УДК 621.391.2

ТЕХНОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БАЙЕСОВСКОГО РИСКА МОДЕЛИРОВАНИЕМ ПО МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО АЛГОРИТМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ НЕЙМАНА-ПИРСОНА

В. И. Лютин*, Е. Н. Десятирикова**

** Военно-учебный научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» ВУНЦ ВВС «ВВА»,*
*** Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 20.02.2014 г.

Аннотация. В работе предложена технология имитационного моделирования при определении Байесовского риска при неизвестных априорных вероятностях различаемых гипотез и заданной вероятности ошибки первого рода.
Ключевые слова: Теория различения гипотез, Байесовский риск, отношение правдоподобия, достаточная статистика, имитационное моделирование.
Annotation. The paper presents the technology of simulation for determining the Bayesian risk under unknown a priori probabilities of distinguishable hypotheses and given probability of error of the first kind.
Keywords: Theory of testing hypotheses, Bayesian risk, the likelihood ratio, sufficient statistics, simulation.

Всё возрастающие требования к повышению эффективности и качества управленческих решений в условиях возрастания информационных потоков приводят к необходимости всемерного применения автоматизированных информационных технологий в экономике с использованием вычислительной техники для оптимизации управленческих решений [1, 2].

Одной из задач экономики является оптимизация принятия управленческих решений, минимизирующих экономические потери. Решение принимает человек, и не всегда можно положиться на здравый смысл и интуицию при принятии управленческих решений в сложной экономической обстановке с многочисленными воздействующими факторами. Целесообразно найти оптимальное решение с максимальным исключением субъективных факторов. Для этого необходимо разработать алгоритм, с помощью которого автоматически определяется оптимальное решение на основе текущих наблюдений и результатов долговременных предыдущих наблюдений. Окончательное решение о действиях принимает человек, рассматривая решение автомата как рекомендательное.

Владение машинными методами расчёта экономических рисков становится одним из требований к специалистам информационных технологий в экономике. Продуктивным методом оценки рисков является применение вероятностно-статистических методов в силу массовости явлений, определяющих конъюнктуру рынков. Например, работа биржи ценных бумаг – массовое явление, так как много видов ценных бумаг, много предприятий, работающих с ценными бумагами, и много факторов, не всегда предсказуемых, влияющих на ценообразование. Следовательно, биржевые сделки относятся к массовым явлениям, поэтому для поиска автоматического алгоритма и оценки качества решений применяются вероятностно-статистические методы.

Целью данной работы является определение Байесовского риска при неизвестных априорных вероятностях и невозможности получения аналитического решения, а также, разработка программного продукта для контроля знаний обучающихся в вузах.

Задачи:

– исследование качества принятия решения по критерию Неймана-Пирсона;

– разработка методики имитационного моделирования при расчёте экономического риска;

– определение порога сравнения достаточной статистики для обеспечения требуемой вероятности ошибки первого рода (ложной тревоги);

– определение виртуальных значений априорных вероятностей гипотез;

– расчёт среднего Байесовского риска.

Каждодневные наблюдения в течение L дней (месяца) курса валюты, акций или других ценных бумаг – векторное наблюдение

$$\vec{Y} = \left[y_1, y_2, y_3, ..., y_L \right]^T . \quad (1)$$

Для принятия решения строятся предположения или гипотезы о поведении курса ценных бумаг и действиях:

H_1 – гипотеза о росте курса ценных бумаг, решение – продавать;

H_0 – альтернатива или гипотеза о падении курса ценных бумаг, решение – ничего не предпринимать или покупать.

Выбор той или иной гипотезы сопровождается потерями или платой за выбор гипотезы. При правильных решениях – это плата за ведение экономической разведки, содержание помещений и прочие необходимые траты на поддержание доходности предприятия. При правильных решениях всегда обеспечивается доход или отсутствие убытков. При неправильных решениях – это экономические потери предприятия. Величина платы устанавливается по результатам длительных наблюдений.

