# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 681.3

# ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН НА ИДЕАЛЬНОМ ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

**В. Л. Хацкевич**

*Воронежский государственный университет*

*Поступила в редакцию 27.02.2014 г.*

**Аннотация.** В статье построена и исследована непрерывная динамическая модель рынка ценных бумаг, характеризующая изменение стоимости ценных бумаг во времени. Предлагаемая модель описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. При естественных с экономической точки зрения предположениях на параметры модели установлена глобальная устойчивость рынка.

**Ключевые слова:** оптимальный портфель ценных бумаг, рыночное равновесие, устойчивость рынка ценных бумаг.

**Annotation.** The article is constructed and investigated continuous dynamic model of the securities market, characterizing the change in the value of securities in time. The proposed model is described by a system of nonlinear differential equations. When natural from the economic point of view of the assumptions on the parameters of the model installed global stability of the market.

**Keywords:** optimal portfolio of securities, market equilibrium, the stability of the securities market.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается применение концепции конкурентного рыночного равновесия по Вальрасу (см., напр., [1] ч. II гл. 2) к рынку ценных бумаг. Предлагаемый метод основан на построении функции обобщенного спроса, порождаемой спецификой оптимизационного подхода Марковица-Тобина (М-Т) к формированию портфеля ценных бумаг [2, 3]. Он дает возможность получить формулы для равновесных цен, характеризующихся равенством спроса и предложения на рынке ценных бумаг.

Предлагаемая динамическая модель финансового рынка базируется на классическом предположении о пропорциональной зависимости скорости из-менения рыночных цен от функции обобщенного спроса. Она описывается системой дифференциальных уравнений, обладающих свойством конвергент-ности. Это свойство обеспечивает устойчивость финансового рынка, т. е. равновесные цены являются пределами положительных траекторий, соответствующих решениям модельной системы дифференциальных уравне-ний при $t \to +\infty$.

Исследование динамической модели рынка ценных бумаг опирается на методы качественной теории дифференциальных уравнений (см. [4, 5]) и результаты автора [6, 7] в области моделирования динамики конкурентного рынка.

Другие подходы к моделированию непрерывной динамики на финансовых рынках и построению равновесных цен продемонстрированы в [8–11].



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00253А

**1. Равновесные цены.** Пусть на рынке имеется $n$-видов рисковых ценных бумаг. Пусть $q_i$ – общая стоимость бумаг $i$-го вида. Будем рассматривать $q_i$, как случайные величины с математическими ожиданиями $x_i$ (средними стоимостями) и ковариациями $b_{ij} = \operatorname{cov}(q_i, q_j)$. Обозначим через $B$ матрицу ковариации $B = (b_{ij})$ и будем считать ее известной из предыдущих наблюдений. Отметим, что по определению матрица $B$ симметрична. Кроме того предположим, что на рынке имеются безрисковые ценные бумаги. Пусть на рынке имеется m-инвесторов с капиталами $k_l$ $(l = 1,\ldots,m)$ соответственно. В соответствии с гипотезой идеального финансового рынка будем считать, что все инвесторы одинаково информированы о состоянии рынка ценных бумаг, и каждый инвестор руководствуется оптимизационным правилом типа М-Т (ср., напр., [12, 13]) при выборе оптимальных долей $\theta_i^l$ $(i = 1,\ldots,n; l = 1,\ldots,m)$ вложения в ценные бумаги. А именно, каждый инвестор решает следующую задачу:

Найти

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\theta_i^l\theta_j^l \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^l + \theta_0^l = 1. \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^l x_i + \theta_0^l r_0 = k_l. \tag{3}$$

Здесь $\theta_0^l$ – доля безрисковых вложений, $r_0$ – стоимость безрисковых бумаг, $l$ изменяется от 1 до $m$.

