УДК 519.7

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СКРЫТОЙ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ФЕРГЮСОНОВСКОГО ТИПА

В. М. Деундяк, М. А. Жданова

Южный федеральный университет
ФГНУ «НИИ« Спецвузавтоматика»

Поступила в редакцию 02.07.2013 г.

Аннотация. Для приложений к моделированию источников ошибок в цифровых каналах передачи данных представляют интерес такие скрытые марковские модели, в которых явно задается длительность состояний (скрытые полумарковские модели), в частности, модели фергюсоновского типа. В настоящей работе решается задача представления в полиномиальном виде скрытой полумарковской модели фергюсоновского типа.
Ключевые слова: скрытая марковская модель, скрытая полумарковская модель, полиномиальное представление, поле Галуа.
Annotation. Hidden semi-Markov models (i.e. hidden Markov models with explicit duration, particularly, ones of the Ferguson's type) are of considerable interest for error sources modeling in digital data transmission channels. Here we demonstrate how to construct the polynomial representation for hidden semi-Markov model of Ferguson's type.
Keywords: hidden Markov model, hidden semi-Markov model, polynomial representation, Galois field.

1. Введение. В настоящее время теория скрытых марковских и скрытых полумарковских моделей [1], [2] получила широкое применение в различных прикладных областях, таких как распознавание и синтез речи [1], распознавание изображений [3], анализ генетических последовательностей [4], выявление аномалий в сети [5], машинный перевод [6]. В рамках этого подхода представляют интерес две задачи моделирования – прямая и обратная [1], [2], [7], [8], [9]. Эффективное решение прямой задачи зачастую связывают с построением генераторов марковского типа посредством программируемых логических интегральных схем, которое может быть основано на представлении вероятностных автоматов полиномиальными функциями над полями Галуа [10], [11]. В частности, в [11] строится полиномиальная модель автомата, фактически представляющего собой классическую скрытую марковскую модель из [1].

Для обнаружения и исправления ошибок, возникающих при передаче информации по цифровым каналам, применяются методы помехоустойчивого кодирования. В [12] предложена информационная система оценки применимости схем алгебраического помехоустойчивого кодирования, позволяющая путем проведения имитационных экспериментов подбирать для конкретного канала наиболее эффективный кодек. Важную роль в таких экспериментах играет база моделей источников ошибок, описанная в [13]. В [8], [9] представлена общая модель источника ошибок на основе теории специальных скрытых полумарковских моделей, то есть таких скрытых марковских моделей, в которых явно задается длительность состояний. В [10], [11] отмечается, что представление моделей марковского типа в полиномиальном виде над полями Галуа позволяет оптимизировать процесс генерации выходной последовательности. Таким образом, для решения задачи подбора эффективных кодеков, требующей многократной генерации последовательностей ошибок (см. [12], [13]), актуальна реализация моделей источников ошибок в полиномиальном виде. В настоящей работе решается теоретическая задача представления абстрактной скрытой полумарковской модели типа Фергюсона в полиномиальном виде, как этап в построении полиномиального представления общей модели источника ошибок из [8], [9].

2. Вспомогательные результаты о полиномиальном представлении одного класса стохастических матриц. В работах [10], [11] были построены полиномиальные модели для некоторых типов вероятностных автоматов, в частности, автоматов, реализующих простую однородную цепь Маркова и скрытую марковскую модель. В основе построения полиномиальных моделей лежит сопоставление переходной и, в случае скрытой марковской модели, выходной матрице полинома от двух переменных. В этом разделе опишем принцип, позволяющий по абстрактной прямоугольной стохастической по строкам матрице построить полином двух переменных над полем Галуа F_{2^n}.