Средний Байесовский риск равен [3]

$$R = \sum_{m=0}^{1} P_m \sum_{n=0}^{1} P\left(H_n \middle| H_m \right) \cdot \Pi_{n,m}, \quad (2)$$

где $P_m, \quad m = 0, 1, \quad P_0 + P_1 = 1$ – априорные вероятности гипотез;

$P\left(H_n \middle| H_m \right), \quad m, n = 0, 1$ – вероятность принятия гипотезы H_n, если истинна гипотеза H_m, при этом $P\left(H_1 \middle| H_0 \right) = F$ – вероятность ошибки первого рода или вероятность ложной тревоги, $P\left(H_0 \middle| H_1 \right)$ – вероятность ошибки второго рода или вероятность пропуска сообщения; $\Pi_{n,m},\ m, n = 0,1$ – плата или потери при принятии гипотезы H_n, если истинна гипотеза H_m, записываемая как матрица потерь

$$\overline{\Pi} = \begin{vmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{vmatrix} . \quad (3)$$

Для расчёта Байесовского риска необходимо знать матрицу потерь, априорные вероятности и условные вероятности гипотез.

Пусть компоненты векторного наблюдения $\vec{Y}$ независимы и имеют нормальное распределение со средним m и среднеквадратическим отклонением σ

$$w(y_k) = \left(\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \right)^{-1} \cdot \exp\left\{ -\left(y_k - m \right)^2 \big/ \left(2 \cdot \sigma^2 \right) \right\} . \quad (4)$$

Для различаемых гипотез каждый компонент векторного наблюдения равен

$$y_k = \begin{cases} m_1 + \sigma_1 \cdot u_k : & H_1; \\ m_0 + \sigma_0 \cdot v_k : & H_0; \end{cases} \quad k = \overline{1, L} . \quad (5)$$

где $m_n, n = 0,1$ – среднее, $\sigma_n, n = 0,1$ – среднеквадратическое отклонение по гипотезе H_n, u_k и v_k – стандартные нормальные числа.

На рис. 1 показан пример реализации векторного наблюдения.

Рассмотрим общий случай неравенства дисперсий и неравенства средних значений наблюдений по обеим гипотезам $\sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$, $m_1 \neq m_0$.

При независимости компонентов условное распределение вектора наблюдения равно

$$w_j\left(\vec{Y} \middle| H_j \right) = \frac{1}{\left(\sigma_j \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \right)^L} \cdot \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{L} \frac{\left(y_k - m_j \right)^2}{2 \cdot \sigma_j^2} \right\} \quad (6)$$

$j = 1, 0.$

Критерием принятия решений является сравнение отношения правдоподобия Λ, равного отношению условных вероятностей вектора наблюдения для различаемых гипотез, с порогом h [3]

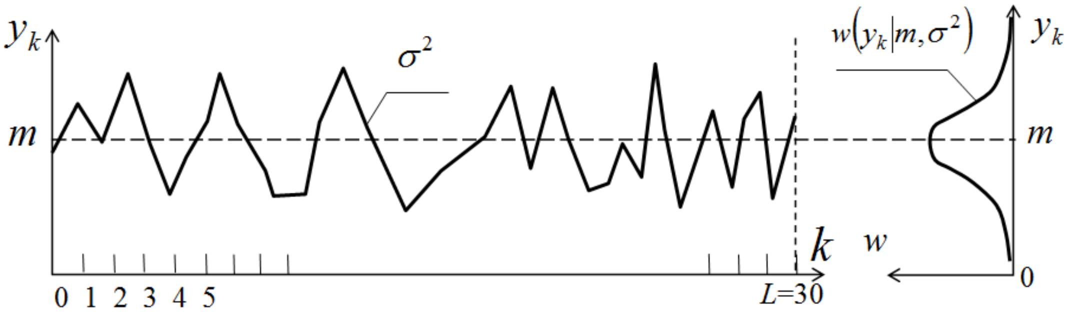

Рис. 1. Реализация векторного наблюдения

$$\Lambda \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h, \tag{7}$$

где $\Lambda = w_1\left(\vec{Y}\middle|H_1\right)\Big/w_0\left(\vec{Y}\middle|H_0\right)$,

$$h = P_0\cdot(\Pi_{10}-\Pi_{00})\big/\left(P_1\cdot(\Pi_{01}-\Pi_{11})\right).$$

После подстановки (6) в (7) и преобразований решающее правило представляется как сравнение достаточной статистики ξ с порогом Π

$$\xi \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \Pi. \tag{8}$$

Достаточная статистика равна

$$\xi = A\cdot\sum_{k=1}^{L} y_k^2 + B\cdot\sum_{k=1}^{L} y_k, \tag{9}$$

где $A = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)$, $B = \frac{m_1}{\sigma_1^2}-\frac{m_0}{\sigma_0^2}$ – коэффициенты.