Отметим, что классическая постановка задачи М-Т несколько иная. А именно, вместо средних стоимостей ценных бумаг (как в нашем случае) рас-сматриваются их средние доходности, а постоянные $k_i$ обозначают предполагаемые эффективности портфелей. Однако, для наших целей изучения равновесных средних цен удобнее рассматривать указанную постановку оптимизационных задач. Ниже в выражениях средней цены либо средней стоимости ценных бумаг $i$-го вида слово «средняя» будем опускать имея его ввиду по умолчанию.

Как известно [12] однозначная разрешимость задачи (1)–(3) обеспечивается, например, при выполнении условия положительной определенности матрицы $B$. В дальнейшем это условие и будем предполагать выполненным.

Рыночное равновесие предполагает, что каждый инвестор наилучшим образом удовлетворяет свои потребности исходя из наличного капитала и поставленной оптимизационной задачи. В то же время все ценные бумаги находят своих покупателей (равенство спроса и предложения).

Таким образом, для равновесных цен на рисковые активы должны быть выполнены следующие уравнения баланса:

$$\sum_{l=1}^{m} \theta_i^l x_i = x_i \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{4}$$

Поэтому,

$$\sum_{l=1}^{m} \theta_i^l = 1 \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{5}$$

В этих условиях для безрисковых долей выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_0^l = m - n. \tag{6}$$

Заметим, что согласно (6) в условиях равновесия $m \ge n$.

Равенство (6) получается из следующих соображений. С одной стороны,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\theta_i^l\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

С другой стороны,

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^l\right) = \sum_{l=1}^{m}\left(1-\theta_0^l\right) = m - \sum_{l=1}^{m}\theta_0^l.$$

Поэтому справедливо (6).

В частности, согласно (6) если $m - n = 1$, то $\sum_{i=1}^{m}\theta_0^l = 1$ и забираются все безрисковые бумаги и наоборот, если забираются все безрисковые бумаги, то $m - n = 1$.

Отметим еще, что в условиях равновесия суммарный капитал инвесторов $k$ равен

$$k = \sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m}\left(r_0\theta_0^l + \sum_{i=1}^{n}\theta_i^l x_i\right) =$$

$$= r_0\sum_{i=1}^{m}\theta_0^l + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i^l\right)x_i = r_0\sum_{i=1}^{m}\theta_0^l + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Отсюда с учетом (6) получим

$$k = r_0\left(m-n\right)+\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Пусть $X$ – вектор с компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$, $I$ – вектор с единичными компонентами, а $\theta^l$ – вектор с компонентами $\theta_1^l, \theta_2^l, \dots, \theta_m^l$. Пусть скобки ( , ) обозначают скалярное произведение в эвклидовом пространстве $R^n$ с нормой $\|\ \|$. Положительность (неотрицательность) вектора X из $R^n$ будем понимать как покомпонентную положительность (неотрицательность) и записывать $X > 0$ ($X \ge 0$).

Согласно [12, § 8.3] оптимальное распределение долей в задаче M-T (1)–(3) имеет вид

$$\theta^l = \frac{\left(k_l - r_0\right) B^{-1}\left(X - r_0 I\right)}{\left(B^{-1}\left(\left(X-r_0 I\right), X - r_0 I\right)\right)}. \qquad (7)$$

Тогда условие рыночного равновесия (5) выглядит следующим образом

$$\sum_{l=1}^{m}\theta^l = \frac{\left(k - mr_0\right) B^{-1}\left(X - r_0 I\right)}{\left(B^{-1}\left(X-r_0 I\right), X - r_0 I\right)} = I. \qquad (8)$$

Положим $X - r_0 I = Y$. Тогда равенство (8) переписывается в виде

$$\frac{\left(k - mr_0\right) B^{-1} Y}{\left(B^{-1}Y, Y\right)} = I. \qquad (9)$$

