УДК 519.852.33

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ НА ПРЕДПРИЯТИИ НА ОСНОВЕ ДУБЛЬТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

А. Я. Аснина*, Н. Г. Аснина, Т. Н. Чупахина***

* *Воронежский государственный университет*
** *Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Поступила в редакцию 16.08.2013 г.

Аннотация. Рассматривается предприятие с большой номенклатурой и мелкосерийным или единичным типом производства. Строится математическая модель задачи разработки календарного плана работ для n периодов и m видов выпускаемой на предприятии продукции. Проводится исследования построенной модели. Доказываются необходимые теоремы.
Ключевые слова: календарное планирование, дубольтранспортная задача.
Annotation. The enterprise with the big nomenclature and small-scale or single type of production is considered. The mathematical model of a problem of development of the job schedule for n of the periods and m of types of production let out at the enterprise is under construction. It is carried out researches of the constructed model. Necessary theorems are proved
Keywords: scheduling of calendar, task of duboltransportnaya.

ВВЕДЕНИЕ

Задача формирования календарных планов выполнения мелкосерийных заказов на большом предприятии по критерию минимизации общей трудоемкости и стоимости является весьма не тривиальной и актуальной.

Рассматривается предприятие с большой номенклатурой и мелкосерийным или единичным типом производства.

Разрабатывается календарный план работ для n периодов, m - число видов выпускаемой на предприятии продукции.

$\hat{A}_i$ – объем выпускаемой продукции i-го вида в единицах объема, $i = \overline{1, m}$

t_i – трудоемкость единицы продукции i-го вида, $i = \overline{1, m}$

c_i – стоимость работы для выпуска единицы продукции i-го вида, $i = \overline{1, m}$.

1.ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется определить объемы выпускаемой продукции в каждом периоде, обеспечивающие равномерное распределение по периодам трудоемкости и стоимости. При этом общая трудоемкость всего плана, а также общая стоимость всех выпускаемых изделий рассчитывается по формулам:

$$T = \sum_{i=1}^{m} t_i \hat{A}_i, \qquad (1)$$

$$C = \sum_{i=1}^{m} c_i \hat{A}_i. \qquad (2)$$

Под равномерным распределением будем понимать желаемый объем трудоемкости и стоимости в каждом j-м периоде:

$$T_j = \alpha_j T \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

$$C_j = \beta_j C \ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1, \quad \beta_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

Величины α_j и β_j – весовые коэффициенты, задаваемые заказчиком. Они могут означать, например, сезонность работ или быть равными $\frac{1}{n}$.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На основе поставленной задачи может быть построена математическая модель:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} = \hat{A}_i,\ i = \overline{1, m}, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i \hat{x}_{ij} = T_j j = \overline{1, n}, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \hat{x}_{ij} = C_j, \qquad (7)$$

$$\hat{x}_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n} \qquad (8)$$

$\widehat{\chi_{ij}}$ – объем выпуска продукции i-го вида в j-м периоде, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Ограничение (5) означает, что годовой план выпуска изделий каждого вида должен быть выполнен.

Ограничение (6) означает, что план по трудоемкости в каждом периоде должен быть выполнен.

Ограничение (7) означает, что план по стоимости работ в каждом периоде должен быть выполнен.

Заметим, что для данной модели выполнены условия:

$$\sum_{j=1}^{n} T_j = \sum_{i=1}^{m} t_i \hat{A}_i = T,$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \hat{A}_i = C.$$

Задача (5)–(8) может быть преобразована путем введения замены.

$x_{ij} = \hat{x}_{ij} t_j$, x_{ij} – трудоемкость выпуска i–го вида продукции, приходящаяся на j–й период;

$A_i = t_i \hat{A}_i$, A_i – трудоемкость всего плана по выпуску i–го вида продукции;

$a_i = \dfrac{c_i}{t_i}$, a_i – стоимость единицы трудоемкости i–го вида продукции.

Тогда модель (5) - (8) будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \; i = \overline{1,m} \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = T_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} = C_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (11)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n} \qquad (12)$$

Таким образом, получена задача распределения трудоемкости выпуска продукции по периодам.

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} T_j, \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = \sum_{j=1}^{n} C_j. \qquad (14)$$

Заметим, что полученная задача не является оптимизационной, и ее решением будет любое допустимое решение системы (9)–(12).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим полученную систему подробнее.

Ограничения (9), (10), (12) являются ограничениями транспортной задачи. Для нее условие (13) является необходимым и достаточным условием совместности. Ограничения (9), (11), (12) – есть ограничения распределительной задачи, для которой необходимым и достаточным условием совместности является (14) [1].

Задачу (9)–(12) будем называть дубльтранспортной. Для нее условия (13)–(14) являются только необходимыми, но не достаточными условиями совместности.