Порог сравнения достаточной статистики равен

$$\Pi = \ln h - L\cdot\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{m_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{m_0^2}{\sigma_0^2}\right). \tag{10}$$

Идея решения данной проблемы состоит в нахождении порога сравнения достаточной статистики Π для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги F, определении априорных вероятностей $P_0 = P(H_0)$ и $P_1 = P(H_1)$, и, в конечном итоге, в расчете среднего Байесовского риска.

Суть проблемы состоит в том, что при $\sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$ и $m_1 \neq m_0$ рассчитать Байесовский риск аналитически невозможно, так как плотность распределения вероятностей значений достаточной статистики не подчиняется ни нормальному распределению, ни χ^2-распределению.

Так как закон распределения вероятностей достаточной статистики неизвестен, то для оценки качества решений применяется моделирование алгоритма по методу Монте-Карло.

При моделировании определяются вероятности принятия решений об одной из наперёд известных гипотез, путём подсчёта числа правильных решений об этой гипотезе и определения вероятности правильного решения как относительной частоты правильных решений.

Критерий Неймана-Пирсона применяется в том случае, когда неизвестны априорные вероятности гипотез $P_0 = P(H_0)$ и $P_1 = P(H_1)$. Порог сравнения отношения правдоподобия определяется из соотношения

$$P\left(\Lambda > h\middle|H_0\right) = P\left(\xi > \Pi\middle|H_0\right). \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что для определения порога Π необходимо провести моделирование наблюдения по гипотезе H_0 и сформировать массив значений достаточной статистики $\left\{\xi_{0k}, k=\overline{1,N}\right\}$. Объём выборки N или число испытаний равно [4]

$$N \geq \left[erf^{-1}(P_\partial)\right]^2\Big/\left(2\cdot\Delta_\partial^2\right), \tag{12}$$

где P_∂ – доверительная вероятность точности полученного результата моделирования; Δ_∂ – доверительный интервал, в который с доверительной вероятностью P_∂ попадёт значение результата моделирования; $erf^{-1}(\bullet)$ – обратная функция ошибок.

Полученный массив значений достаточной статистики упорядочивается в порядке возрастания

$$S = \mathrm{sort}\left\{\xi_{0k},\, k = \overline{1,N}\right\}. \qquad (13)$$

После выполнения операции сортировки значения достаточной статистики расположены в порядке возрастания, поэтому порог Π равен элементу упорядоченного массива достаточной статистики с номером K

$$\Pi = S_K, \qquad (14)$$

где $K = \mathrm{int}\left[N \cdot (1 - F)\right]$.

При найденном пороге проводится моделирование по гипотезе H_1, и определяются $P\left(H_1 \middle| H_1\right)$ – вероятность принятия гипотезы H_1 или вероятность правильного решения о гипотезе H_1, если она истинна, и $P\left(H_0 \middle| H_1\right)$ – вероятность принятия гипотезы H_0, если истинна гипотеза H_1 – вероятность ошибки второго рода или вероятность пропуска сообщения.

Из выражения (9) находим

$$h = \exp\left\{\Pi + L \cdot \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{m_0^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}. \quad (15)$$

Из выражения для порога сравнения отношения правдоподобия находим

$$P_1 = \left(1 + h \cdot \left(\Pi_{01} - \Pi_{11}\right) / \left(\Pi_{10} - \Pi_{00}\right)\right)^{-1},$$

$$P_0 = 1 - P_1. \qquad (16)$$

Найденные значения априорных вероятностей являются виртуальными, так как реально они не заданы, это такие значения, при которых обеспечивается заданная вероятность ложной тревоги.

После определения вероятностей вычисляется средний Байесовский риск.

На рис. 2 и 3 приведены структура алгоритма расчёта массива достаточной статистики по гипотезе H_0 и определения порога сравнения достаточной статистики и структура алгоритма моделирования.