Поэтому $\left(k - mr_0\right) B^{-1} Y = \left(B^{-1}Y, Y\right) I$ . Следовательно,

$$Y = \frac{\left(B^{-1}Y, Y\right) BI}{k - mr_0}. \qquad (10)$$

Умножая обе части равенства (9) скалярно на Y, получим

$$k - mr_0 = \left(I, Y\right).$$

Подставляя в это равенство вместо Y формулу (10), найдем что

$$k - mr_0 = \left(I, \frac{I}{k - mr_0}\left(B^{-1}X, X\right) BI\right).$$

Таким образом,

$$\left(k - mr_0\right)^2 = \left(B^{-1}Y, Y\right)\left(I, BI\right).$$

Откуда

$$\left(B^{-1}Y, Y\right) = \frac{\left(k - mr_0\right)^2}{\left(BI, I\right)}.$$

Окончательно, подставляя это равенство в (10), получим равновесное значение по $Y$

$$Y_* = \frac{\left(k - mr_0\right)^2 BI}{\left(BI, I\right)\left(k - mr_0\right)} = \frac{k - mr_0}{\left(BI, I\right)} BI. \qquad (11)$$

Тогда равновесное значение по X имеет вид

$$X_* = r_0 I + \frac{k - mr_0}{\left(BI, I\right)} BI. \qquad (12)$$

Таким образом, мы установили следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть на рынке ценных бумаг имеются безрисковые ценные бумаги, а каждый инвестор действует в соответствии с оптимизационным правилом M-T (1)–(3). Тогда равновесная рыночная цена существует, единственна и определяется формулой (12).*

Отметим, что для положительности вектора $Y_*$ (и тем более $X_*$) согласно формуле (11) достаточно предположить, что $BI > 0$ и $k - mr_0 > 0$. Последнее условие согласно предыдущему можно записать в эквивалентной форме $\sum_{i=1}^{n} x_i > r_0 n$.

**2. Динамическая модель.** Положим $F\left(X\right) = \sum_{l=1}^{m}\theta^l\left(X\right) - I$, где $\theta^l\left(X\right)$ при каждом $X$ определяется формулой (7). Функцию $F\left(X\right)$ можно трактовать как функцию обобщенного спроса (спрос минус предложение). Легко проверить, что при выполнении предположений (2), (3) справедливо соотношение Вальраса

$$\left(F\left(X\right), X\right) \le 0 \quad \left(\forall X \in R^n : X \ne r_0 I\right).$$

В динамических моделях конкурентного рынка многие авторы, начиная с П. Самуэльсона (см. [14]), предполагали пропорциональную зависимость скорости изменения цен от функции обобщенного спроса. Следуя этой идее, рассмотрим динамическую модель рынка ценных бумаг в виде векторного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{l=1}^{m}\theta^l\left(X\right) - I, \qquad (13)$$

которое эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^{m}\theta_i^l - 1 \qquad \left(i = 1, \dots, n\right).$$

В силу (7)динамическая задача (13) имеет вид

$$\frac{dX}{dt}=\frac{\left(k-mr_0\right)B^{-1}\left(X-r_0I\right)}{\left(B^{-1}\left(X-r_0I\right),X-r_0I\right)}-I. \qquad (14)$$

Положим $Y=X-r_0I$. Тогда уравнение (14) запишется в виде

$$\frac{dY}{dt}=\frac{\left(k-mr_0\right)B^{-1}Y}{\left(B^{-1}Y,Y\right)}-I. \qquad (15)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на $Y$, найдем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t\right)\right\|^2=k-mr_0-\left(I,Y\right). \qquad (16)$$

*Замечание 1.* В случае $k-mr_0>0$ знаменатель дроби в формуле (15) не может обращаться в ноль для всякого решения $Y\left(t\right)$ уравнения (15) при $\forall t>0$, если начальное условие $Y\left(0\right)$ отлично от нулевого.

