УДК 519.816

О ФОРМАЛИЗАЦИИ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДИКАТОВ

В. А. Оболенцев, Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.07.2013 г.

Аннотация. В статье рассматривается подход к решению задач нечеткой многокритериальной оптимизации, в рамках которого известные критерии оптимальности формально представляются предикатами, что позволяет сформировать функцию принадлежности нечеткого множества оптимальных решений.
Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, критерий оптимальности, предикат, нечеткие логические операции.
Annotation. This paper considers an approach to solving fuzzy multi-criteria optimization problem. Well-known optimality criteria are formally represented as predicates. It allows forming membership function of fuzzy set of optimality solution.
Keywords: multi-objective optimization, optimality criterion, predicate, fuzzy logic operations.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших проблем моделирования сложных систем является оценка стратегий с точки зрения различных критериев оптимальности. В том случае, когда число решений достаточно велико, сравнение их критериальных оценок и выбор подходящего решения становится крайне трудной задачей, поэтому в таких ситуациях важную роль играют методы поддержки принятия решений, основанные на многокритериальной оптимизации. В последнее время интенсивно развиваются направления, учитывающие особенности и качество исходной информации (нечеткое, возможностное, стохастическое, интервальное программирование). Нечеткие модели оптимизационных задач отличаются разнообразием подходов к их построению. Целью статьи является разработка подхода к решению многокритериальных задач с нечеткими целевыми функциями и/или нечетким допустимым множеством решений, особенностью которого является формализация критериев оптимальности в виде предиката, что позволяет сформировать нечеткое множество оптимальных решений. Тогда в качестве оптимального решения выбирается то, на котором достигается максимум функции принадлежности. Для принципа Парето данный подход рассматривался в [1], в данной статье он обобщается для других принципов оптимальности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОСНОВАНИЕ ПОДХОДА

Задача многокритериальной оптимизации формулируется следующим образом: пусть заданы n критериев $f_1,...,f_n$, таких, что $\forall i\left(f_i : X \to R\right)$. Необходимо определить решение $x^* \in C$, где $C \subseteq X$, которое оптимизирует заданные критерии в некотором смысле. В дальнейшем под оптимизацией будем понимать максимизацию критериев. Подмножество C определяется ограничениями конкретной задачи на множество решений, при этом $x \in C$ – допустимое решение, C – множество допустимых решений.

Формально задача может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} f_i\left(x\right) \to \max \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \\ x \in C \end{cases} \qquad (1)$$

Если функции $f_i\left(x\right)$ являются нечеткими на множестве X, а множество C четкое, то задача (1) называется задачей оптимизации с нечеткими критериями. Задачу с нечеткими критериями и нечетким множеством C будем называть нечеткой задачей многокритериальной оптимизации.

Прежде чем перейти к решению задачи (1) введем некоторые дополнительные понятия.

Под *отношением доминирования* будем понимать антирефлексивное и асимметричное бинарное отношение $R \subseteq X^2$, заданное на множестве X, которое интерпретируется как «предпочтение», «превосходство» и т.п.

Пусть $x, y \in X$. Будем говорить, что решение x *доминирует решение* y, если $(x, y) \in R$, или, что то же самое, xRy.

Решение x называется *оптимальным по отношению доминирования* R, если в X не существует решения y, которое доминировало бы x.

Определим предикат $S_R(x)$ = *«Допустимое решение $x \in C$ принадлежит множеству оптимальных по отношению доминирования R решений»*, смысл которого заключается в следующем: $x \in C$ и не найдется такого y, что y принадлежит C и выполняется yRx.