На рис. 4 приведены результаты моделирования с применением визуальной среды Mathcad в виде точечного поля N значений достаточной статистики и в виде графика упорядоченных значений достаточной статистики, представляющего собой по существу интегральное распределение достаточной статистики.

На рис. 5 приведена структура диалоговой обучающе-контролирующей программы. Программа выдаёт индивидуальное задание каждому студенту, определяемому по дате, номеру группы и номеру студента в списке группы. После получения задания студент должен составить программу моделирования с применением визуальной среды Mathcad, провести моделирование и результаты моделирования ввести в ответ на вопросы диалоговой обучающе-контролирующей программы. Программа допускает многократное исправление неправильных ответов и в этом смысле является обучающей. Для стимулирования работы студенту сообщается о наборе числа баллов, достаточных для оценок «удовлетворительно» и «хорошо». По завершении работы выставляется итоговая оценка.

Таким образом, в результате исследований разработана методика определения Байесовского риска при проверке статистиче-

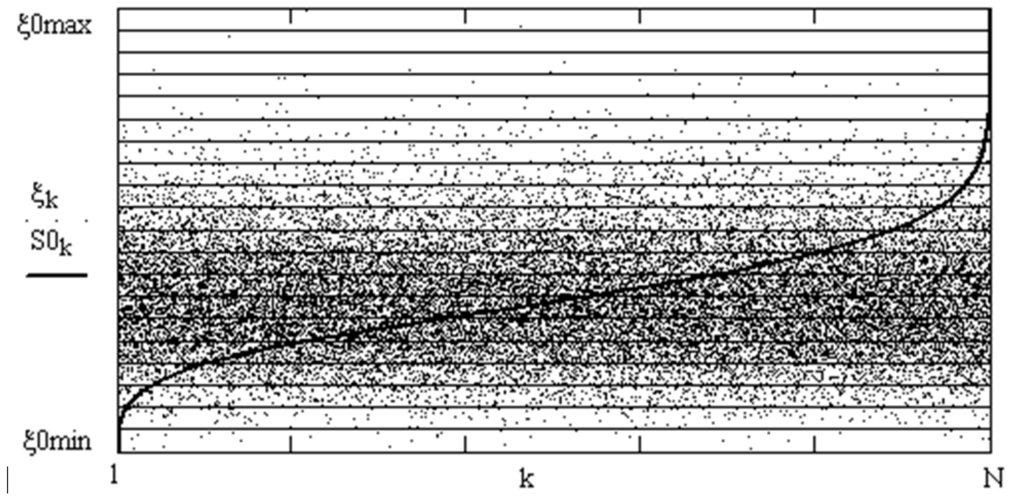

Рис. 2. Результаты моделирования

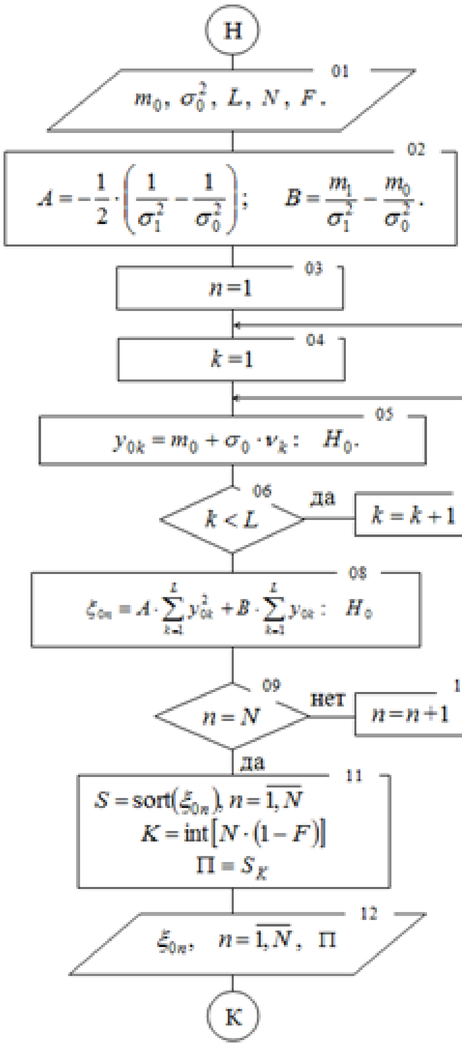

Рис. 3. Структура алгоритма расчёта массива достаточной статистики по гипотезе H_0