Действительно, согласно предположению оператор $B^{-1}$ положительно определен. Поэтому достаточно показать, что в условиях замечания решение $Y\left(t\right)$ не может обращаться в ноль. Отметим, что из (16) в силу соотношения $\left(I,Y\right)\le\left|\left(I,Y\right)\right|\le\sqrt{n}\left\|Y\right\|$ следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t\right)\right\|^2\ge k-mr_0-\sqrt{n}\left\|Y\left(t\right)\right\|.$$

Если в момент времени $t_0$ выполнено $\left\|Y\left(t_0\right)\right\|<\left(k-mr_0\right)/\sqrt{n}$, то $\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t_0\right)\right\|^2>0$. Поэтому функция $\left\|Y\left(t\right)\right\|$ в окрестности точки $t_0$ возрастает. Таким образом, справедлива оценка $\left\|Y\left(t_0\right)\right\|\ge\min\left\{\left\|Y\left(0\right)\right\|,\left(k-mr_0\right)/2\sqrt{n}\right\}$.

Далее заметим, что в силу связи $Y=X-r_0I$ формулу (16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t\right)\right\|^2=k-\left(m-n\right)r_0-\left(X,I\right). \qquad (17)$$

Для положительных векторов $X>0$ справедливо неравенство $\left(I,X\right)\ge\left\|X\right\|$. Поэтому, если $X\left(t\right)$ положительное решение уравнения (14), то из (17) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t\right)\right\|^2\le k-\left(m-n\right)r_0-\left\|X\left(\mathrm{t}\right)\right\|. \qquad (18)$$

В силу (18) справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Динамическая модель (14) при условии $k-\left(m-n\right)r_0<0$ не может иметь положительного решения при достаточно больших $t>0$. В случае $k-\left(m-n\right)r_0=0$ невозможно существование предела положительного решения при $t\to+\infty$. В случае $k-\left(m-n\right)r_0>0$, для положительного решения модели (14) справедливы оценки*

$$\left\|Y\left(t\right)\right\|\le\gamma+r_0\sqrt{n}\quad\left(\forall t\ge0\right),$$

$$\left\|X\left(t\right)\right\|\le\gamma+2r_0\sqrt{n}\quad\left(\forall t\ge0\right), \qquad (19)$$

*где* $\gamma=\max\left\{\left\|X\left(0\right)\right\|,k-\left(m-n\right)r_0\right\}$.

***Доказательство.*** Рассмотрим случай $k-\left(m-n\right)r_0<0$. Из (18) для положительных решений $X\left(t\right)$ уравнения (14) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|Y\left(t\right)\right\|^2\le k-\left(m-n\right)r_0.$$

Интегрируя обе части этого неравенства от 0 до $t$ найдем, что

$$\left\|Y\left(t\right)\right\|^2\le\left\|Y\left(0\right)\right\|^2+2t\left(k-\left(m-n\right)r_0\right).$$

Это означает, что за конечный промежуток времени норма $\left\|Y\left(t\right)\right\|$ обращается в ноль. Следовательно, при

$t=t_0=\left\|Y\left(0\right)\right\|^2/2\left(\left(m-n\right)r_0-k\right)$ получим $X\left(t_0\right)=r_0I$. При $t>t_0$ положительных решений уравнение (14) иметь не может.

Пусть $k-\left(m-n\right)r_0=0$. Предположим, существует предел при $t\to+\infty$ положительного решения $X\left(t\right)$ уравнения (14), равный $\xi$. Тогда найдется $t_0>0$ такое, что при $\forall\, t>t_0$ будет выполнено неравенство

$$\left\|X(t)\right\|\ge\frac{1}{2}\left\|\xi\right\|.$$

Тогда из (30) получим $\frac{d}{dt}(\left\|Y(t)\right\|^2)\le-\frac{1}{2}\left\|\xi\right\|$ при $\forall t\ge t_0$.

