УДК 519. 3:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 30.07.2013 г.

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы приближенного решения одной задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения третьего порядка со смешанными условиями.

Ключевые слова: Псевдопараболическое уравнение, смешанные условия, оптимальное управление, обобщенная разрешимость, приближенное решение, минимизация функционала.

Annotation. In this article we consider the approximation solving of optimal control problem for nonlinear partial pseudoparabolic differential equations of the third order with mixed value conditions.

Keywords: Pseudoparabolic equations, mixed value conditions, optimal control, generalized solvability, functional minimization, approximate solution.

ВВЕДЕНИЕ

Многие вопросы фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвогрунтах приводят к изучению начальных, смешанных и обратных задач для псевдопараболического уравнения третьего порядка [1, 2].

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации как при проектировании и совершенствовании систем управления [3, 4]. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используются широкий спектр разных методов [5, 6].

© Юлдашев Т. К., 2014

Пусть управляемый процесс описывается квазилинейным псевдопараболическим уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x)-\nu\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}= \\ = P(t,x)+f\big(t,x,\,u(t,x)\big) \quad (1)$$

со смешанными условиями

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi(x), \quad (2)$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=0, \quad (3)$$

где $f(t,x,u)\in C(D\times R)$, $P(t,x)$ – управляющая функция, $0<\nu$ – малый параметр, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=0$, $\varphi_j(x)\in C^3(D_l)$, $j=1,2$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

При $\nu=0$ уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}= \\ = P(t,x)+f\big(t,x,\,u(t,x)\big), \quad (4)$$

которое с нулевым управлением изучено многими авторами при исследовании задачи о теплопроводности. Для решения этой задачи часто использовали смешанные условия типа (2) и (3). Можно обосновать, что возможно строения аппроксимации решения смешанной задачи (1)–(3) решением уравнения (4) при смешанных условиях (2) и (3).

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Здесь, как и в работах [7–9], при фиксированном $P(t,x)$ используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x,\nu)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i(t,\nu)\cdot b_i(x),$$

где $b_i(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\dfrac{i\pi}{l},\ i=1,2,\ \ldots$.

Задача. Найти такую управляющую функцию

$$P^*(t,x)\in\Omega\equiv\left\{P^*:\left|P^*(t,x)\right|\le M^*,(t,x)\in D\right\}$$

и соответствующее ей состояние $u^*(t,x,\nu)$ смешанной задачи (1)–(3), что доставляют минимум функционалу

$$J[P]=\int_0^T g\left(t,x,u(t,x,\nu),P(t,x)\right)dt. \qquad (5)$$

В множестве

$$\left\{a(t)=(a_i(t))\,\middle|\,a_i(t)\in C\left(D_T\right),i=1,2,3,\ \ldots\right\}$$

с помощью нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}\left|a_i(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

вводится банахово пространство $B_2(T)$. Наряду с $B_2(T)$ рассматривается и банахово пространство $B_2^N(T)$ с нормой

$$\left\|a^N(t)\right\|_{B_2^N(T)}=\left[\sum_{i=1}^{N}\max_{t\in D_T}\left|a_i^N(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для произвольной функции $\tau(x),\ x\in D_l$ в пространстве $L_2(D_l)$ вводим норму следующим образом

$$\|\tau(x)\|_{L_2(D_l)}=\left\{\int_0^l|\tau(y)|^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Для числовой последовательности φ_i в пространстве ℓ_2 вводим следующую норму

$$\|\varphi\|_{\ell_2}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi_i\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Также рассмотрим следующую норму

$$\left\|\varphi^N\right\|_{\ell_2^N}=\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\varphi_i^N\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Обозначим через $W_2^1(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ имеют производные первого порядка по t, принадлежащие $L_2(D)$, и обращаются в нуль при $t\ge T-\delta$ ($0<\delta-$ зависит от $\Phi(t,x)$). Для функций из $W_2^1(D)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to T}\int_0^l\Phi(t,x)dx=0.$$

Предполагается также, что $P(t,x)$ допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям $b_i(x)$. Функционал (5) преобразуем, т.е. функцию $g\left(t,y,u(t,y,\nu),P(t,y)\right)$ разложим в ряд Фурье:

$$J[P_i]=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^l g\begin{pmatrix} t,y,\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j(t,\nu)\cdot b_j(y), \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}p_j(t)\cdot b_j(y)\end{pmatrix}\times \qquad (6)$$
$$\times b_i(y)\,dy\,dt$$