Формально это высказывание можно переписать в следующем виде:

$$S_R(x) \leftrightarrow \left(x \in C \wedge \wedge \overline{\exists} y\left(y \in C \wedge yRx\right)\right). \tag{2}$$

Заменим отрицание квантора существования на квантор всеобщности и, определяя импликацию в виде $x \to y = \overline{x} \vee y$, получим:

$$S_R(x) \leftrightarrow \left(x \in C \wedge \wedge \forall y\left(y \in C \to \neg\left(yRx\right)\right)\right). \tag{3}$$

Заметим, что при различных значениях x данный предикат превращается в истинное или ложное высказывание. Для обобщения на нечеткий случай для всех элементарных предикатов введем функцию истинности $t \in [0,1]$, которая определяет степень истинности соответствующего высказывания при конкретных значениях предикатных переменных. В нашем случае элементарными предикатами являются « $x \in C$ » и « yRx » с функциями истинности $t[x \in C] \in [0,1]$, $t[yRx] \in [0,1]$ соответственно. В формулу (3) также входят квантор всеобщности и логические операции $\wedge$ и $\to$, поэтому возникает вопрос об их формальном представлении. Обозначим нечеткие логические связки через F_θ, где $\theta \in \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$. В настоящее время существуют различные подходы к представлению нечетких логических связок $\neg, \wedge, \vee$, которые либо обобщают специальным образом соответствующие булевы операции, либо являются оригинальными и не имеют аналогов в обычной булевой логике. Для нечеткого представления кванторов $\forall$ и $\exists$ используется тот факт, что квантор $\forall$ обобщает конъюнкцию, а $\exists$ – дизъюнкцию для бесконечного числа предикатных переменных. Таким образом, выражение (3) примет вид:

$$t\left(S_R(x)\right) = F_\wedge\left(t\left[x \in C\right], F_{\forall y}\left(F_\to\left(t\left[y \in C\right], F_\neg\left(t\left[yRx\right]\right)\right)\right)\right) \tag{4}$$

и позволяет для каждого значения x вычислить степень истинности предиката $S_R(x)$, которую можно интерпретировать как степень принадлежности данного решения x к множеству оптимальных решений.

При переходе к нечеткому варианту рассматриваемой задачи функция истинности предиката заменяется функцией принадлежности соотвествующего нечеткого множества, поэтому если множество допустимых решений нечеткое, то функции истинности, например, $t[x \in C]$ соответствует функция принадлежности $\mu_C(x)$, нечеткое отношение доминирования R задается функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$. Функцию принадлежности нечеткого множества оптимальных решений обозначим через $\mu_{S_R}(x)$. В этом случае (4) примет вид

$$\mu_{S_R}(x) = F_\wedge\left(\mu_C(x), F_{\forall y} \times \times\left(F_\to\left(\mu_C(y), F_\neg\left(\mu_R(y, x)\right)\right)\right)\right). \tag{5}$$

Данная формула определяет функцию принадлежности нечеткого множества оптимальных решений при условии, что допустимое множество C и отношение доминирования R являются нечеткими.

Решение x^* назовем четким решением задачи (5), если $\mu_{S_R}(x^*) = \max\limits_{x \in X} \mu_{S_R}(x)$.

Если C – конечное обычное (четкое) множество, а R – нечеткое отношение, то для допустимых решений $x, y \in C$ $\mu_C(x) = 1$, $\mu_C(y) = 1$, и функция принадлежности множества оптимальных решений примет вид

$$\mu_{S_R}(x) = \min_{\{y: y \neq x\}} \left\{F_\neg\left(\mu_R(y, x)\right)\right\}. \tag{6}$$

Представление нечетких логических связок, входящих в формулы (4) и (5), позволяет конкретизировать функцию принадлежности $\mu_{S_R}(x)$. Выберем следующие представления: $\wedge = \min$, $\forall = \inf$, $\neg x = 1 - x$, под импликацией $x \to y$ будем понимать бинарную операцию $I(x, y)$, которая удовлетворяет определению импликации []. Тогда формула (4) примет вид

$$\mu_{S_R}(x)=\min\Big(t\big[x\in C\big],\ \inf_y I\big(t\big[y\in C\big],1-t[yRx]\big)\Big). \tag{7}$$

Данную формулу можно использовать для нахождения нечеткого решения задач многокритериальной оптимизации, как с нечеткими критериями, так и с нечетким допустимым множеством решений.