Интегрируя это неравенство от 0 до $t$ найдем, что выполнено соотношение

$$\left\|Y(t)\right\|^2\le\left\|Y(0)\right\|^2-\frac{t}{2}\left\|\xi\right\| \text{ при } \forall t\ge t_0.$$

Последнее означает, что за конечный промежуток времени норма $\left\|Y(t)\right\|$ обращается в 0, а при достаточно больших $t>0$ положительное решение уравнения (14) существовать не может. Полученное противоречие показывает, что в случае $k-(m-n)r_0=0$ невозможно существование предела на бесконечности положительного решения $X(t)$. В частности, не может быть предела, совпадающего с положением равновесия.

Рассмотрим случай $k-(m-n)r_0>0$. Установим оценки на $\|Y(t)\|$ и $\|X(t)\|$.

Пусть в некоторой точке $t_0$ выполнено $\|Y(t_0)\|>k-(m-n)r_0+r_0\sqrt{n}$. Согласно определению $Y$ и неравенству треугольника $\|Y(t)\|=\|X(t)-r_0I\|\le\|X(t)\|+r_0\|I\|=\|X(t)\|+r_0\sqrt{n}$. Поэтому в точке $t_0$ имеем $\|X(t_0)\|\ge\|Y(t_0)\|-r_0\sqrt{n}>k-(m-n)r_0$. Тогда на основании (18) заключаем, что $\|Y(t_0)\|'<0$. Следовательно, в окрестности точки $t_0$ функция $\|Y(t_0)\|$ убывает. Таким образом,

$$\|Y(t)\|\le\sup\left\{\|Y(0)\|,k+\left(n+\sqrt{n}-m\right)r_0\right\}$$

$(\forall t>0)$. Кроме того, в силу связи между $\|X(t)\|$ и $\|Y(t)\|$ справедлива оценка

$$\|X(t)\|\le\sup\begin{Bmatrix}\|X(0)\|+2r_0\sqrt{n}, \\ k+\left(n+2\sqrt{n}-m\right)r_0\end{Bmatrix}\ (\forall t>0).$$

Отсюда, используя определение $\gamma$, приведенное в формулировке леммы, получим оценку (19). Лемма доказана.

**3. Устойчивость динамической модели.** При доказательстве сходимости каждого решения задачи (14) к равновесному вектору (12) при $t\to+\infty$ применяется следующее утверждение общего характера.

**Лемма 2.** *Пусть $X(t)$ – решение векторного дифференциального уравнения $\frac{dX}{dt}=F(X)$ с непрерывной правой частью $F(X)$. Пусть решение $X(t)$ ограничено при $t\in(0,+\infty)$, причем $\omega$-предельное множество решения $X(t)$ состоит из одной точки $\xi$. Тогда существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\xi$, который является равновесным вектором.*

***Доказательство.*** Покажем сначала, что в условиях леммы существует предел решения $X(t)$ при $t\to+\infty$. Предположим противное. Пусть $X(t)$ не сходится к $\xi$ при $t\to+\infty$. Тогда найдутся положительное число $\varepsilon_0>0$ и неограниченно возрастающая последовательность $t_n$ такие, что

$$\|X(t_n)-\xi\|>\varepsilon_0 \qquad \forall n=1,2\dots .$$

С другой стороны, из последовательности $X(t_n)$ в силу ее ограниченности, а значит компактности, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее $X(t_{n_k})$. Согласно предыдущему $\lim\limits_{n_k\to+\infty}X(t_{n_k})=\xi$, а это противоречит указанному выше неравенству. Полученное противоречие показывает, что первоначальное предположение было неверным, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\xi$.

Покажем теперь, что предел $\xi=\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)$ является равновесным вектором. Действительно, в силу непрерывности правой части рассматриваемого уравнения имеем $\lim\limits_{t\to+\infty}F(X(t))=F(\xi)=\eta$. Тогда существует предел $\eta$ и левой части уравнения (16), т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{dX}{dt}=\eta$. Если предположить, что $\eta\ne0$, то придем к противоречию с условием $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\xi$.

