УДК 519.872.1

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ В УСЛОВИЯХ ВОЗМУЩЕНИЙ, КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

**Л. Б. Афанасьевский*, А. Н. Горин*, М. А. Чурсин****

** Военно-учебный научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» ВУНЦ ВВС «ВВА»,*
*** Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета*

**Поступила в редакцию 14.04.2014 г.**

**Аннотация.** Рассмотрено применение различных элементов информационных технологий к идентификации модели динамики объекта при съеме информации в дискретные моменты времени и действии на объект возмущений, коррелированных во времени. Возмущения представляются как выходной сигнал фильтра, на входе которого действует белый шум с гауссовским распределением. В математическом плане задача сведена к максимизации функции правдоподобия, выполняемой с помощью метода сопряженных направлений. Программная реализация подхода выполнена в Delphi 7.
**Ключевые слова:** модель динамики объекта, функция правдоподобия, методсопряженных направлений, случайные возмущения.
**Annotation.** In this article application of different elements of information technologies to the dynamic of object model identification in case of information taken at discrete moments of time and time-correlated impact on the object of disturbance is looked upon. The disturbance is considered as an out coming filter signal at the input of which there is white noise with Gaussian distribution. From the mathematic point of view the aim is to reach likelihood function maximization with the help of conjugate directions method. The program realization of the approach is represented in Delphi 7.
**Keywords:** dynamic of object model, likelihood function, conjugate directions method, random disturbance.

В прикладной теории управления первоочередной задачей, которую необходимо решать на практике, является идентификация характеристик системы, без знания которых невозможно выполнить синтез управляющих устройств (алгоритмов).

Необходимость в идентификации по входной и выходной информации не ограничивается только задачами управления и системотехники, а возникает почти во всех областях научной и практической деятельности, таких, как техника, физика, химия, биология, экономика, теория информации, обработка данных и т.д. В общем случае результаты теории оценивания могут быть использованы в любой области, в которой осуществляется динамическое моделирование по входной и выходной информации. Эти результаты распространяются также на методы идентификации с прогнозом, которые основаны на выходной информации.

Идентификация характеристик системы во многих случаях представляет собой достаточно серьезную задачу вычислительного характера, требующую для своего решения применения различных аспектов информационных технологий, к которым, прежде всего, следует отнести применение объектно-ориентированного программирования с использованием технологий визуального программирования.

На практике достаточно часто системы управления строятся на базе цифровых вычислительных устройств, в связи с чем возникает задача построения моделей объектов динамики объектов, учитывающих эту особенность. Наличие модели позволяет выполнить как структурный, так и параметрический синтезы управляющего устройства.

При решении задачи предполагается, что известны последовательности наблюдений входного и выходного сигналов объекта, полученные в дискретные моменты времени, например, с помощью ЭВМ. Случайные возмущения, действующие на объект, являются ненаблюдаемыми. При построении модели возмущения считаются приведенными к выходу объекта.

Математическая модель, описывающая динамические свойства объекта управления и коррелированные во времени случайные возмущения, представляется в виде [1]

$$A\left(z^{-1}\right)y\left(t\right)= \\ = z^{-r}B\left(z^{-1}\right)u\left(t\right)+C\left(z^{-1}\right)e\left(t\right), \qquad (1)$$

где $A\left(z^{-1}\right)=1+\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}$;

$B\left(z^{-1}\right)=\sum_{i=0}^{m}b_i z^{-i}$;

$C(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{k}c_i z^{-i}$; $m,k\le n$;

$z$ – оператор сдвига; $z^{\pm n}x\left(t\right)=x\left(t\pm n\right)$;

$t$ – относительное время, равное целому числу периодов съема данных с объекта $(t=\ldots,-1,0,+1,\ldots)$;

$r$ – относительное запаздывание (минимальное значение $r$ равно единице);

$e\left(t\right)$ – независимая гауссовская последовательность с параметрами распределения $N\left(0,\sigma^2\right)$;

$\left\{u\left(t\right):t\in T\right\}$; $\left\{y\left(t\right):t\in T\right\}$; $T=\left\{1,2,\ldots,N\right\}$ – центрированные последовательности наблюдений входного и выходного сигналов.

Структурные параметры модели $n$, $m$, $k$, $r$ считаются заданными, их определение является самостоятельной задачей, рассматриваемой ниже.

Определению подлежат коэффициенты модели $a_i$, $i=1,2,\ldots,n$; $b_i$, $i=0,1,\ldots,m$; $c_i$, $i=1,2,\ldots,k$.