По формулам (5) и (7) для каждого решения $x\in X$ определяется степень его принадлежности к оптимальному решению, т.е. каждому x ставится в соответствие степень «удовлетворения всех критериев». Разумный подход к выбору «четкого» решения – выбрать x^* с максимальным значением функции принадлежности. Однако, если это решение нереализуемо или требует значительных ресурсов, то можно выбрать решение, близкое к x^*, но в большей степени подходящее к реальной ситуации. Другие подходы к выбору решения задача (1) заключаются в использовании подходящего метода дефазификации.

Алгоритм построения множества оптимальных по данному отношению доминирования R решений может быть сформулирован следующим образом:

S1. Формализация задачи в виде $(f_1,\dots,f_n;C)$.

S2. Начало оптимизации по x:

S3. Для конкретного x выполнить:

S3.1. Сформировать нечеткое подмножество для всех y с функцией принадлежности

$$\mu_x(y)=\min\Big(t\big[x\in C\big],\ I\big(t\big[y\in C\big],1-t\big[yRx\big]\big)\Big);$$

S3.2. Определить все такие альтернативы y', что $\mu_x(y')=1$ и исключить их из дальнейшего рассмотрения, положив $\mu_{S_R}(y')=0$.

S3.3. Если найдется такая альтернатива y'', что $\mu_x(y'')=0$, то исключить x из дальнейшего рассмотрения, положив $\mu_{S_R}(x)=0$.

S3.4. Присвоить $\mu_{S_R}(x')=\min\limits_y \mu_x(y)$.

S5. Анализ нечеткого решения значения $\mu_{S_R}(x')$.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КРИТЕРИВ ОПТИМАЛЬНОСТИ

При решении многокритериальных задач на множестве X несколько множеств имеют ключевое значение при выборе наилучшего решения. К ним, естественно относится множество допустимых решений C (оптимальное решение должно быть допустимым), множество эффективных решений с точки зрения выбранного принципа оптимальности (именно этот принцип лежит в основе отношения доминирования) и множество выбора $Sel(X)$, которое строится с учетом дополнительной информации, полученной от ЛПР или эксперта. Оптимальное решение задачи (1) обязательно выбирается из множества $Sel(X)$ (в частном случае оно совпадает с оптимальным множеством). Наиболее распространенным принципом оптимальности является принцип Парето. Рассмотрим проблему представления различных вариантов отношений доминирования, которые будут соответственно задавать различные принципы оптимальности [2].

2.1. СИЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Согласно данному принципу, оптимальной считается та точка, в которой каждая из целевых функций достигает своих максимальных значений. Заметим, что такая точка может не существовать (причем эта ситуация скорее всего является типичной), поэтому для такой постановки задачи особенно целесообразно построить нечеткое множество решений.

Рассмотрим предикат $S(x)$ = *«Функции $f_1,\dots,f_n$ достигают максимальных значений в точке $x\in C$ »*. Его смысл сводится к следующему: $x\in C$ и для любого y такого, что если y принадлежит C, то не найдется такого $i\in\overrightarrow{1,n}$, что $f_i(y)>f_i(x)$. Иначе формально

$$S(x)\leftrightarrow\Big(x\in C\wedge\forall y\big(y\in C\to \to\neg\big(\exists i\big(f_i(y)>f_i(x)\big)\big)\big)\Big) \tag{8}$$

В данном случае отношение доминирования R задается следующим выражением:

$$xR_{Str}y=\exists i\big(f_i(x)>f_i(y)\big).$$

Предикат (8) можно переписать в виде

$$S(x)\leftrightarrow\Big(x\in C\wedge\forall y\big(y\in C\to \to\forall i\big(f_i(y)\le f_i(x)\big)\big)\Big). \tag{9}$$

Учитывая определения нечетких логических операций и рассуждения по поводу выбора подходящего функционального представления, которые были приведены выше, получим, что задача нечеткой многокритериальной оптимизации (1), может быть записана в виде

$$\mu_{Str}\left(x\right)=\min\left(t\left[x\in C\right],\right.$$
$$\left.\inf_y I\left(t\left[y\in C\right],\min_i\left(t\left[f_i\left(y\right)\le f_i\left(x\right)\right]\right)\right)\right). \quad (10)$$