Для поиска допустимого решения задачи имеется простой алгоритм, основанный на декомпозиции системы. Смысл декомпозиции заключается в том, что на каждом шаге по $j = 1,n$ решается система

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = T_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} = C_j, \; j = \overline{1,n} \qquad (16)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq A_i \qquad (17)$$

Будем предполагать, что все a_i упорядочены по неубыванию: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots \leq a_n$, и найдем решение системы (15)–(16), имеющие две ненулевых компоненты.

$$\begin{gathered} x_{s_j j} + x_{k_j j} = T_j \\ a_{s_j} x_{s_j j} + a_{k_j} x_{k_j j} = C_j \end{gathered} \qquad (18)$$

Решением этой задачи будут:

$$\begin{gathered} x_{s_j j} = \frac{a_{k_j} T_j - C_j}{a_{k_j} - a_{s_j}} \\ x_{k_j j} = \frac{C_j - a_{s_j} T_j}{a_{k_j} - a_{s_j}} \end{gathered} \qquad (19)$$

Для полученных x_{sj} и x_{kj} проверим выполнение условий (17).

Так как $s_j < k_j$, то $a_{k_j} > a_{s_j}$, то для выполнения (17) необходимо и достаточно выполнение условий $a_{k_j}T_j - C_j \geq 0$ и $C_j - a_{s_j}T_j \geq 0$ то есть должны существовать такие номера s и k, чтобы

$$a_{s_j} \leq \frac{C_j}{T_j} \leq a_{k_j}. \qquad (20)$$

Очевидно, если для какого-то j не существует либо a_{s_j}, либо a_{k_j}, удовлетворяющих (20), то система (18), а, следовательно, и вся система (9)–(12) несовместна.

Если $x_{s_j} \leq A_{s_j}$ и $x_{k_j} \leq A_{k_j}$, то (19) являются решением системы (18) и можно переходить к вычислению переменных для нового $j = j+1$, предварительно исправив значения A_{k_j} и A_{s_j} по правилу

$$A_{k_j} = A_{k_j} - x_{k_j}$$
$$A_{s_j} = A_{s_j} - x_{s_j}$$

Если $x_{s_j} > A_{s_j}$, то $x_{s_j} = A_{s_j}$, и

$$A_{s_j} = 0$$
$$T_j^{=} = T_j - A_{s_j}$$
$$C_j^{=} = C_j - a_{s_j}A_{s_j}$$

после чего вновь по формулам (19) вычисляются x_{k_j} и x_{s_i} с тем же номером j и новыми T_j и C_j и новыми s_j и k_j.

Если, $x_{k_j} > A_{k_j}$, то $x_{k_j} = A_{k_j}$, и полагается

$$A_{k_j} = 0$$
$$T_j^{=} = T_j - A_{k_j}$$
$$C_j^{=} = C_j - a_{k_j}A_{k_j}$$

после чего вновь по формулам (19) вычисляются x_{k_j} x_{s_i} с тем же номером j и новыми T_j и C_j.

Из (20) следует, что s_j и k_j могут быть определены неоднозначно. При «плохом» выборе s_j и k_j отсутствию решения при декомпозиции, необязательно соответствует несовместность всей системы. В [2] доказана следующая теорема:

Если выбираются номера

$$s_j = \max\left(i : a_i T_j \leq C_j; A_i > 0\right) \qquad (21)$$

$$k_j = \min\left(i : a_i T_j \geq C_j; A_i > 0\right) \qquad (22)$$

то решение системы методом декомпозиции не нарушает ее совместности. Таким образом, при решении задачи методом декомпозиции следует выбирать s_j и k_j используя формулы (21) и (22).

Докажем еще два утверждения, облегчающие выбор s_j и k_j в тех случаях, когда либо $x_{s_j} > A_s$ либо $x_{k_j} > A_k$.

Утверждение 1.

Пусть при решении системы (18)

$x_{s_j} > A_{s_j}$ и $C_j^{н} = C_j - a_{s_j}A_{s_j} \geq 0$, $T_j^{н} = T_j - A_{s_j} \geq 0$, тогда

$$a_{s_j} \leq \frac{C_j^{н}}{T_j^{н}} \leq a_{k_j}.$$

Доказательство:

Рассмотрим разность

$$\frac{C_j^{н}}{T_j^{н}} - a_{s_j} = \frac{C_j - a_{s_j}A_{s_j}}{T_j - A_{s_j}} - a_{s_j} = \\ = \frac{C_j - a_{s_j}A_{s_j} - a_{s_j}T_j + a_{s_j}A_{s_j}}{T_j - A_{s_j}} = \\ = \frac{C_j - a_{s_j}T_j}{T_j - A_{s_j}} \geq 0$$