Пусть X, Y – конечные множества элементарных событий. Рассмотрим прямоугольную стохастическую по строкам матрицу P размера ($|X| \times |Y|$), составленную из условных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} P\left(y_1|x_1\right) & \dots & P(y_{|Y|} \mid x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1 \mid x_{|X|}) & \dots & P(y_{|Y|} \mid x_{|X|}) \end{pmatrix},$$

где

$$\forall i \in \left[1, |X|\right] : x_i \in X\,,\ \forall j \in \left[1, |Y|\right] : y_j \in Y\,.$$

Каждая стохастическая по строкам матрица размера $n \times m$ может быть представлена как выпуклая линейная комбинация не более чем $n\left(m-1\right)+1$ простых матриц (см. [11] и [14], с. 26). (Стохастические матрицы, в которых все элементы нули и единицы, называются простыми [14], с. 26.). Поэтому:

$$P = \sum_{k=1}^{l_P} p_k^P M^P\left(u_k^P\right), l_P \le |X|\left(|Y|-1\right)+1, \qquad (1)$$

где для любого $k \in \left[1, l_P\right]$

$$M^P\left(u_k^P\right) = \left\{\mu_{ij}^P\left(u_k^P\right)\right\}_{i,j=1}^{|X|,|Y|} \qquad (2)$$

– простая матрица размера $|X| \times |Y|$ и выполняется условие:

$$0 \le p_k^P \le 1\,,$$

$$\sum_{k=1}^{l_P} p_k^P = 1\,.$$

По (1) построим случайную величину u^P, принимающую значения на множестве U^P, где $\left|U^P\right| = l_P$, и распределенную по следующему закону:

u_1^P	u_2^P	$\dots$	$u_{l_P}^P$
p_1^P	p_2^P	$\dots$	$p_{l_P}^P$

Обозначим

$$\Phi^P\left(P\right) = u^P\,. \qquad (3)$$

Теперь, используя случайную величину u^P и представление (1), определим по простой матрице (2) отображение $\lambda^P : U^P \times X \to Y$, для которого $\lambda^P\left(u^P, x_i\right) = y_j$ при $\mu_{ij}^P\left(u^P\right) = 1$.

Опишем принцип построения по отображению λ^P многочлена двух переменных над полем Галуа [10]. Зададим минимальное натуральное n, для которого

$$2^n \ge \max\left\{l_P, |X|, |Y|\right\},$$

и установим взаимно-однозначные соответствия между элементами каждого из множеств U^P, X, Y и элементами поля Галуа F_{2^n}. Обозначим отображение, определенное на $F_{2^n} \times F_{2^n}$ и соответствующее λ^P, через

$$\hat{\lambda}^P : F_{2^n} \times F_{2^n} \to F_{2^n}\,.$$

Соответствие понимается в том смысле, что на $\hat{x}, \hat{y} \in F_{2^n}$, кодирующих $x \in X, y \in Y$, функция $\hat{\lambda}^P\left(\hat{x}, \hat{y}\right)$ принимает значение, кодирующее $\lambda^P\left(x, y\right)$. Известно, что для произвольного отображения $\varphi : F_{2^n} \times F_{2^n} \to F_{2^n}$ существует единственный полином вида

$$f\left(x, q\right) = \sum_{i,j=0}^{r} h_{ij} x^j q^i, r = 2^n - 1\,, \qquad (4)$$

где $x, q, h_{ij} \in F_{2^n}$, являющийся представлением отображения φ в том смысле, что $f\left(c_1, c_2\right) = \varphi\left(c_1, c_2\right)$ для всех $c_1, c_2 \in F_{2^n}$; матрица коэффициентов многочлена (4) определяется из следующего соотношения:

$$H = C^{-1} Z \left(C^{-1}\right)^T,$$

где $Z = \left\{z_{ij}\right\}_{i,j=0}^{r-1}$ – матрица значений отображения φ на элементах поля F_{2^n} и

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \xi^{r-1} & \dots & \xi^{(r-1)i \bmod (r)} & \dots & \xi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \xi^2 & \dots & \xi^{2i \bmod (r)} & \dots & \xi^{r-2} \\ 0 & 1 & \xi & \dots & \xi^i & \dots & \xi^{r-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $r = 2^n - 1$, $1 \le i \le r-1$, ξ – примитивный элемент F_{2^n} (см. [10]). Таким образом, зная значения отображения $\hat{\lambda}^P$ в точках $F_{2^n} \times F_{2^n}$, можно построить многочлен $f_P\left(x_P, q_P\right) = \sum_{i,j=0}^{r} h_{ij}^P x_P^j q_P^i$, где на вход полинома в качестве значений переменной x_P подается элемент поля, соответствующий реализации случайной величины u^P, а в качестве q_P – элемент поля, соответствующий x_i.