Различные представления импликации $I\left(x,y\right)$ позволяют конкретизировать формулу (10). Некоторые примеры представлены ниже:

а) на основе импликации Мизумото

$$\mu_{Str}\left(x\right)=$$
$$=\min\left(t\left[x\in C\right],\inf_y\left(1-t\left[y\in C\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+t\left[y\in C\right]\cdot\min_i\left(t\left[f_i\left(y\right)\le f_i\left(x\right)\right]\right)\right)\right);$$

б) на основе импликации Лукашевича

$$\mu_{Str}(x)=\min(t[x\in C],\inf_y(1-t[y\in C]-$$
$$-\min_i(t[f_i(y)\le f_i(x)])+$$
$$+2\cdot t[y\in C]\cdot\min_i(t[f_i(y)\le f_i(x)])));$$

г) на основе импликации $I_{QM}(x,y)=$ $=\max\left(1-x(1-xy)\right)$

$$\mu_{Str}\left(x\right)=$$
$$=\min\left(t\left[x\in C\right],\inf_y\left(1-t\left[y\in C\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(1-t\left[y\in C\right]\cdot\min_i\left(t\left[f_i\left(y\right)\le f_i\left(x\right)\right]\right)\right)\right).$$

для всех $i=\overrightarrow{1,n}$ и найдется хотя бы один $i=\overrightarrow{1,n}$, такой что $f_i\left(y\right)>f_i\left(x\right)$.

Предикат

$$S(x)=\begin{pmatrix}\text{решение } x \text{ является}\\ \text{Парето - оптимальным}\end{pmatrix}$$

формально представляется следующим образом

$$S\left(x\right)\leftrightarrow x\in C\wedge$$
$$\wedge\forall y\left(y\in C\to\neg\left(\left(\forall i\left(f_i\left(x\right)\le f_i\left(y\right)\right)\right)\wedge\right.\right. \quad (11)$$
$$\left.\left.\wedge\left(\exists i\left(f_i\left(x\right)<f_i\left(y\right)\right)\right)\right)\right).$$

В данном случае отношение доминирования R определяется свойством Парето-оптимальности и задается выражением:

$$xR_Py=\left(\left(\forall i\left(f_i\left(x\right)\ge f_i\left(y\right)\right)\right)\wedge\right.$$
$$\left.\wedge\left(\exists i\left(f_i\left(x\right)>f_i\left(y\right)\right)\right)\right). \quad (12)$$

Нечеткое бинарное отношение доминирование примет вид

$$y\tilde{R}_Px=F_\wedge\left(F_{\forall i}\left(t\left[f_i\left(y\right)\ge f_i\left(x\right)\right]\right),\right.$$
$$\left.F_{\exists i}\left(t\left[f_i\left(y\right)>f_i\left(x\right)\right]\right)\right). \quad (13)$$

Множество оптимальных по Парето решений обозначим $P\left(X\right)$.

Перепишем предикат (11) в виде

$$\mu_P\left(x\right)=F_\wedge\left(\begin{matrix}t\left[x\in C\right],\\ F_{\forall y}\left(F_\to\left(t[y\in C],F_\neg\left(F_\wedge\begin{pmatrix}F_{\forall i}(t[f_i(y)\ge f_i(x)])\\ F_{\exists i}(t[f_i(y)>f_i(x)])\end{pmatrix}\right)\right)\right)\end{matrix}\right) \quad (14)$$

Все формулы $\mu_{Str}\left(x\right)$ можно использовать для нахождения нечеткого множества оптимальных решений задачи многокритериальной оптимизации с нечеткими критериями, при этом наилучшее четкое решение либо является точкой максимума данной функции принадлежности, либо получается в результате дефазификации.

2.2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО

Точка $x\in C$ называется *оптимальной по Парето (или эффективной)* в задаче (1), если $x\in C$ и для любого y такого, что если y принадлежит C, то не будет выполняться $f_i\left(y\right)\ge f_i\left(x\right)$

Таким образом, получена функция принадлежности нечеткого множества оптимальных по Парето решений для задачи (1). Ее применение в конкретной задаче связано с формализацией нечетких логических связок и определением процедуры сравнения нечетких множеств.