Рассмотрим теперь разность

$$\frac{C_j^{н}}{T_j^{н}} - a_{k_j} = \frac{C_j^{н} - a_{k_j}T_j^{н}}{T_j^{н}} = \\ = \frac{(C_j - a_{s_j}A_{s_j}) - a_{k_j}(T_j - A_{s_j})}{T_j^{н}} = \\ = \frac{C_j - a_{k_j}T_j + (a_{k_j} - a_{s_j})A_{s_j}}{T_j^{н}} \leq \\ \leq \frac{-x_{s_j}(a_{k_j} - a_{s_j}) + x_{s_j}(a_{k_j} - a_{s_j})}{T_j^{н}} = 0$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2.

Пусть при решении системы (18), где $a_{s_j} \leq \dfrac{C_j}{T_j} \leq a_{k_j}$, а $x_{k_j} > A_{k_j}$ и $C_j^{н} = C_j - a_{k_j}A_{k_j} \geq 0$, $T_j^{н} = T_j - A_{k_j} \geq 0$, тогда

$$a_{s_j} \leq \frac{C_j^{н}}{T_j^{н}} \leq a_{k_j}$$

Доказательство:

Рассмотрим разность

$$\frac{C_j^{н}}{T_j^{н}} - a_{k_j} = \frac{C_j - a_{k_j}A_{k_j} - a_{k_j}T_j + a_{k_j}A_{k_j}}{T_j^{н}} = \\ = \frac{C_j - a_{k_j}T_j}{T_j^{н}} \leq 0$$

$$\frac{C_j^{\text{н}}}{T_j^{\text{н}}} - a_{s_j} =$$

$$= \frac{C_j - a_{k_j} A_{k_j} - a_{s_j} T_j - a_{s_j} A_{k_j})}{T_j^{\text{н}}} =$$

$$= \frac{x_{k_j}(a_{k_j} - a_{s_j}) - (a_{k_j} - a_{s_j}) A_{k_j}}{T_j^{\text{н}}} \le$$

$$\le \frac{(x_{k_j} - A_{k_j})(a_{k_j} - a_{s_j})}{T_j^{\text{н}}} \ge 0$$

Утверждение доказано.

4. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ДУБЛЬТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В случаях, когда задача (9)–(12) неразрешима, переходим к задаче, минимизирующей отклонения от первоначальной трудоемкости, т. е. переходим к задаче

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le T_j \left(1 + \lambda\right),\ j = \overline{1,n}, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} = C_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{25}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{0,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{26}$$

$$\lambda \to \min \tag{27}$$

Полученная модель сводится к оптимизационной дубльтранспортной задаче с помощью введения дополнительных переменных.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i,\ i = \overline{0,m}, \tag{23}$$

$$\sum_{j=0}^{m} x_{ij} = T_j (1 + \lambda),\ j = \overline{1,n}, \tag{28}$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x_{ij} = C_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{29}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{0,m},\ j = \overline{1,n}.$$

$$\lambda \to \min$$

$$A_0 = \lambda \sum_{j=1}^{n} T_j$$

$$a_0 = 0$$

4.1. РЕШЕНИЕ ПОСТРОЕННОЙ ЗАДАЧИ

Для полученной задачи предлагается следующий способ решения.

Выбирается $\lambda = \lambda_0 = 1$ и решается задача методом декомпозиции. Если при $\lambda_0 = 1$ задача является несовместной, то выбирается $\lambda_0 = 2$ и так далее. В конечном итоге получается интервал $[\lambda^0, \lambda^1]$ такой, что при λ^0 система несовместна, а при λ^1 – совместна. В дальнейшем интервал сокращается методом деления отрезка пополам. Процесс прекращается, когда $\lambda^1 - \lambda^0 \le \varepsilon$, тогда в качестве оптимального λ принимается λ^1.

В итоге получаем оптимальное распределение для x_{ij}, после чего необходимо вернуться по замене к исходным значениям $\hat{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{t_i}$.

Попытаемся теперь найти оценку для оптимального λ.

Для этого используем *достаточное условие совместности.*

Утверждение 3.

Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Если для $\forall j$, $\exists s_j = s$ и $k_j = k$ где s и k определяются по формулам (21), (22) то система (9)–(12) совместна [3].