Для решения задачи использован метод максимального правдоподобия, суть которого заключается в том, что из всех возможных значений оценок параметров $a_i$, $i=1,2,\ldots,n$; $b_i$, $i=0,1,\ldots,m$; $c_i$, $i=1,2,\ldots,k$ выбираются те, которые обеспечивают максимум функции правдоподобия

$$\max_{\beta}\ p(e(t)\mid\beta)=l(\beta)= \\ =\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^N}e^{-\sum_{t=1}^{N}e^2(t)/2\sigma^2},$$

где $\beta=\left(a_1\ldots a_n b_0 b_1\ldots b_m c_1\ldots c_k\right)^T$ – искомый вектор параметров модели и возмущений.

Максимизация функции правдоподобия может быть заменена более простой максимизацией логарифмической функции правдоподобия $L\left(\beta\right)=\ln\left(l\left(\beta\right)\right)$, которая в данном случае принимает вид

$$L\left(\beta\right)=0,5N\left[\left(\ln N-\ln\ 2\pi-1\right)-\ln\sum_{t=1}^{N}e^2\left(t\right)\right]. \qquad (2)$$

Из выражения (2) следует, что для максимизации $L\left(\beta\right)$ необходимо минимизировать функцию

$$V\left(\beta\right)=0,5\sum_{t=1}^{N}e^2\left(t\right). \qquad (3)$$

Значения $e\left(t\right)$ в соответствии с (1) вычисляются по рекуррентной формуле

$$e\left(t\right)=y\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i y\left(t-i\right)- \\ -\sum_{i=0}^{m}\beta_{n+1+i}u\left(t-r-i\right)-\sum_{i=1}^{k}\beta_{n+m+1+i}e\left(t-i\right). \qquad (4)$$

Необходимым условием минимума функции (3) является равенство нулю ее производных по искомым параметрам модели, которые можно получить при дифференцировании выражений (4) и (3) по соответствующим параметрам.

Минимизация целевой функции $V\left(\beta\right)$ возможна только численными методами, поскольку она нелинейно зависит от параметров $c_i$.

Для минимизации этой функции удобно применить численный алгоритм Дэвидона-Флетчера-Пауэлла (DFP) [2], дающий быструю сходимость благодаря сопряженным направлениям поиска, использующий только первые производные целевой функции, имеющий защиту от численной неустойчивости и не требующий обращения матрицы.

Вектор градиента $V_\beta^i$ целевой функции $V(\beta)$ в точке $\beta^i$ вычисляется рекуррентно по формулам

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_j} = \sum_{t=1}^{N} e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \beta_j},\ j = 1, 2, \ldots, n+m+k+1, \quad (5)$$

$$C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial a_j} = z^{-j} y(t),\ j = 1, \ldots, n, \quad (6)$$

$$C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial b_j} = -z^{-(r+j)} u(t),\ j = 0, \ldots, m, \quad (7)$$

$$C(z^{-1}) \frac{\partial e(t)}{\partial c_j} = -z^{-j} e(t),\ j = 1, \ldots, k. \quad (8)$$

При использовании метода DFP $i$-ое направление поиска $S^i$ для последовательной процедуры минимизации определяется уравнением

$$S^i = -\eta^i \cdot V_\beta^i,$$

где $V_\beta^i$ – вектор градиента целевой функции $V(\beta)$ в точке $\beta^i$, который определяется на $(i-1)$-ой итерации по формулам (5)–(8);

$\eta^i$ – положительно определенная матрица, вычисляемая по уравнению

$$\eta^{i+1} = \eta^i + \frac{\Delta\beta^i \cdot (\Delta\beta^i)^T}{(\Delta\beta^i)^T \cdot \Delta V^i} - \frac{\eta^i \cdot \Delta V^i \cdot (\eta^i \cdot \Delta V^i)^T}{(\Delta V^i)^T \cdot \eta^i \cdot \Delta V^i},$$

где $\Delta\beta^i = \beta^{i+1} - \beta^i$, $\Delta V^i = V_\beta^{i+1} - V_\beta^i$.

$T$ – знак транспонирования.

В качестве $\eta^0$ используется единичная матрица $\eta^0 = I$.

Следующая точка поиска определяется по формуле

$$\beta^{i+1} = \beta^i + \lambda_m^i \cdot S^i,$$

где $\lambda_m^i$ минимизирует $V(\beta^i + \lambda^i \cdot S^i)$ по $\lambda$ ($\lambda_m^i > 0$). Для минимизации $V(\beta^i + \lambda^i \cdot S^i)$ по $\lambda^i$ используется метод «золотого» сечения [2].