Определение. Если функция $u(t,x)\in C\left(D\right)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t,y)\left[\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}-\nu\frac{\partial^3\Phi(t,y)}{\partial t\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[P(t,y)+f\left(t,y,u(t,y)\right)\right]\Phi(t,y)\right\}dy\,dt=$$
$$=\int_0^l\varphi\left[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\right]_{t=0}dy$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_2^1\left(D\right)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

1. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3) К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Теорема 1. Решение смешанной задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u\ (t,x,\nu)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\varphi_i\exp\{-\omega_{1i}(\nu)t\}+ \\ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\int_0^l\exp\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\}\times \\ \times\left[p_i(s)+f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(s,\nu)\cdot b_j\,(y)\right)\times\right. \\ \left.\times\ b_i(y)dy\right]ds\Big\}\cdot b_i\ (x), \tag{7}$$

где $a_i\,(t,\nu)$ определяется как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_i\ (t,\nu)=\varphi_i\exp\{-\omega_{1i}(\nu)t\}+ \\ +\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^t\int_0^l\exp\{-\omega_{1i}(\nu)(t-s)\}\times \\ \times\left[p_i(s)+f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(s,\nu)\cdot b_j\,(y)\right)\times\right. \\ \left.\times b_i(y)dy\right]ds, \tag{8}$$

$$\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\ \ \omega_{1i}(\nu)=\frac{\lambda_i^2}{\omega_{0i}(\nu)},$$

$$\varphi_i=\int_0^l\varphi(y)b_i\ (y)dy.$$

Доказательство. Из определения обобщенного решения смешанной задачи (1)–(3) имеем

$$\int_0^t\int_0^l\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)\cdot b_i(y)\times \\ \times\left[\frac{\partial\Phi(s,y)}{\partial s}-\nu\frac{\partial^3\Phi\,(s,y)}{\partial s\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi(s,y)}{\partial y^2}\right]- \\ -\left[P(s,x)+f\left(s,\ y,\ u(s,y)\right)\right]\Phi(s,y)\Big\}dyds= \\ =\int_0^l\varphi(y)\left[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\right]_{t=0}dy. \tag{9}$$

Так как $\Phi=\Phi_m(t,x)=h(t)\,b_m(x)\in W_2^1\left(D\right)$, где $h(t)\in C^1\left(D_T\right)$, то из (9) следует, что

$$\int_0^t\int_0^l\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)\cdot b_i(y)\times \\ \times\left[h'(s)b_m(y)+\lambda_m^2\nu h'(s)b_m(y)+\lambda_m^2\,h(s)b_m(y)\right]- \\ -\left[P(s,y)+f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(s)\cdot b_j\,(y)\right)\right]\times \\ \times h\,(s)\Big\}\,dyds=0.$$

Учет в последнем равенстве того, что функции $b_i(x)$ полны и ортонормированны в $L_2(D_l)$, дает

$$\int_0^t\Big\{a_i(s)\cdot\left(h'(s)+\lambda_i^2\nu h'(s)+\lambda_i^2h(s)\right)- \\ -\left[p_i\,(s)+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(s)\cdot b_j\,(y)\right)\times\right. \\ \left.\times b_i(y)dy\right]\cdot h(s)\Big\}\,ds=0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T h(t)\Big\{\left(1+\lambda_i^2\nu\right)a_i\,'(t)+\lambda_i^2\,a_i(t)- \\ -\left[p_i\,(t)+\int_0^l f\left(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(t)\cdot b_j\,(y)\right)\times\right. \\ \left.\times b_i(y)dy\right]\Big\}\,dt=0. \tag{10}$$

Так как $h(t)$ – любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_i(t)$ имеет обобщенную производную первого порядка по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Из (10) следует

$$a_i\,'(t)+\omega_{1i}(\nu)a_i(t)=\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\times \\ \times\left[p_i\,(t)+\int_0^l f\left(t,y,\sum_{j=1}^{\infty}a_j\,(t)\cdot b_j\,(y)\right)\cdot b_i(y)dy\right]. \tag{11}$$

Система (11) решается методом вариации произвольных постоянных и при этом используются начальное условие $a_i\,(0)=\varphi_i$. Тогда из (11) придем к ССНИУ (8). Подставляя (8) в ряд Фурье, получим (7).

2. ПРИБЛИЖЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим укороченную систему интегральных уравнений

$$u^N(t,x,\nu)=\sum_{i=1}^{N}\Big\{\varphi_i^N \exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)t\big\}+\frac{1}{\omega_{0i}^N(\nu)}\times$$
$$\times\int_0^t\left[p_i^N(s)+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^N(s,\nu)\cdot b_j^N(y)\right)\times\right.$$
$$\left.\times b_i^N(y)dy\right]\cdot\exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)(t-s)\big\}ds\Big\}\cdot b_i^N(x), \quad (12)$$

где $a_i^N(t,\nu)$ определяется как решение следующей конечной системы нелинейных интегральных уравнений (КСНИУ):

$$a_i^N(t,\nu)=\varphi_i^N \exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)t\big\}+\frac{1}{\omega_{0i}^N(\nu)}\times$$
$$\times\int_0^t\left[p_i^N(s)+\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^N(s,\nu)\cdot b_j^N(y)\right)\times\right.$$
$$\left.\times b_i^N(y)dy\right]\cdot\exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)(t-s)\big\}ds, \quad (13)$$
$$\omega_{0i}^N(\nu)=1+\lambda_i^{2N}\nu,\ \ \omega_{1i}^N(\nu)=\frac{\lambda_i^{2N}}{\omega_{0i}^N(\nu)},$$

а начальные данные φ_i^N подбираются из (2) так, что сумма

$$\varphi^N(x)=\sum_{i=1}^N\varphi_i^N b_i^N(x)$$

аппроксимирует при $N\to\infty$ функции $\varphi(x)\in L_2(D_l)$.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\displaystyle\int_0^T\left\|f\left(t,x,u^N\right)\right\|_{L_2(D_l)}dt\le\Delta<\infty$;

2. $f(t,x,u^N)\in Lip\left\{L(t,x)_{|u^N}\right\}$,

где $\displaystyle 0<\int_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds<\infty$;

3. $\|\varphi^N\|_{l_2^N}<\infty$.

Тогда при фиксированных значениях управления $P(t,x)$ укороченная система интегральных уравнений (12) имеет единственное решение в области D.

Доказательство. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$a_i^{N0}(t,\nu)=W_i^N(t,\nu)+$$
$$+\frac{1}{\omega_{0i}^N(\nu)}\int_0^t p_i^N(s)G_i(t,s,\nu)ds,$$
$$a_i^{Nk+1}(t,\nu)=W_i^N(t,\nu)+ \quad (14)$$
$$+\frac{1}{\omega_{0i}^N(\nu)}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{Nk}(s,\nu)\cdot b_j^N(y)\right)\times$$
$$\times b_i^N(y)\cdot G_i^N(t,s,\nu)dyds,$$
$$k=0,1,2,3,\dots,\ t\in D_T,$$

где $W_i^N(t,\nu)=\varphi_i^N\exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)t\big\}$,

$$G_i^N(t,s,\nu)=\exp\big\{-\omega_{1i}^N(\nu)(t-s)\big\}ds.$$

В силу условий теоремы, из (14) по индукции получаем следующие оценки

$$\left\|a^{N1}(t,\nu)-a^{N0}(t,\nu)\right\|_{B_2^N(T)}\le$$
$$\le\int_0^t\left\{\sum_{i=1}^N\left|\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N0}(s,\nu)\cdot b_j^N(y)\right)\cdot b_i^N(y)dy\right|^2\right\}^{\frac12}\times$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^N|\varphi_i|^2\right\}^{\frac12}ds\le M_1M_2\sqrt{l}\Delta, \quad (15)$$
$$\left\|a^{Nk+1}(t,\nu)-a^{Nk}(t,\nu)\right\|_{B_2^N(T)}\le$$
$$\le M_1^{k+1}M_2^{2k+1}l^{\frac{k+1}{2}}\Delta\frac{\left[\left|\int_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}ds\right|\right]^k}{k!}, \quad (16)$$

где

$$M_1=\left\|G^N(t,s,\nu)\right\|_{B_2^N(T)},\ M_2=\left\|b^N(x)\right\|_{B_2^N(l)}.$$

Существование решения КСНИУ (13) следует из справедливости оценок (15) и (16), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\left\{a^{Nk}(t,\nu)\right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t,\nu)\in B_2^N(T)$. Для доказательства единственности решения в пространстве $B_2^N(T)$ предположим, что КСНИУ (13) имеет два решения: $a^N(t,\nu)\in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t,\nu)\in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|a^N(t,\nu)-\vartheta^N(t,\nu)\right\|_{B_2^N(T)}\le$$
$$\le M_1M_2^2l^{\frac12}\int_0^t\|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\times \quad (17)$$
$$\times\left\|a^N(s,\nu)-\vartheta^N(s,\nu)\right\|_{B_2^N(t)}ds.$$

Применение к (17) неравенства Гронуолла-Беллмана дает $\left\| a^N(t,\nu) - \vartheta^N(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения КСНИУ (13) в пространстве $B_2^N(T)$.