В самом деле, пусть $\eta\ne0$. Зададим $\varepsilon=\frac{\|\eta\|}{2}$. По предположению, найдется момент времени $t_\varepsilon>0$, такой, что $\frac{dX}{dt}=\eta+\alpha(t)$, где $\|\alpha(t)\|<\frac{\|\eta\|}{2}$ при $\forall\, t>t_\varepsilon$.

В силу справедливости представления $X(t)-X(t_\varepsilon)=\int\limits_{t_\varepsilon}^{t}\frac{dX}{ds}ds$, тогда можем записать $X(t)-X(t_\varepsilon)=\eta(t-t_\varepsilon)+\int\limits_{t\varepsilon}^{t}\alpha(s)ds$. При этом согласно предположению

$$\left\|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t}\alpha(s)ds\right\|\le\int\limits_{t_\varepsilon}^{t}\|\alpha(s)\|\mathrm{ds}\le\frac{\|\eta\|}{2}(t-t_\varepsilon).$$

Тогда

$$\|X(t)-X(t_\varepsilon)\| \ge \|\eta\|(t-t_\varepsilon)-\left\|\int_{t_\varepsilon}^{t}\alpha(s)ds\right\| \ge$$

$$\ge \|\eta\|(t-t_\varepsilon)-\frac{\|\eta\|}{2}(t-t_\varepsilon)=\frac{\|\eta\|}{2}(t-t_\varepsilon).$$

Следовательно, $\|X(t)\| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Приходим к противоречию с первоначальным предположением $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)=\xi$. Тогда $\eta=0$ и $\xi$ – равновесный вектор. Что и требовалось доказать.

С использованием лемм 1, 2 устанавливается

**Теорема 2.** *Пусть $k>(m-n)r_0$. Тогда динамическая модель рынка ценных бумаг (14), соответствующая задаче М-Т устойчива. Более того, она конвергентна, т.е. каждая положительная траектория (решение (14)), если она существует, стремится при $t\to+\infty$ к единственному состоянию равновесия $X_*$, определяемому формулой (12).*

***Доказательство.*** В лемме 1 в предположении $k-(m-n)r_0>0$ и положительности решения $X(t)$ была установлена равномерная по $t>0$ оценка (19) на $\|Y(t)\|$.

Получим оценку на норму производной $\|Y'(t)\|$. Для этого скалярно умножим обе части равенства (15) на $Y'(t)$. Тогда

$$\|Y'\|^2=\frac{(k-mr_0)(B^{-1}Y,Y')}{(B^{-1}Y,Y)}-(I,Y').$$

После интегрирования обеих частей полученного равенства от 0 до $t$ имеем

$$\int_0^t\|Y'(s)\|^2\,ds=(k-mr_0)\int_0^t\frac{(B^{-1}Y,Y')}{(B^{-1}Y,Y)}ds- \tag{20}$$
$$-(I,Y(t))+(I,Y(0)).$$

Заметим, что $(B^{-1}Y,Y')=\frac{1d}{2dt}(B^{-1}Y,Y)$. Поэтому, делая замену переменных $u=(B^{-1}Y,Y)$, $u(0)=(B^{-1}Y(0),Y(0))$, $u(t)=(B^{-1}Y(t),Y(t))$, получим

$$\int_0^t\frac{(B^{-1}Y,Y')}{(B^{-1}Y,Y)}ds=\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(t)}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}[\ln(B^{-1}Y(\mathrm{t}),Y(t))-$$
$$-\ln(B^{-1}Y(0),Y(0))].$$

Здесь мы воспользовались предположением о положительной определенности матрицы $B$ и, следовательно, $B^{-1}$. Таким образом, из (20) следует оценка

$$\int_0^t\|Y'(s)\|^2\,ds\le\frac{1}{2}(k-mr_0)\left|\ln\left(\|B^{-1}\|\|Y(t)\|^2\right)\right|+$$
$$+\left|\ln\left(\|B^{-1}\|\|Y(0)\|^2\right)\right|+\sqrt{n}\left(\|Y(t)\|+\|Y(0)\|\right)$$
$$(\forall t>0).$$

Тогда в силу (19) заключаем что $\int_0^\infty\|Y'(s)\|^2\,ds<\infty$. Поэтому найдется по-следовательность $t_k\to+\infty$, для которой $\|Y'(t_k)\|\to 0$ при $t_k\to+\infty$.