В точке оптимума после выполнения $L > n+m+k$ итераций матрица $\eta^L$ сходится к обратной матрице вторых частных производных целевой функции по параметрам, т. е. $\eta^L \cong V_{\beta\beta}^{-1}$. Это обстоятельство позволяет без дополнительных вычислений получить в точке оптимума приближенную ковариационную матрицу оценок параметров модели $R \cong \sigma^2 \eta^{опт}$, которая и характеризует точностные свойства получаемых оценок.

Здесь $\sigma^2$ – оценка дисперсии последовательности $e(t)$, также получаемая в результате работы программы:

$$\sigma^2 = 2 \cdot V(\beta^{опт}) / \mathrm{N}.$$

Начальные условия для последовательностей $y(t)$, $u(t)$, $e(t)$ при вычислениях по формуле (4) можно принять нулевыми. Для устранения влияния начальных условий суммирование в (3) следует начинать, например с $t = 15-20$.

Таким образом, задача параметрической идентификации модели (1) представляет собой задачу нелинейного программирования без ограничений, которая решается методом сопряженных направлений.

Начальные оценки параметров $\beta^0$ вычисляются в предположении, что в модели (1) возмущение является «белым шумом», т. е. $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда модель (1) становится линейной по параметрам, если в качестве вычисляемой переменной рассматривается $e(t)$. В этом случае минимизация целевой функции (3) выполняется методом наименьших квадратов, который в вычислительном плане сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Q \cdot \beta^0 = F,$$

где $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}$, $Q_1$, $Q_3$ – симметричные матрицы:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} R_y(0) & R_y(1) & \ldots & R_y(n-1) \\ & R_y(0) & \ldots & R_y(n-2) \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & R_y(0) \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(m) \\ & R_u(0) & \dots & R_u(m-1) \\ & & \dots & \dots \\ & & & R_u(0) \end{pmatrix};$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -R_{uy}(r-1) & -R_{uy}(r) & \dots & -R_{uy}(r+m-1) \\ -R_{uy}(r-2) & -R_{uy}(r-1) & \dots & -R_{uy}(r+m-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R_{uy}(r-n) & -R_{uy}(r-n+1) & \dots & -R_{uy}(r+m-n) \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов имеет вид

$$F = \left(-R_y(1) - R_y(2) \ldots - R_y(n)\right.$$

$$\left. R_{uy}(r) R_{uy}(r+1) \ldots R_{uy}(r+m)\right)^T.$$

В приведенных выражениях $R_u(\cdot)$, $R_y(\cdot)$, $R_{uy}(\cdot)$ являются авто- и взаимно корреляционными функциями центрированных входного и выходного сигналов, вычисляемыми по формулам

$$R_u(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} u(t) u(t+j),$$

$$R_y(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} y(t) y(t+j),$$

$$R_{uy}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} u(t) y(t+j),$$

$$R_{yu}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} y(t) u(t+j), \ j = 0,1,\ldots$$

Центрированные значения входной и выходной последовательностей определяются выражениями

$$u(t) = u^*(t) - m_u, \ y(t) = y^*(t) - m_y,$$

$$m_u = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} u^*(t), \quad m_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y^*(t),$$

где $u^*(t)$, $y^*(t)$ – последовательности наблюдений входного и выходного сигналов объекта.

Определение структурных параметров модели $n$, $m$, $k$, $r$ требует многошаговой процедуры.

Величина запаздывания $r$ должна быть, по крайней мере, на единицу меньше значения, соответствующего максимуму взаимно корреляционной функции (рис. 1).

По графикам автокорреляционных функций можно сделать выбор начальных значений структурных параметров модели $n$, $m$, $k$. Если максимальное значение корреляционного сдвига автокорреляционной функции выходного сигнала, при котором ее значение превышает 0,1 значения при нулевом сдвиге,