2.3. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО СЛЕЙТЕРУ

Точка $x\in X$ называется *слабо эффективным решением* задачи (1), или решением, *оптимальным по Слейтеру*, если $x\in C$ и для любого другого решения y, такого, что если y принадлежит C, то не выполняется $f_i\left(y\right)>f_i\left(x\right)$ для всех $i=\overline{1,n}$.

Формально предикат

$$S(x) = \begin{pmatrix} \text{решение } x \text{ является} \\ \text{оптимальным по Слейтеру} \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$S\left(x\right) \leftrightarrow x \in C \wedge \\ \wedge \forall y\left(y \in C \rightarrow \neg\left(\left(\forall i\left(f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right)\right)\right)\right). \quad (15)$$

В данном случае отношение доминирования R определяется выражением

$$xR_{Sl}y = \left(\forall i\left(f_i\left(x\right) > f_i\left(y\right)\right)\right). \quad (16)$$

Множество оптимальных по Слейтеру решений обозначим $Sl\left(x\right)$. / Очевидно, что $P\left(X\right) \subseteq Sl\left(x\right)$.

Нечеткое бинарное отношение доминирования по Слейтеру примет вид

$$y\tilde{R}_{Sl}x = F_{\forall i}\left(t\left[f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right]\right). \quad (17)$$

Функция принадлежности нечеткого множества оптимальных по Слейтеру решений имеет вид

$$\mu_{Sl}\left(x\right) = \\ = F_{\wedge}\begin{pmatrix} t\left[x \in C\right], \\ F_{\forall y}(F_{\rightarrow}(t[y \in C], F_{\neg}(F_{\forall i}(t[f_i(y) > f_i(x)])))) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

и ее дальнейшее использование для решения задачи (1) связано с конкретизацией функционального представления логических связок и определением процедуры сравнения нечетких множеств.

2.4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО СМЕЙЛУ

Точка $x \in X$ называется *строго эффективным решением* задачи (1), или решением, *оптимальным по Смейлу*, если $x \in C$ и для всех $y \neq x$ таких, что если y принадлежит C, то не выполняется $f_i\left(y\right) \geq f_i\left(x\right)$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Представим формально предикат

$$S(x) = \begin{pmatrix} \text{решение } x \text{ является} \\ \text{оптимальным по Смейлу} \end{pmatrix}$$

в виде

$$S\left(x\right) \leftrightarrow x \in C \wedge \\ \wedge \forall y\left(y \in C \rightarrow \neg\left(\left(y \neq x\right) \wedge \\ \wedge \forall i\left(f_i\left(y\right) \geq f_i\left(x\right)\right)\right)\right). \quad (19)$$

В данном случае отношение доминирования R задается выражением

$$xR_{Sm}y = \\ = \left(\left(x \neq y\right) \wedge \forall i\left(f_i\left(x\right) \geq f_i\left(y\right)\right)\right). \quad (20)$$

Нечеткое бинарное отношение доминирование примет вид

$$y\tilde{R}_{Sm}x = \\ = F_{\wedge}\left(y \neq x, F_{\forall i}\left(t\left[f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right]\right)\right). \quad (21)$$

Множество оптимальных по Смейлу решений обозначим $Sm\left(X\right)$. Заметим, что $Sm\left(X\right) \subseteq P\left(X\right) \subseteq Sl\left(X\right)$.

Предикат (19) с учетом интерпретации логических связок запишется в виде

$$\mu_{Sm}\left(x\right) = F_{\wedge}\left(\begin{matrix} t\left[x \in C\right], \\ F_{\forall y}\left(F_{\rightarrow}\left(t\left[y \in C\right], F_{\neg}\left(F_{\wedge}\left(\begin{matrix} y \neq x \\ F_{\forall i}\left(t\left[f_i\left(y\right) \geq f_i\left(x\right)\right]\right)\end{matrix}\right)\right)\right)\right)\end{matrix}\right) \quad (22)$$

и определяет нечеткое множество решений, оптимальных по Смейлу.