Кроме того, производная подынтегральной функции $f(t):=\|Y'(t)\|^2$ ограничена в наших условиях при любом $t>0$. Действительно, $f'(t)=(Y',Y')'=2(Y'',Y')$. Поэтому $|f'(t)|\le 2\|Y''\|\|Y'\|$, а нормы $\|Y'\|$ и $\|Y''\|$ ограничены в соответствии с уравнением (15). При этом оценка на $\|Y''\|$ получается после дифференцировать по $t$ обеих частей уравнения (15).

Рассмотрим интеграл $\int_0^\infty f(t)f'(t)dt$. В исследуемой ситуации он сходится (см., напр., [15] с. 567). Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^\infty f(t)f'(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(f^2(t)\right)'dt=$$
$$=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-\lim_{T\to+\infty}f^2(T)\right).$$

Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty}f^2(t)$. Причем он равен нулю, т. к. это справедливо для подпоследовательности $t_k$. Поэтому $\|Y'(t)\|^2\to 0$ при $t\to+\infty$.

Далее, в силу оценки (19) на $\|Y(t)\|$ множество $\{Y(t)\}_{t=0}^{\infty}$ компактно. Следовательно, оно содержит сходящуюся последовательность $Y(t_k)$. Пусть $W=\lim\limits_{t_k\to\infty}Y(t_k)$. Переходя в обеих частях равенства (15) к пределу при $t_k\to+\infty$ и используя равенство $\lim\limits_{t_k\to\infty}Y'(t_k)=0$, получим, что $W$ – равновесный вектор. Тогда на основании единственности решения уравнения (8) заключаем, что $W = Y_*$, где $Y_*$ определяется формулой (11).

Аналогично, любая предельная точка множества $\{Y(t)\}_{t=0}^{\infty}$ является точкой равновесия и поэтому совпадает с $Y_*$. В силу установленной выше леммы 2 заключаем, что существует предел $Y(t)$ при $t \to +\infty$, совпадающий с равновесным вектором $Y_*$. Тогда любое положительное решение $X(t)$ уравнения (14) при $t \to +\infty$ стремится к равновесному вектору $X_*$. Что и требовалось доказать.

*Замечание 2.* Согласно лемме 1 и теореме 1, в случае выполнения соотношения $k - (m-n)r_0 \le 0$ для обеспечения устойчивости рынка ценных бумаг требуется дополнительное внешнее регулирование.

Рассмотрим случай переменной матрицы ковариации $B(t)$ в модели М-Т, когда матрица $B(t)$ стабилизируется к некоторой постоянной матрице $B_\infty$ при $t \to +\infty$. Имеет место

**Теорема 4.** *Пусть матрица ковариации $B(t)$ в уравнении (14) зависит от времени симметрична и положительно определена при $\forall t > 0$, причем для наименьших собственных значений $\lambda_{\min}(t)$ матриц $B(t)$ выполнено соотношение $\inf\limits_{t>0} \lambda_{\min}(t) := \underline{\lambda} > 0$. Пусть матрица $B(t)$ ограничена по $t$, т.е. $\sup\limits_{t>0}\|B(t)\| \le d$ для некоторой постоянной $d > 0$ и стабилизируется при $t \to +\infty$ к некоторой постоянной симметричной положительно определенной матрице $B_\infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\|B(t) - B_\infty\| = 0$. Пусть, кроме того, матрица $B(t)$ дифференцируема по $t$ и несобственный интеграл $\int_0^\infty \|\dot{B}(t)\| dt$ сходится. Тогда каждое положительное решение $X(t)$ уравнения (14), стремится при $t \to +\infty$ к равновесному вектору вида (12), динамической системы с постоянной матрицей ковариации $B_\infty$.*

*Замечание 3.* Из предположения $\lim\limits_{t\to+\infty}\|B(t) - B_\infty\| = 0$ вытекает симметричность и положительная определенность матрицы $B_\infty$, так что $\underline{\lambda}$ равно минимальному собственному значению матрицы $B_\infty$.