3. Структурная схема и полиномиальное представление скрытой полумарковской модели типа Фергюсона. Скрытой полумарковской моделью фергюсоновского типа будем называть систему:

$$\Delta = \left\{S, A, \boldsymbol{\pi}, V, B, D, F\right\}, \tag{5}$$

где $S = \left\{S_1, S_2, \ldots, S_N\right\}$ – алфавит состояний модели, $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N}$ – матрица переходов, $\boldsymbol{\pi} = \left\{\pi_i\right\}_{i=1}^{N}$ – вектор начального распределения вероятностей состояний, $V = \left\{v_1, v_2, \ldots, v_M\right\}$ – алфавит выходов, $B = \left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N,M}$ – матрица условных вероятностей наблюдения выхода v_j в состоянии S_i, D – алфавит возможных длительностей мощности L, а $F = \left\{f_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N,L}$ – матрица размера $N \times L$, элемент f_{ij} которой представляет собой вероятность наблюдать длительность d_j при условии, что Δ находится в состоянии S_i.

Модель (5) представляет собой общую скрытую полумарковскую модель из работы [2] с наложенными на нее следующими дополнительными ограничениями: текущее состояние зависит только от предшествующего; текущая длительность определяется только текущим состоянием; наблюдения символов выходного алфавита внутри длительности полагаются условно независимыми с распределением вероятностей, зависящим только от текущего состояния, но не от его длительности. Отметим также, что если алфавит возможных длительностей содержит только один элемент и, следовательно, матрица F представляет собой вектор длины N, все элементы которого равны 1, то скрытая полумарковская модель типа Фергюсона сводится к скрытой марковской модели. Приведем следующий пример скрытой полумарковской модели типа Фергюсона.

Пример 1. Рассмотрим симметричный стационарный идеально синхронизированный цифровой канал передачи данных C, по которому передается информация в виде последовательностей символов q-ичного алфавита, отождествляемого с полем Галуа F_q. Канал C может находиться в одном из N различных физических состояний в течение некоторого промежутка времени, после чего переходит в следующее состояние. Предполагается, что для произвольного состояния распределение длительностей пребывания в нем фиксировано. В каждом из состояний могут возникать независимые аддитивные ошибки с собственным фиксированным распределением. Покажем, что источник ошибок в рассмотренном канале передачи данных C может быть описан скрытой полумарковской моделью фергюсоновского типа. Действительно, набору физических состояний канала поставим в соответствие алфавит $S = \left\{S_1, S_2, \ldots, S_N\right\}$, вероятности переходов между состояниями зададим матрицей $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N}$, начальное распределение вероятностей состояний определим вектором $\boldsymbol{\pi} = \left\{\pi_i\right\}_{i=1}^{N}$. Пусть D – множество всех возможных длительностей по всем состояниям, а элемент f_{ij} матрицы $F = \left\{f_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N,L}$ – вероятность наблюдения длительности d_j при условии, что канал передачи данных C находится в состоянии S_i. В качестве выходного алфавита V модели источника ошибок в канале C выступает алфавит канала, а вероятности наблюдения различных значений ошибки в различных состояниях канала задаются в виде матрицы $B = \left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N,q}$.