2.5. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Точка $x \in X$ называется *лексикографически эффективным решением* задачи (1), если $x \in C$ и для всех $y \neq x$ таких, что если y принадлежит C, то не выполняется условие: найдется индекс i такой, что $f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)$ и для всех $j < i$ $f_i\left(y\right) = f_i\left(x\right)$.

Предикат

$$S(x) = \begin{pmatrix} \text{решение } x \text{ является} \\ \text{лексикографически} \\ \text{оптимальным решением} \end{pmatrix}$$

формально представим в виде

$$S\left(x\right) \leftrightarrow x \in C \wedge \forall y(y \in C \rightarrow \\ \rightarrow \neg\left(\exists i\begin{pmatrix}\left(f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right) \wedge \\ \forall j\left(\left(j < i\right) \wedge \left(f_j\left(y\right) = f_j\left(x\right)\right)\right)\end{pmatrix}\right)\Bigg), \quad (23)$$

а отношение доминирования R определяется выражением

$$xR_{Lex}y = \exists i\left(\left(f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right) \wedge \right. \\ \left. \wedge \forall j\left(\left(j < i\right) \wedge \left(f_j\left(y\right) = f_j\left(x\right)\right)\right)\right). \quad (24)$$

Множество лексикографически оптимальных решений обозначим $Lex\left(X\right)$. Нечеткое бинарное отношение доминирование примет вид

$$y\tilde{R}_{Lex}x = \\ = F_{\exists i}\left(F_{\wedge}\begin{pmatrix} F_{\forall j}(F_{\wedge}(t[j < i], t[f_j\left(y\right) = f_j\left(x\right)])) \\ F_{\forall i}(t[(f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right))]) \end{pmatrix}\right). \quad (25)$$

С учетом интерпретации логических связок предикат (23) запишется в виде

$$\mu_{Lex}\left(x\right) = F_{\wedge}\left(\begin{matrix} t\left[x \in C\right], \\ F_{\forall y}\left(F_{\rightarrow}\left(t\left[y \in C\right], F_{\neg}\left(F_{\exists i}\left(F_{\wedge}\begin{pmatrix} F_{\forall j}\left(F_{\wedge}\left(t\left[j < i\right], t\left[f_j\left(y\right) = f_j\left(x\right)\right]\right)\right) \\ F_{\forall i}\left(t\left[\left(f_i\left(y\right) > f_i\left(x\right)\right)\right]\right) \end{pmatrix}\right)\right)\right)\right) \end{matrix}\right).$$

Проблема конкретного представления логических связок в данном случае также имеет место.

Алгоритм нахождения оптимального решения по отношению лексикографии формулируется следующим образом:

S1. Формализация задачи в виде $(f_1,...,f_n;C)$.

S2. Ранжирование критериев по неубыванию их значимости.

S3. Полагаем на первом шаге множество $C_0 = C$, $i = 1$. Начало оптимизации.

S3.1. Выбираем очередной критерий $f_i\left(x\right)$.

S3.2. Решаем задачу нечеткой однокритериальной оптимизации для функции $f_i\left(x\right)$ и множества C_{i-1}, получаем функцию принадлежности множества оптимальных решений $\mu_i\left(x\right)$, $x \in C$.

S4. Если больше не осталось нерассмотренных критериев, то переходим на шаг S6.

S5. Проверяем множество полученных оптимальных альтернатив на наличие там единственной оптимальной, если такая альтернатива единственна, то переходим на шаг S6, иначе, полагаем функцию принадлежности множества C_i равной получившемуся множеству $\mu_S\left(x'\right)$ и увеличиваем i. Переход на шаг S3.1.

S6. Анализ нечеткого решения $\mu_i\left(x\right)$.

Легко заметить, что в случае задачи с одной целевой функцией все вышеперечисленные критерии оптимальности, кроме оптимальности по Смэйлу, совпадают между собой.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проведения вычислительного эксперимента была разработана программа «FuzzyL-MOO» (Fuzzy Linear Multi-objective Optimization), основное назначение которой – формирование функции принадлежности множества оптимальных решений при заданном отношении доминирования, нечеткой импликации и методе сравнения нечетких чисел. Значение данной функции рассчитывается в узлах сетки, которая задается на множестве допустимых решений. В итоге получаем сеточную функцию $\mu_{S_R}\left(x_i\right)$, которую и будем считать решением задачи.