Условие $\int_0^\infty \|\dot{B}(t)\| dt < \infty$ выполнено, в частности, если справедлива экспоненциальная оценка $\|\dot{B}(t)\| \le Ce^{-\tilde{a}t}$ $(\forall t \ge 0)$ для некоторых положительных чисел $C$ и $\gamma$.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы допускают развитие на случай, когда задача М-Т (1)–(3) может иметь множество решений. В этом случае функция обобщенного спроса становится многозначной, а вместо уравнений возникают включения. Тогда динамические задачи описываются дифференциальными включениями. По этому поводу можно обратиться к [6, 7], где рассмотрен общий случай конкурентного рынка.

Кроме того, возможно развитие результатов настоящей работы в следующем направлении. Основная теорема 2 утверждает, что при некотором соотношении между параметрами идеального финансового рынка состояние равновесия, предложенной динамической модели, единственно и глобально асимптотически устойчиво.

Если эти соотношения не выполнены, то при разумных предположениях, динамическая модель (14) обладает предельным множеством (аттрактором).

В соответствии с общей теорией динамических систем это предельное множество (как правило) содержит периодические и почти-периодические режимы. Их и следует изучать. Близкие вопросы рассматривались, например, в работах [5, 7, 16, 17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М. : Наука, 1984. – 296 с.

2. *Markowitz H.M.* Portfolio Selection// Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, №1. – Pp. 77–91.

3. *Tobin J.* The Theory of Portfolio Selection// Theory of Interest Rates. – London : MacMillan, 1965. – Pp. 3–51.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967 – 472 с.

5. *Хацкевич В.Л.* Периодические решения дифференциальных включений с монотон-ными операторами // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 725–727.

6. *Хацкевич В.Л.* Об устойчивости модели конкурентного рыночного равновесия // Экономика и математические методы. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 103–107.

7. *Хацкевич В.Л.* Об асимптотике траекторий динамической модели конкурентного рынка // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 239–244.

8. *Merton Robert C.* Continuous – Time Finance. Oxford, U.K., 1990.

9. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы / Пер. с англ. М. : МЦНМО, 2008. – 496 с.

10. *Хацкевич В.Л., Хацкевич М.В.* О вариационном подходе к моделям портфельного инвестирования – Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж : Изд-во ВГУ. – 2011. – №1(13). – С. 170–176.

11. *Бабешко Л.О.* Математическое моделирование финансовой деятельности. – М. : КНОРУС, 2009. – 224 с.

12. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.

13. *Малыхин В.И.* Финансовая математика – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247 с.

14. *Самуэльсон П.* Основания экономического анализа / Пер. с англ. СПб. : Экономическая школа, 2002. – 604 с.

15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – М. : Физ-мат. лит., 1962. – 807 с.

16. *Cont R., Bouchaud J.P.* Macroeconomic Dynamics // 2000. – p.170–196.

17. *Каменский М.И., Кутищев И.Н., Рачинский Е.В.* Периодические колебания в одной модели рынка // Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии, 2012. – № 1. – С. 115–122.

**Хацкевич Владимир Львович** – зав. кафедрой математики и информатики Института заочного экономического образования Воронежского государственного университета, д.т.н., профессор. E-mail: vlkhats@mail.ru

**Khatskevich Vladimir L** – head of the Department of mathematics and infor-matics of the Institute of distance economic education Voronezh state University, doctor of technical Sciences, Professor. E-mail: vlkhats@mail.ru