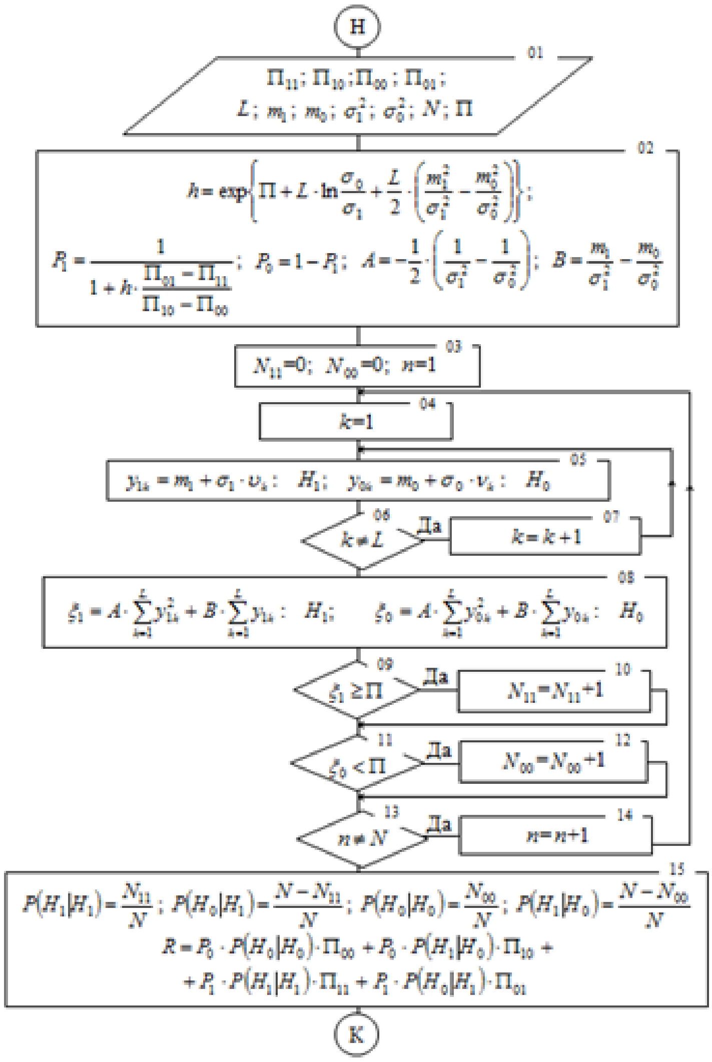

Рис. 4. Структура алгоритма моделирования

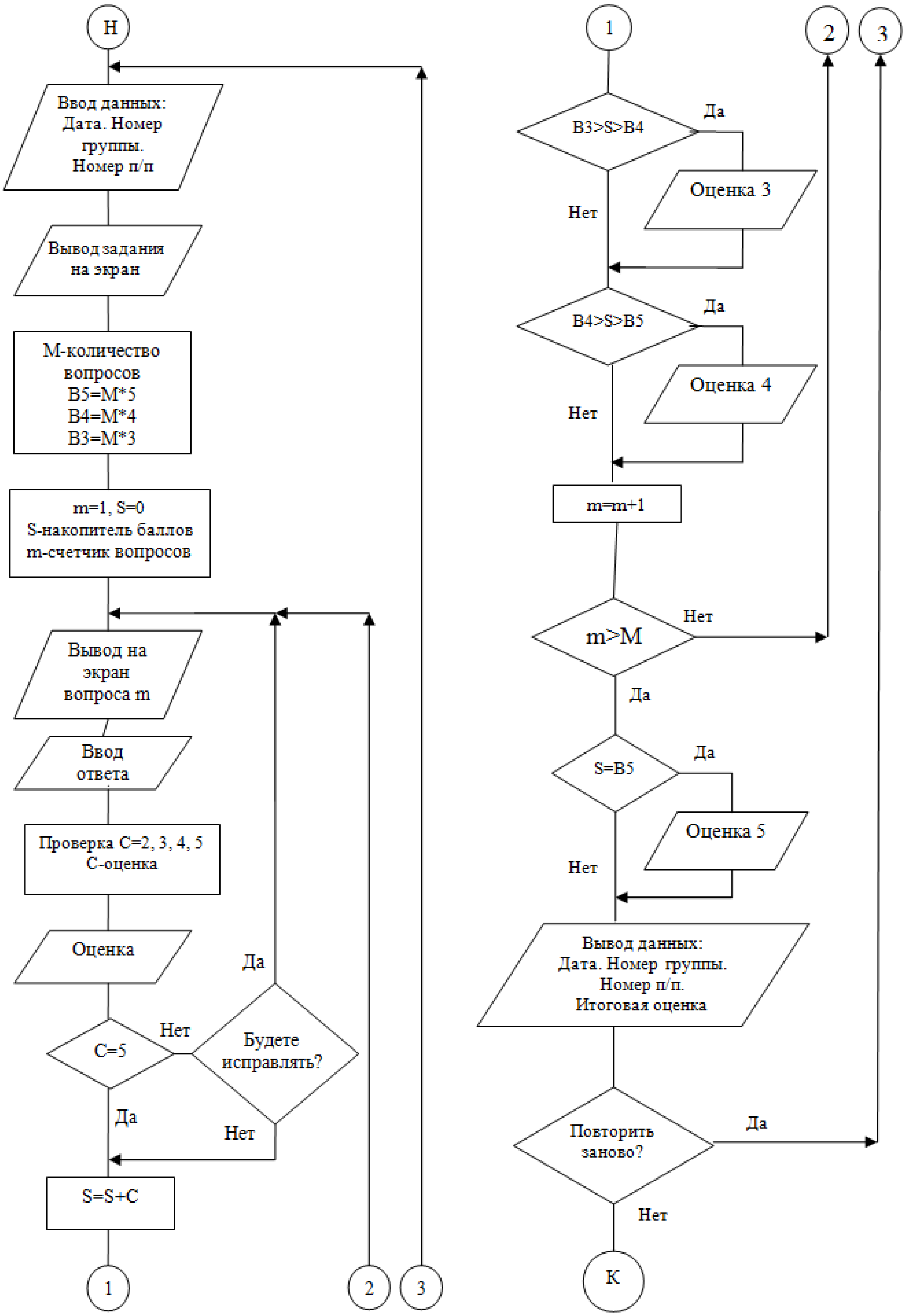

Рис. 5. Схема работы с диалоговой программой

ских гипотез в задаче оценки эффективности управленческих решений по критерию Неймана-Пирсона. В работе получен научный результат, позволивший определить виртуальные априорные вероятности, соответствующие заданной вероятности ошибки первого рода (ложной тревоги), и установлено правило определения порога сравнения достаточной статистики по результатам моделирования.

На основе проведённых исследований разработана обучающе-контролирующая программа, составленная таким образом, что обучающиеся студенты должны показать владение методикой машинного эксперимента и умение использовать визуальные средства программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Десятирикова Е.Н., Белоусов В.Е.* Модель ценности информационного ресурса системы управления экономической системой // Вестник Воронежского государственного университета. Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2013. – № 2. – С. 23–27.
2. *Новикова Н.М.* Байесовский механизм принятия решений человеком-оператором // Вестник Воронежского государственного университета. Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2006. – № 2. – С. 119–124.
3. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. – М. : «Советское радио», Т. 1. – 1972, 742 с.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей [Текст] : учеб. для вузов / Е.С. Вентцель, 2005. – 527 с.

Лютин Владимир Иванович – к.т.н., старший научный сотрудник Военно-учебного научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина».
Тел. (4732) 36-10-03, E-mail: ljutin2000@mail.ru

Десятирикова Елена Николаевна – д.э.н., профессор кафедры Информационных систем Воронежского государственного университета.
Тел.: (4732)208-724, E-mail: science2000@ya.ru

Ljutin Vladimir I. – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher of the Military Educational and Scientific Center of the Air Force «The Air Force Academy named after Professor Zhukovsky and Yuri Gagarin» .
Tel. (4732) 36-10-03, E-mail: ljutin2000@mail.ru

Desyatirikova Elena N. – Doctor of Economy Sciences, Professor of the Depth.of the Information Systems, Voronezh State University.
Tel. (4732)208-724, E-mail: science2000@ya.ru