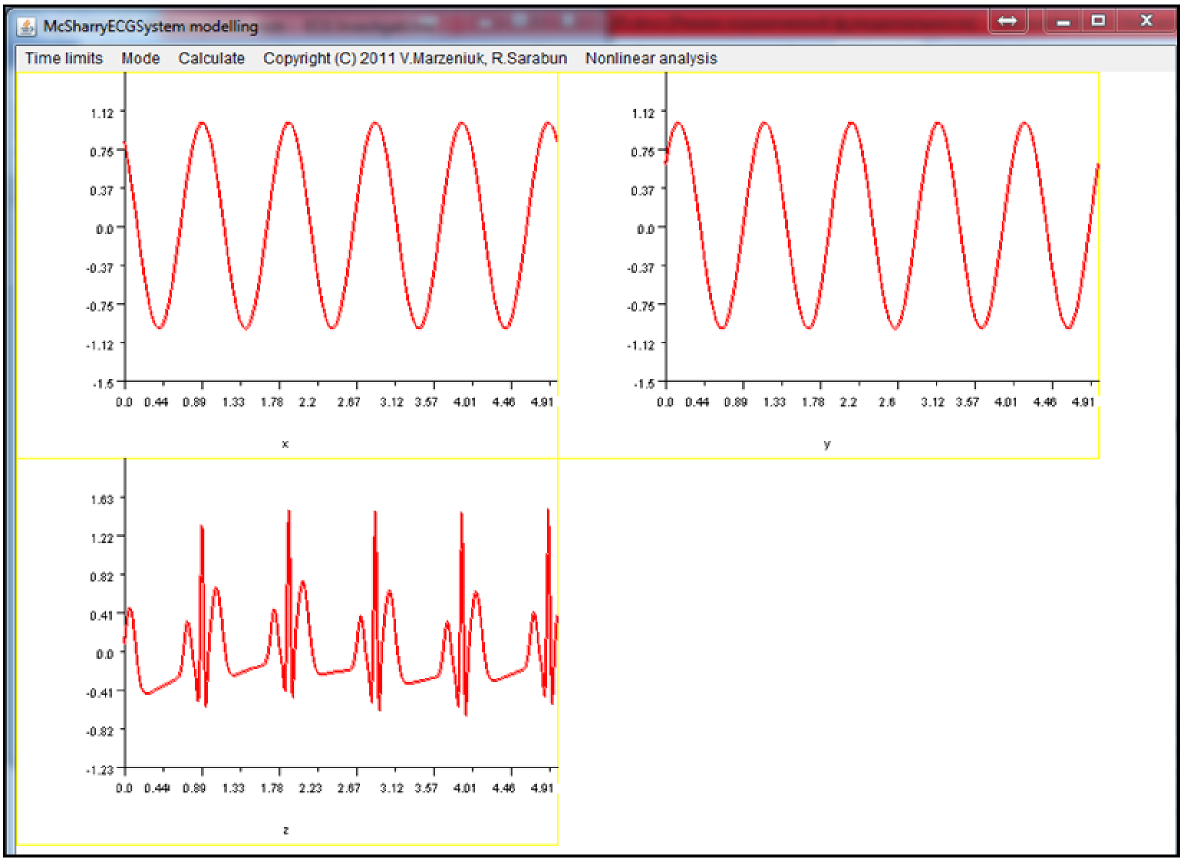

Рис. 2. Решения модели МакШерри

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McSharry P.E., Clifford G., Tarassenko L., Smith L.A.* A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. IEEE Transaction On biomedical Engineering, 2003, 50 (3). – С. 289-294.

2. *Марценюк В.П., Сарабун Р.А.* Программная среда построения искусственных ЭКГ. Клиническая информатика и телемедицина, 2012. – Т. 8. – Вып. 9.

3. *Wolf A., Swift B.J., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining lyapunov exponents from a time series. Physica D: Nonlinear Phenomena.Volume 16 Issue 3, July 1985. – P. 285–317.

4. *Benettin G.,. Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems. A Method for Computing All of Them, Meccanica 15 (1980).

5. *Shimada I. and Nagashima T.* A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems, Prog. Theor. Phys. 61 (1979) 1605.

6. *Eichhorn R., Linz J.S., Hanggi P.* Transformation invariance of Lyapunov exponents. Chaos, Solitons and Fractals 12 (2001) 1377–1383.

Марценюк Василий Петрович – д.т.н., проф. Кафедра медицинской информатики Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевского.
Тел.: (0352) 52-47-71. Email: marceniuk@yahoo.com

Сарабун Роман Олегович – Кафедра медицинской информатики Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевского. Тел.: (0352) 52-02-90. Email: romasar86@gmail.com

Marceniuk V. P. – Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Medical Informatics. Ternopil State Medical University. I.Ya.Gorbachevskogo. Ukraine. Phone: (0352) 52-47-71. E-mail: marceniuk@yahoo.com

Sarabun R.O. – Department of Medical Informatics. Ternopil State Medical University. I.Ya.Gorbachevskogo. Ukraine.
Phone: (0352) 52-02-90.
Email: romasar86@gmail.com