Для скрытой полумарковской модели фергюсоновского типа построим полиномиальное представление. Для этого по каждой из матриц A, B и F определим полином так, как это было сделано в предыдущем разделе для абстрактной прямоугольной матрицы. Итак, поскольку матрицы A, B и F являются стохастическими по строкам, согласно [11], [14], они могут быть представлены в виде выпуклых линейных комбинаций простых матриц:

$$A = \sum_{k=1}^{l_A} p_k^A M^A\left(u_k^A\right), l_A \le N^2 - N + 1, \tag{6}$$

$$B = \sum_{k=1}^{l_B} p_k^B M^B\left(u_k^B\right), l_B \le N\left(M - 1\right) + 1, \tag{7}$$

$$F = \sum_{k=1}^{l_F} p_k^F M^F\left(u_k^F\right), l_F \le N\left(L - 1\right) + 1, \tag{8}$$

где

$$M^A\left(u_k\right) = \left\{\mu_{ij}^A\left(u_k^A\right)\right\}_{i,j=1}^{N,N},$$

$$M^B\left(u_k\right) = \left\{\mu_{ij}^B\left(u_k^B\right)\right\}_{i,j=1}^{N,M},$$

$$M^F\left(u_k\right) = \left\{\mu_{ij}^F\left(u_k^F\right)\right\}_{i,j=1}^{N,L}$$

– простые матрицы размеров $N \times N$, $N \times M$, $N \times L$ соответственно, причем

$$0 \le p_k^A \le 1, \ \sum_{k=1}^{l_A} p_k^A = 1,$$

$$0 \le p_k^B \le 1, \ \sum_{k=1}^{l_B} p_k^B = 1,$$

$$0 \le p_k^F \le 1, \ \sum_{k=1}^{l_F} p_k^F = 1.$$

Используя (6), построим отображение Φ^A типа (3), ставящее в соответствие матрице A такую случайную величину u^A, которая принимает значения на некотором множестве U^A с $\left|U^A\right| = l_A$, и распределенную по следующему закону:

u_1^A	u_2^A	$\cdots$	$u_{l_A}^A$
p_1^A	p_2^A	$\cdots$	$p_{l_A}^A$

Определим отображение $\lambda^A : U^A \times S \to S$, такое что $\lambda^A\left(u^A, S_i\right) = S_j$, если $\mu_{ij}^A\left(u^A\right) = 1$.

Применяя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, по разложениям (7) и (8) определим соответственно отображения Φ^B и Φ^F, случайные величины u^B со значениями из множества U^B ($\left|U^B\right| = l_B$) и u^F со значениями из множества U^F ($\left|U^F\right| = l_F$), распределенные по следующим законам:

u_1^B	u_2^B	$\cdots$	$u_{l_B}^B$
p_1^B	p_2^B	$\cdots$	$p_{l_B}^B$
u_1^F	u_2^F	$\cdots$	$u_{l_F}^F$
p_1^F	p_2^F	$\cdots$	$p_{l_F}^F$

Далее по (7) построим отображение $\lambda^B : U^B \times S \to V$, такое что $\lambda^B\left(u^B, S_i\right) = v_j$, при $\mu_{ij}^B\left(u^B\right) = 1$. В свою очередь по (8) определим отображение $\lambda^F : U^F \times S \to D$ такое, что $\lambda^F\left(u^F, S_i\right) = d_j$, при $\mu_{ij}^F\left(u^F\right) = 1$.

Установим соответствие между элементами множеств U^A, U^B, U^F, S, V, D и элементами поля Галуа: выберем минимальное натуральное n, для которого

$$2^n \ge \max\left\{l_A, l_B, l_F, N, M, L\right\}$$

и закодируем элементы множеств U^A, U^B, U^F, S, D, V элементами поля F_{2^n}. Согласно предыдущему разделу для каждого из отображений $\hat{\lambda}^A, \hat{\lambda}^B$ и $\hat{\lambda}^F$, действующих из $F_{2^n} \times F_{2^n}$ в F_{2^n} и кодирующих λ^A, λ^B и λ^F, можно построить единственный полином вида (4). Обозначим эти полиномы $f_A\left(x_A, q_A\right)$, $f_B\left(x_B, q_B\right)$ и $f_F\left(x_F, q_F\right)$ соответственно.