Подставляя КСНИУ (13) в формулу $u^N(t,x,\nu) = \sum_{i=1}^N a_i^N(t,\nu) \cdot b_i^N(x)$, получаем (12). Если $a^N(t) \in B_2^N(T)$, то справедлива оценка

$$\left| u^N(t,x,\nu) \right| \le \sum_{i=1}^N \left| a_i^N(t,\nu) \right| \cdot \left| b_i^N(x) \right| \le$$

$$\le M_2 \left\| a^N(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} < \infty.$$

Кроме того, аналогично (16) и (17) справедлива оценка

$$\left\| a^N(t,\nu) - a^{Nk+1}(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} \le$$

$$\le \left\| a^{Nk+2}(t,\nu) - a^{Nk+1}(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+ \left\| a^N(t,\nu) - a^{Nk+2}(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \times$$

$$\times \left\| a^{Nk+1}(s,\nu) - a^{Nk}(s,\nu) \right\|_{B_2^N(t)} ds.$$

$$+ M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \times$$

$$\times \left\| a^N(s,\nu) - a^{Nk+1}(s,\nu) \right\|_{B_2^N(t)} ds \le$$

$$\le M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{\frac{k+1}{2}} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} \times$$

$$\times \left\| a^N(s,\nu) - a^{Nk+1}(s,\nu) \right\|_{B_2^N(t)} ds. \qquad (18)$$

Применяя к (18) неравенства Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\left\| a^N(t,\nu) - a^{Nk+1}(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)} \le$$

$$\le \frac{\delta_1}{k!} \left[\left| \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right| \right]^k \times$$

$$\times \exp\left\{ \delta_2 \int_0^t \left\| L(s,x) \right\|_{L_2(D_l)} ds \right\}, \qquad (19)$$

где $\delta_1 = M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{\frac{k+1}{2}} \Delta,\ \delta_2 = M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}}.$

3. ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ И СХОДИМОСТЬ ПО ФУНКЦИОНАЛУ

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: найти управляющую функцию $P^N(t,x)$, которая вместе с функцией (12) минимизирует функционал

$$J[P_i^N] = \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^N a_j^N(t,\nu) \cdot b_j^N(y), \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^N p_j^N(t) \cdot b_j^N(y) \right) \times b_i^N(y) dy dt. \qquad (20)$$

Пусть $P^*(t,x)$ – оптимальное решение поставленной нами задачи.

Рассмотрим следующие соотношения:

$$u^{Nk*}(t,x,\nu) = \sum_{i=1}^N \left\{ \varphi_i^N \exp\left\{ -\omega_{1i}^N(\nu) t \right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\omega_{0i}^N(\nu)} \int_0^t \left[p_i^{Nk*}(s) + \right.$$

$$\left. + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk*}(s,\nu) \cdot b_j^N(y) \right) b_i^N(y) dy \right] \times$$

$$\left. \times \exp\left\{ -\omega_{1i}^N(\nu)(t-s) \right\} ds \right\} \cdot b_i^N(x), \qquad (21)$$

$$J[P_i^{Nk*}] = \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk*}(t,\nu) \cdot b_j^N(y), \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^N p_j^{Nk*}(t) \cdot b_j^N(y) \right) \times b_i^N(y) dy dt. \qquad (22)$$

Тогда для этого оптимального управления справедлива оценка

$$\left| P^*(t,x) - P^{Nk*}(t,x) \right| \le q_{Nk}(t),$$

где

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ k \to \infty}} q_{Nk}(t) = 0. \qquad (23)$$

Теорема 3. Пусть:

1. Выполняются условия теоремы 2;

2.

$$g(t,x,u,\vartheta) \in C(D \times R^2) \cap Lip\left\{ L_1(t)_{|u};\ L_2(t)_{|\vartheta} \right\},$$

где $0 < \int_0^T L_i(t) dt < \infty,\quad i = 1,\ 2;$

3. $\| W(t,\nu) \|_{B_2(T)} < \infty$.