Очевидно, что при достаточно больших λ, $\forall j\ \ a_j = a_0$, $a_k = a_1$, т.е.

$$a_0 T_j (1 + \lambda) = 0 < C_j$$

$$a_k T_j (1 + \lambda) = a_1 T_j (1 + \lambda) \ge C_j$$

Определим теперь минимальное λ, которое удовлетворяет этим условиям.

$$a_1 T_j \lambda \ge C_j - a_1 T_j$$

$$\lambda \ge \frac{C_j - a_1 T_j}{a_1 T_j},$$

откуда

$$\lambda_{\min} = \max_j \frac{C_j - a_1 T_j}{a_1 T_j}$$

Однако эта оценка является достаточно грубой. Попробуем определить, при каком максимальном k (в старой задаче) можно получить одинаковые s и k для всех j в новой задаче.

Упорядочим $a_{s_j} \le \frac{C_j}{T_j} \le a_{k_j}$ по возрастанию k_j и s_j, т.е.

$$k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_n$$

$$s_1 = k_1 - 1 \le s_2 \le \ldots$$

Очевидно, что общее $k \le k_1$, т. к. если $k > k_1$, то в исходной задаче $a_{k-1} \ge a_{k1}$, тогда $a_{k-1}T_1 > C_1$, и тем более $a_{k-1}T_1(1+\lambda) > C_1$, т. е.

$$a_k T_j (1+\lambda) \ge C_j$$

$$\lambda \le \frac{C_j - a_k T_j}{a_k T_j}$$

$$\lambda_n = \max \frac{C_j - a_k T_j}{a_k T_j}$$

$$k = \min_j k_j$$

Теперь определим интервал изменений λ, при которых для всех j $k = k_j$ $s = s_j = k - 1$. Тогда должны выполняться следующие условия

$$a_s T_1 (1+\lambda) \le C_1$$

$$\lambda \le \frac{C_1 - a_s T_1}{a_s T_1};$$

$$\lambda \le \frac{C_j - a_s T_j}{a_s T_j}, \text{ для } j \ge 2$$

Заметим, что при таком значении λ для $\forall j \ge 2$ условие $a_s T_j (1+\lambda) \le C_j$ будет выполнено. В самом деле

$$\lambda \le \frac{C_1}{a_s T_1} - 1$$

$$\lambda \le \frac{C_j}{a_s T_j} - 1$$

Заметим, что $a_s \le \frac{C_j}{T_j} \le a_k$, и т. к. все j упорядочены по не убыванию. a_k и a_j то $\frac{C_1}{T_1} \le \frac{C_2}{T_2} \le \ldots \le \frac{C_n}{T_n}$, т. е.

$$\lambda \le \frac{C_1}{a_s T_1} - 1,$$

$$\lambda \ge \frac{C_j}{a_k T_j} - 1,$$

поэтому

$$\lambda \ge \frac{C_n}{a_k T_n} - 1,$$

таким образом, получим интервал изменения λ, при котором s и k одинаковы для всех j:

$$\lambda \in \left[\frac{C_n}{a_k T_n} - 1; \frac{C_1}{a_s T_1} - 1\right],$$

при этом для того, чтобы этот интервал имел смысл, необходимо чтобы

$$\frac{C_n}{a_k T_n} \le \frac{C_1}{a_s T_1}.$$

Если же не предполагать выполнения достаточного условия, то в качестве λ, при котором задача заведомо совместна, можно выбрать

$$\lambda = \min\left(\frac{C_n}{a_k T_n}, \frac{C_1}{a_s T_1}\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен и обоснован простой метод решения задачи календарного планирования на предприятии, основанный на декомпозиции системы ограничений. Показано, что при декомпозиции перебор временных периодов может производится в любом порядке, что влечет за собой возможность получения нескольких оптимальных решений. Таким образом, заказчик может выбрать из предложенных ему решений наиболее приемлемое, по каким либо дополнительным критериям, не вошедшим в модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука, 1969. – 382 *с.*

2. *Аснина А.Я.* О существовании неотрицательных решений систем линейных уравнений и неравенств специального вида / Аснина А.Я. // Вопросы оптимального программирования в производственных задачах – Воронеж, ИПЦ ВГУ;1980. – С. 32–35.

3. *Аснина А.Я.* Оптимизация распределения планового задания по календарным периодам / Аснина Н.Г., Попченкова Ю.С. // Системное моделирование социально-экономических процессов: 27-я международная научная школа-семинар – М., 2005. – С. 16–22.

Аснина А. Я.– доцент кафедры математических методов исследования операций, к.т.н., Воронежский государственный университет

Asnina Albina Y. – Associate Professor of Mathematical Methods of Operations Research, Ph.D., Voronezh State University

Аснина Н. Г. – доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, к.т.н., Воронежский государственный архитектурно строительный университет

Чупахина Т. – магистрант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет

Asnina Natalia G. – Associate Professor, Department of Applied Computer Science and Information Systems, Ph.D., Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering

Chupakhina Tatiana – undergraduate department of mathematical methods of operations research, Voronezh State University