Полиномиальной моделью скрытой полумарковской модели типа Фергюсона назовем систему

$$\text{ПМ} = (u^A, u^B, u^F, f_B(x_B, f_A(x_A, q_A)), \\ f_F(x_F, f_A(x_A, q_A)), \pi)$$

в которой u^A, u^B и u^F – случайные величины, определяемые по разложениям матриц A, B и F на линейные комбинации простых матриц аналогично (1), значения которых закодированы элементами поля F_{2^n}.

Структурная схема автомата, реализующего полиномиальное представление скрытой полумарковской модели фергюсоновского типа Δ, представлена на рисунке 1.

В схеме можно выделить шесть основных блоков, а именно укрупненные блоки «A», «B», «F», соответствующие матрицам A, B, F модели Δ (см. (5)); управляющий «Блок Y» и вспомогательные блоки: «Блок задержки 1», «Блок задержки 2». Укрупненный «Блок A», состоящий из генератора случайной величины u^A «ГСВu^A» и блока $f_A\left(x_A, q_A\right)$, отвечает за генерацию текущего состояния модели. Укрупненный «Блок F» состоит из генератора случайной величины u^F «ГСВu^F» и блока $f_F\left(x_F, q_F\right)$, производит генерацию длительности в выбранном состоянии и тем самым определяет количество запусков укрупненного «Блока B». Укрупненный «Блок B» состоит из генератора случайной величины u^B «ГСВu^B» и блока $f_B\left(x_B, q_B\right)$ и возвращает на выходе символ.

Опишем работу автомата. Блок «ГСВu^A» генерирует значение случайной величины u^A в соответствии с распределением. Сгенерированное значение подается на вход блока $f_A\left(x_A, q_A\right)$ в качестве x_A, а в качестве q_A подается элемент поля F_{2^n}, соответствующий текущему состоянию, в первый момент времени определяемому по вектору π. Значение полинома $f_A\left(x_A, q_A\right)$, представляющее собой новое состояние автомата, подается на вход блока $f_F\left(x_F, q_F\right)$ в качестве переменной q_F, а также «Блока задержки 1» и «Блока задержки 2». Одновременно с этим блок «ГСВu^F» генерирует значение случайной величины u^F в соответствии со своим распределением. Это значение поступает на вход полинома $f_F\left(x_F, q_F\right)$ в качестве x_F, а на выходе получается длительность d, которая подается на вход управляющего блока «Y» и определяет текущее