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} \left| J\left[P_i^* \right] - J\left[P_i^{Nk*} \right] \right| = 0. \qquad (24)$$

Доказательство. Оценим допускаемую погрешность по состоянию $u^*(t,x,\nu)$, то есть величину $\bar{V}_{Nk} = \left| u^*(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right|$. С этой целью для начала оценим разности:

$$u^*(t,x,\nu) - u^{N*}(t,x,\nu)$$

и

$$u^{N*}(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu).$$

Итак, рассмотрим следующее соотношение

$$\left| u^*(t,x,\nu) - u^{N*}(t,x,\nu) \right| \le V_N,$$

где

$$V_N = \int_0^l \left| \left(\varphi(y) - \sum_{i=1}^N \varphi_i^N b_i^N(y) \right) \times \right.$$

$$\left. + \left[\Phi(t,y) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(t,y) \right]_{t=0} \right| dy +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \left| \Phi(t,y) \left[P^*(t,y) - \sum_{i=1}^N \int_0^l P^{N*}(t,z) \cdot b_i^N(z)\, dz \right] \times \right.$$

$$\left. \times b_i^N(y) \right| dydt + \int_0^T \int_0^l \left| \Phi(t,y) \times \right.$$

$$\times \left[f\left(t, y, \sum_{j=1}^\infty a_j^*(t,\nu) \cdot b_j(y) \right) - \right.$$

$$- \sum_{i=1}^N \int_0^l f\left(t, z, \sum_{j=1}^N a_j^{N*}(t,\nu) \cdot b_j^N(y) \right) \times$$

$$\left. \times b_i^N(z) dz \right] b_i^N(y) \Big| dydt. \qquad (25)$$

Если $a^{N*}(t,\nu) \in B_2^N(T)$ является решением КСНИУ (13), то покажем, что $\lim\limits_{N\to\infty} V_N = 0$. Действительно, так как $a^{N*}(t,\nu) \in B_2^N(T)$, то из равенства

$$\lim_{N\to\infty} u^{N*}(t,x,\nu) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N a_i^{N*}(t,\nu) \cdot b_i^N(x) =$$

$$= u^*(t,x,\nu)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty} f\left(t, x, u^{N*}(t,x,\nu) \right) = f\left(t, x, u^*(t,x,\nu) \right) \qquad (26)$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Тогда первый интеграл в (25) стремится к нулю при $N \to \infty$. Сходимость последних двух разностей в (25) при $N \to \infty$ следует из (23) и (26). Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} V_N = 0. \qquad (27)$$

Также имеем

$$\left| u^{N*}(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^N \left| a_i^{N*}(t,\nu) - a_i^{Nk*}(t,\nu) \right| \cdot \left| b_i^N(x) \right| \le$$

$$\le M_2 \left\| a^{N*}(t,\nu) - a^{Nk*}(t,\nu) \right\|_{B_2^N(T)}.$$

Отсюда с учетом (19) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \left| u^{N*}(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right| = 0. \qquad (28)$$

Из (7) и (21) с учетом (27) и (28) следует, что

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} \bar{V}_{Nk} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} \left| u^*(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right| \le$$

$$\le \lim_{N\to\infty} \left| u^*(t,x,\nu) - u^{N*}(t,x,\nu) \right| +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \left| u^{N*}(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right| = 0. \qquad (29)$$

В силу условий теоремы, из (6) и (22) имеем

$$\left| J\left[P^* \right] - J\left[P^{Nk*} \right] \right| \le$$

$$\le \int_0^T \left[L_1(t) \left| u^*(t,x,\nu) - u^{Nk*}(t,x,\nu) \right| + \right.$$

$$\left. + L_2(t) \left| P^*(t,x) - P^{Nk*}(t,x) \right| \right] dt \le$$

$$\le \int_0^T L_1(t) \bar{V}_{Nk}(t) dt + \int_0^T L_2(t) q_{Nk}(t)\, dt. \qquad (30)$$

С учетом (23) и (29) переход к пределу в (30) при $N \to \infty$, $k \to \infty$ дает (24).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическое решение нелинейных задач оптимального управления очень сложно. На практике широко используются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В работе предлагается методика приближенного решения одной нелинейной задачи оптимального управления для псевдопараболического уравнения третьего порядка со смешанными условиями. При этом используются последовательность функций (21) и последовательность функционала (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27. – № 2. – С. 348–350.

2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.

3. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М. : Наука, 1982. – 432 с.

4. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М. : Наука, 1978. – 488 с.

5. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

6. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М. : Высшая школа, 2009. – 680 с.

7. *Юлдашев Т. К., Дыйканов Г. А.* О смешанной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным отклонением по времени // Вестник ВорГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 164–169.

8. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2011. – Т. 51. – № 9. – С. 1703–1711.

9. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Т. 52. – № 1. – С. 112–123.

Юлдашев Турсун Камалдинович – к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики, докторант. Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск. E-mail: tursunbay@rambler.ru. Тел.: 8-923-372-51-79

Yuldashev T. K. – Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Associate professor of Higher Mathematics Department Siberian State Aerospace University. E-mail: tursunbay@rambler.ru