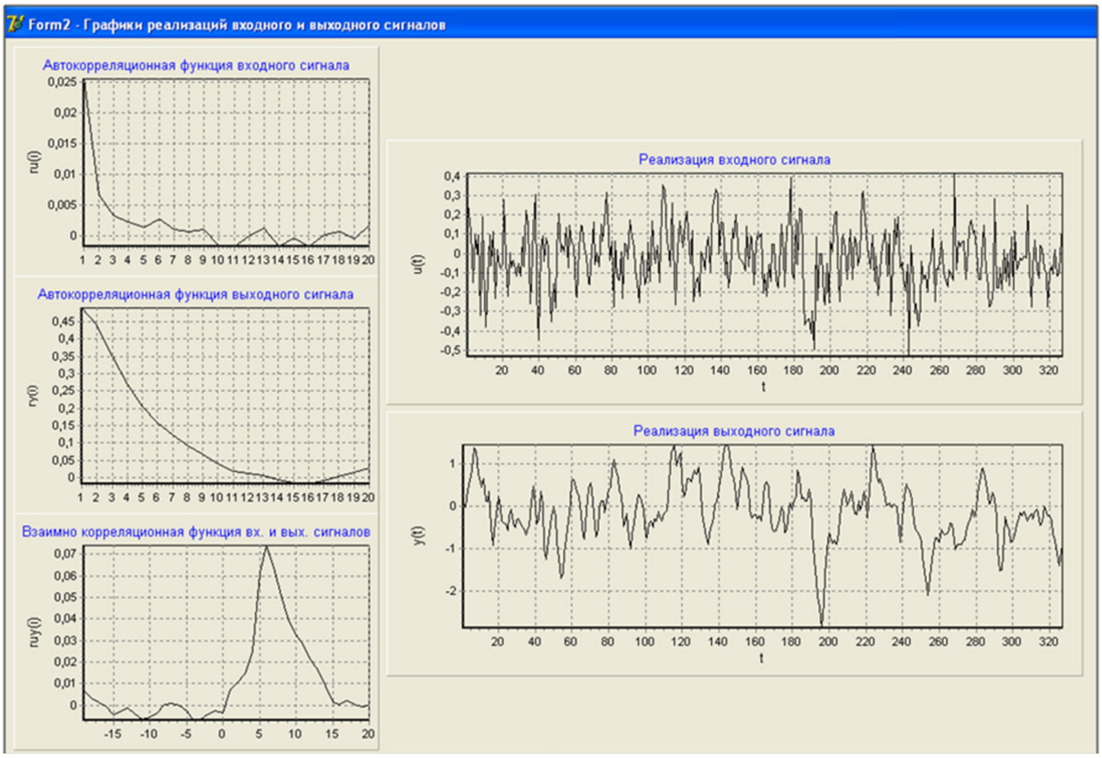


*Рис. 1. Графики реализаций входного и выходного сигналов и корреляционных функций*

существенно больше соответствующего значения для входного сигнала, то можно выбрать значения $n$, $m$, $k$ равными 2. При соизмеримости этих значений порядки полиномов следует выбрать равными 1.

Адекватность модели проверяется по критерию хи-квадрат. Величиной, распределенной по закону хи-квадрат, является сумма значений автокорреляционной функции для ошибок модели, определяемых с учетом исходных реализаций сигналов объекта и модели, полученной в результате идентификации.

Определение структурных параметров модели, т. е. определение порядков полиномов $A(z-1)$, $B(z-1)$, $C(z-1)$, может быть выполнено путем сравнения величины целевой функции, полученной для нескольких вариантов расчета (табл. 1). При этом дополнительно должны анализироваться соотношения между абсолютными значениями параметров модели и их погрешностями. При соизмеримости значений параметра и его погрешности должен быть уменьшен порядок соответствующего полинома.

Таблица 1

*Значения целевой функции для разных вариантов расчета*

| Номер варианта | $n$ | $m$ | $k$ | $r$ | $V(\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 6 | 9,977 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 5 | 3,197 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 5 | 3,208 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 4 | 3,523 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4,799 |
| 6 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7,770 |

Из табл. 1 следует, что должна быть выбрана структура модели, соответствующая варианту 2. Но для этого варианта значения параметра a2 и его погрешности соизмеримы: $a_2 = 0,0572 \pm 0,0592$, поэтому можно уменьшить порядок полинома $A(z^{-1})$. Для варианта 3 значение целевой функции увеличилось незначительно, но погрешности определения параметров в этом случае существенно меньше значений самих параметров.

Заметим, что здесь для всех вариантов расчета, кроме первого и шестого, модель является адекватной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. – М. : Мир, 1973.
2. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М. : Мир, 1975.



**Афанасьевский Леонид Борисович** – к.т.н., доцент. ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (г. Воронеж).
Тел.: 8-906-675-78-87. E-mail: afleonid@yandex.ru

**Горин Александр Николаевич** – к.т.н., ст. преподаватель. ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (г. Воронеж).

**Чурсин Михаил Александрович** – к.т.н., доцент. Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета.

**Afanasievsky Leonid Borisovitch** – Candidate of technical sciences, Senior Lecturer. VUNTS Air Force 'Air Force Academy prof. N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin'. Tel: 8-906-675-78-87.

**Gorin Alexandre Nikolaevich** – Candidate of technical sciences, Senior Lecturer. VUNTS Air Force 'Air Force Academy prof. N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin'.

**Chursin Mikhail Aleksandrovitch** – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Voronezh branch of Russian State trade and economic University.