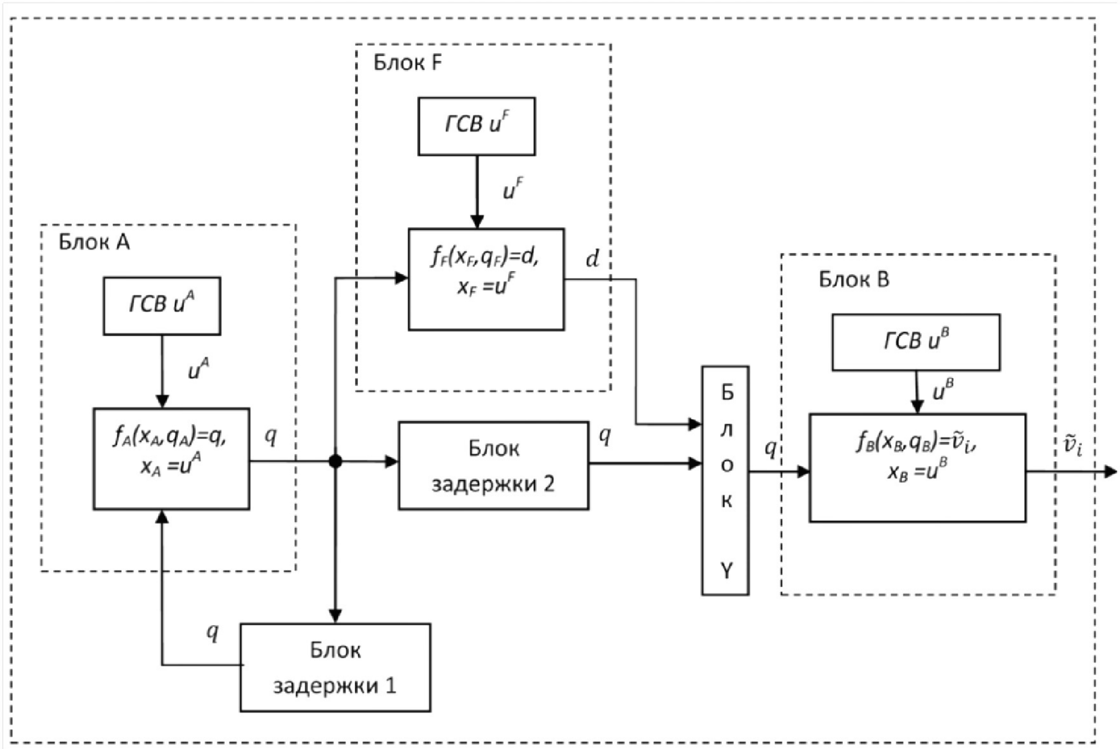

Рис. 1. Структурная схема автомата, реализующего полиномиальное представление скрытой полумарковской модели типа Фергюсона

число запусков укрупненного «Блока B». «Блок задержки 2» выполняет задержку выходного сигнала блока $f_A\left(x_A,q_A\right)$ так, чтобы он поступил на вход блока «Y» после того, как отработает блок $f_F\left(x_F,q_F\right)$. «Блок Y» передает выход блока $f_A\left(x_A,q_A\right)$ в качестве переменной q_B подблока $f_B\left(x_B,q_B\right)$ укрупненного блока «B», а в качестве x_B подается реализация случайной величины u^B, сгенерированная собственным генератором в соответствии с распределением. На выходе «B» выдает символ $\tilde{v}_i$. Отметим, что укрупненный «Блок B» запускается не один, а d раз, и его запуски управляются блоком «Y». Таким образом, текущее состояние порождает последовательность выходных символов длины d. «Блок задержки 1» выполняет задержку выходного сигнала блока $f_A\left(x_A,q_A\right)$ так, чтобы он поступил на вход $f_A\left(x_A,q_A\right)$ после того, как d раз отработает укрупненный «Блок B».

Пример 2. Проиллюстрируем предложенный подход к построению полиномиального представления скрытой полумарковской модели типа Фергюсона. Для простоты алфавит состояний, алфавит длительностей и выходной алфавит принимаются бинарными. Рассмотрим скрытую полумарковскую модель фергюсоновского типа Δ вида (5), где

$$S=\left\{S_1,S_2\right\},\ V=F_2=\left\{0,1\right\},\ D=\left\{1,2\right\},$$

$$A=\begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix},\ \pi=\begin{pmatrix}0.3\\ 0.7\end{pmatrix}.$$

Представим стохастические матрицы A,B и F в виде выпуклых линейных комбинаций простых матриц (см. (1), (6), (7), (8)) по алгоритму из [14] с. 26:

$$A=0.8\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$B=0.7\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+0.2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$F=0.5\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0.4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+0.1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В нашем случае $l_A = l_B = l_F = 3$. По разложениям матриц $A, B,\ F$ запишем соответствующие распределения для дискретных случайных величин u^A, u^B, u^F:

u_1^A	u_2^A	u_3^A
0.8	0.1	0.1

u_1^B	u_2^B	u_3^B
0.7	0.2	0.1

u_1^F	u_2^F	u_3^F
0.5	0.4	0.1

и определим отображения λ^A, λ^B и λ^F в табличном виде:

λ^A	S_1	S_2
u_1^A	S_1	S_2
u_2^A	S_2	S_1
u_3^A	S_1	S_1

λ^B	S_1	S_2
u_1^B	1	1
u_2^B	1	0
u_3^B	0	0

λ^F	S_1	S_2
u_1^F	2	1
u_2^F	1	2
u_3^F	2	2

Теперь необходимо закодировать элементы множеств U^A, U^B, U^F, S, V, D элементами поля Галуа. Минимальное натуральное n, для которого выполняется

$$2^n \geq \max\left\{l_A, l_B, l_F, N, M, L\right\},$$

равно 2. Зафиксируем неприводимый многочлен $m(x) = x^2 + x + 1$ над полем Галуа F_{2^2}. Тогда $F_{2^2} = \left\{0, 1, \xi, \xi^2\right\}$, где ξ – примитивный элемент. Закодируем элементы множеств U^A, U^B, U^F, S, V, D элементами поля F_{2^2}:

$$S = \{S_1, S_2\} \to \left\{0,1\right\},$$
$$F_2 = \left\{0,1\right\} \to \left\{0,1\right\},$$
$$D = \left\{1,2\right\} \to \left\{0,1\right\},$$
$$U^A = \left\{u_1^A, u_2^A, u_3^A\right\} \to \left\{0,1,\xi\right\},$$
$$U^B = \left\{u_1^B, u_2^B, u_3^B\right\} \to \left\{0,1,\xi\right\},$$
$$U^F = \left\{u_1^F, u_2^F, u_3^F\right\} \to \left\{0,1,\xi\right\}.$$

По λ^A, λ^B и λ^F 7апишем отображения $\hat{\lambda}^A, \hat{\lambda}^B$ и $\hat{\lambda}^F$, используя кодировку полем Галуа F_{2^2} и доопределяя их нулями на недостающих элементах.

$\hat{\lambda}^A$	0	1	ξ	ξ^2
0	0	1	0	0
1	1	0	0	0
ξ	0	0	0	0
ξ^2	0	0	0	0

$\hat{\lambda}^B$	0	1	ξ	ξ^2
0	1	1	0	0
1	1	0	0	0
ξ	0	0	0	0
ξ^2	0	0	0	0

λ^F	0	1	ξ	ξ^2
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
ξ	1	1	0	0
ξ^2	0	0	0	0

Для каждого из отображений $\hat{\lambda}^A, \hat{\lambda}^B$, $\hat{\lambda}^F$, действующих из $F_{2^2} \times F_{2^2}$ в F_{2^2}, построим полином вида (4). Так, полином $f_A\left(x_A, q_A\right)$, соответствующий $\hat{\lambda}^A$, имеет вид:

$$f_A\left(x_A, q_A\right) = \sum_{i,j=0}^{3} h_{ij}^A x_A^j q_A^i,$$

где матрица коэффициентов $H^A = \left\{h_{ij}^A\right\}_{i,j=0}^3$ определяется формулой

$$H^A = C^{-1} Z^A \left(C^{-1}\right)^T,$$

матрица C^{-1} в нашем случае имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi^2 & \xi \\ 1 & 1 & \xi & \xi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица Z^A, определяемая значениями $\hat{\lambda}^A$ на элементах F_{2^2}, равна

$$Z^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$f_A\left(x_A, q_A\right) = q + q^2 + q^3 + x + xq^3 + \\ + x^2 + x^2q^3 + x^3 + x^3q + x^3q^2.$$

Аналогично по отображениям $\hat{\lambda}^B$ и $\hat{\lambda}^F$ построим многочлены $f_B\left(x_B, q_B\right)$ и $f_F\left(x_F, q_F\right)$:

$$f_B\left(x_B, q_B\right) = 1 + q + q^2 + x + xq^3 + \\ + x^2 + x^2q^3 + x^3q + x^3q^2 + x^3q^3,$$

$$f_F\left(x_F, q_F\right) = 1 + q^3 + \xi^2 x + \left(1 + \xi^2\right)xq + \\ + \left(1 + \xi^2\right)xq^2 + xq^3 + \xi x^2 + \\ + \left(1 + \xi\right)x^2q + \left(1 + \xi\right)x^2q^2 + x^2q^3.$$

Определив полиномы $f_A\left(x_A, q_A\right)$, $f_B\left(x_B, q_B\right)$ и $f_F\left(x_F, q_F\right)$, мы фактически построили полиномиальное представление рассматриваемой фергюсоновской скрытой полумарковской модели.