Одна из целей вычислительного эксперимента заключалась в выявлении зависимости решения линейной задачи от типа отношения доминирования и сравнении решения четкой задачи с ее нечетким аналогом для каждого из выбранных отношений доминирования. В рамках вычислительного эксперимента рассматривалась серия линейных задач на нечетком допустимом множестве C с нечеткими целевыми функциями. Функция принадлежности множества допустимых решений во всех примерах задавалась трапециевидным нечетким множеством $C = (l, a, b, r)$. В качестве коэффициентов целевых функций выступали трапециевидные нечеткие и треугольные нечеткие числа.

Исследовались рассмотренные выше принципы оптимальности. Для исследования влияния операции импликации на нечеткое множество оптимальных решений были выбраны 13 операций, в том числе, параметрических, относящихся к различным классам. В качестве методов сравнения нечетких чисел использовался метод, основанный на введение нечеткого бинарного отношения порядка на множестве нечетких чисел, и группа методов, основанных на различных принципах дефазификации.

Анализ результатов вычислительного эксперимента позволил сделать следующие выводы.

1. Результаты решения задачи многокритериальной оптимизации с нечеткими критериями могут довольно существенно отличаться от решений для ее четкого аналога, особенно в случае наличия значительной неопределенности – размытости множества допустимых значений и/или коэффициентов целевых функций.

2. Для множеств оптимальных значений, соответствующих различным отношениям доминирования, в случае нечеткой постановки задачи многокритериальной оптимизации наблюдается та же картина вложенности, как и в четком случае – $Sm(X) \subseteq P(X) \subseteq Sl(X)$.

3. Результаты решения задачи в зависимости от выбора нечеткой импликации соотносятся между собой (по величине максимума и вложенности) независимо от выбора конкретного отношения доминирования [3].

4. На результат решения задачи $\left(x^*\right)$ существенное влияние оказывает выбор функции сравнения нечетких чисел. Использование функций сравнения, основанных на введение нечетких отношений порядка, позволяет получать более разнообразные решения, сильнее зависящие от используемых функций нечеткой импликации, при этом эти решения могут довольно сильно отличаться от результатов для четкого случая.

Таким образом, логический подход к решению задач многокритериальной оптимизации позволяет применять его к различным модификациям основной постановки задачи, демонстрируя соответствие с четким вариантом. Основная проблема его практического применения заключается в формализации нечетких логических связок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Семенов В.А., Леденева Т.М.* Решение задачи многокритериальной оптимизации при нечетких критериях / В.А. Семенов, Т.М. Леденева // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии, 2007. № 2. – С. 50–54.

2. *Катулев А.Н.* Исследование операций и обеспечение безопасности: принципы принятия решений и обеспечение безопасности. Учеб. пособие для вузов / А.Н. Катулев, Н.А. Северцев, Г.М. Соломаха. – М. : Физико-математическая литература, 2000. – 320 с.

3. *Леденева Т.М.* О влиянии параметров некоторых импликаций на решение многокритериальной задачи оптимизации в рамках логического подхода / Т.М. Леденева, В.Н. Оболенцев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов международной конференции, Воронеж, 26-28 ноября 2012 г. – Воронеж, 2012. — Ч. 2. – С. 185–191.

Оболенцев В. А. – аспирант факультета Прикладной математики, механики и информатики Воронежского государственного университета

Obolentsev V. A. – Post-graduate student, Voronezh State University

Леденева Т. М. – д.т.н., профессор. факультета Прикладной математики, механики и информатики Воронежского государственного университета. Тел. (4732) 208-282. E-mail: dean@amm.vsu.ru

Ledeneva T. M. – Doctor of Technic Sciences, Professor, The dept. of the Mathematical Methods of Oreration Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282. E-mail: dean@amm.vsu.ru