4. Заключение. В работе разработана полиномиальная схема скрытой полумарковской модели типа Фергюсона. Это позволит в дальнейшем эффективно реализовать и экспериментально исследовать имитационные модели источников ошибок в цифровых каналах передачи данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинер Л.Р.* Скрытые марковкие модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: обзор / Рабинер Л. Р. // ТИИЭР, 1989, т. 77, № 2, С. 86–120.

2. *Yu. Shun-Zheg.* Hidden semi-Markov models / Yu. Shun-Zheg. // Artificial Intelligence, 2010, V. 174, n. 2, P. 215–243.

3. *Гультяева Т.А.* Распознавание лиц с использованием скрытых марковских моделей / Гультяева Т.А. // Наука. Технологии. Инновации. Материалы всероссийской научной конференции молодых ученых. Новосибирск. – Новосибирск: НГТУ, 2004, Т.1, С.159–160.

4. *De Fonzo V.* Hidden Markov Models in Bioinformatics / De Fonzo V., Aluffi-Pentini F., Parisi V. // Current Bioinformatics, 2007, 2, P. 49–61.

5. *Khanna R.* System Approach to Intrusion Detection Using Hidden Markov Model / Khanna R., Liu H. // Proc. 2006 Int'l. Conf. Commun. and Mobile Comp., July 2006, 2006, P. 349–354.

6. *Полянский К.В.* Модель ip-системы машинного перевода текста на базе частотного взвешивания термов и скрытой марковской цепи / К. В. Полянский // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: системный анализ и информационные технологии, 2011, № 1, С.195-199.

7. *Костылев В.И.* Анализ и имитационное моделирование шума бистатической радиотехнической системы / Костылев В. И., Панфилов С. А. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: системный анализ и информационные технологии, 2010, № 1, С.25-30.

8. *Деундяк В.М.* О применении скрытых марковских моделей в моделировании источников ошибок / Деундяк В. М., Жданова М. А. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011, Т.18, №3, С. 488.

9. *Деундяк В.М.* Об аппроксимации потока ошибок в канале передачи данных на основе скрытых полумарковских QP-моделей / Деундяк В.М., Жданова М. А. // Тези доповідей VI Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій»,19-21 вересня 2012 р.,м. Запоріжжя,2012,С.109-110.

10. *Нурутдинов Ш.Р.* Моделирование цепей Маркова в полях Галуа / Нурутдинов Ш. Р. // Дискретная математика, 2004, Выпуск 2 (16), С. 136-147.

11. *Захаров В.М.* Полиномиальное представление автоматных моделей марковских функций над полем Галуа / Захаров В. М., Нурутдинов Ш. Р., Соколов С. В., Шалагин С. В. // Исслед. по информ. Отечество, Казань, 2003, №5, С. 45 – 56.

12. *Деундяк В.М.* Методы оценки применимости помехоустойчивого кодирования в каналах связи /

Деундяк В. М. , Могилевская Н. С. // Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2007. – 85 с.

13. *Деундяк В.М.* Математическое моделирование источников ошибок цифровых каналов передачи данных / Деундяк В. М. , Могилевская Н. С. // Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2006. – 69 с.

14. *Поспелов Д.А.* Вероятностные автоматы / Поспелов Д. А. // М.: Энергия, 1970. – 89с.

Деундяк В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Алгебра и дискретная математика», Южный федеральный университет; старший научный сотрудник ФГНУ «НИИ «Спецвузавтоматика», г. Ростов-на-Дону. E-mail: vlade@math.rsu.ru.

Жданова М. А. – аспирант кафедры «Алгебра и дискретная математика», Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону. E-mail: mary.zhdanova@gmail.com.

Deundyak V. M. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor of the chair of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University; Senior Scientist of FSSO «SRI «Spetsvuzavtomatika», Rostov-on-Don. E-mail: vlade@math.rsu.ru.

Zhdanova M. A. – postgraduate student of the chair of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University, Rostov-on-Don. E-mail: mary.zhdanova@gmail.com