

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММАМИ ЭКСПОНЕНТ

И. А. Блатов, В. Г. Каргашевский, Н. В. Киреева, Л. Р. Чупахина

*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики*

Поступила в редакцию 16.07.2013 г.

**Аннотация.** В данной статье рассматривается метод аппроксимации плотностей вероятности временных характеристик трафика мультисервисной сети. Использование суммы затухающих экспонент позволяет распространить метод на аппроксимацию плотностей с «тяжелыми» хвостами.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, трафик, распределение с «тяжелым» хвостом, экспонента.

**Annotation.** In this article the method of approximation of density of probability of temporary characteristics of a traffic of a multiservice network is considered. Use of the sum fading the exponents allows to extend a method to approximation of density with «heavy» tails.

**Keywords:** queuing system, the traffic, the distribution of «heavy» tail, exponent.

**ВВЕДЕНИЕ.** Современный трафик в мультисервисной сети требует значительных ресурсов для обслуживания, так как увеличение числа пользователей и объема передаваемой информации в сети привело к возрастанию нагрузки сетевых устройств при высоких требованиях к качеству обслуживания.

В работах [1,2] показано, что современный трафик мультисервисной сети обладает фрактальными свойствами, которые выражаются, например, в том, что распределение вероятностей интервалов времени между поступлениями пакетов на вход устройства обработки и распределение вероятностей самой длительности пакетов обладают «тяжелыми» хвостами. В качестве последних, часто используются распределения Парето, Вейбулла, логнормальное распределение и другие.

В данных обстоятельствах адекватной моделью обслуживания трафика является модель G/G/1 [3], аналитическое исследование которой связано с решением уравнения Линдли. Относительно простой метод решения данного уравнения предполагает, что вышеупомянутые распределения могут быть аппроксимированы рядами затухающих экспонент. При этом су-

ществленным является требование, чтобы показатели экспонент были вещественными и отрицательными при положительных значениях аргумента. В случае применения известного метода Прони [4,5] добиться выполнения этого требования удается далеко не всегда, что подтверждается численными экспериментами. Кроме того открытым остается вопрос об оценке погрешности аппроксимации. Ниже предлагается решение данной задачи на основе аппроксимации суммами экспонент, показатели которых образуют арифметическую прогрессию.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Пусть достаточно гладкая функция  $f(x)$  задана на промежутке  $[a, b]$ . Требуется построить ее аппроксимацию вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\alpha_k x} + R(x), \alpha_k > 0 \quad (1)$$

и оценить погрешность  $R(x)$ .

Пусть  $a = 0, b = 1$  (общий случай сводится к этому линейной заменой  $x = a + (b - a)x'$ ). Зафиксируем положительное  $m$ . Положим  $\alpha_k = \frac{k}{m}$  и обозначим  $e^{-\frac{x}{m}} = y, g(y) = f(-m \ln y)$ . Тогда  $g(y)$  будет гладкой функцией, определенной на отрезке  $[e^{-\frac{1}{m}}, 1]$ , а формула (1) примет вид

$$g(y) = \sum_{k=1}^n a_k y^k + \tilde{R}(y). \quad (2)$$

Разделим обе части формулы (2) на  $y$  и перепишем ее в виде

$$\frac{g(y)}{y} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} y^k + \frac{\tilde{R}(y)}{y}.$$

Тогда в качестве коэффициентов  $a_{k+1}$  можно взять, например, коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа степени  $n-1$  по узлам  $y_k = e^{-x_k} = e^{-\frac{k}{nm}}$ ,  $k = 1, \dots, n$  для функции

$\frac{g(y)}{y}$ . Для оценки погрешности при этом будет справедлива формула [6]

$$\left| \frac{\tilde{R}(y)}{y} \right| \leq \frac{\max_{y \in [e^{-\frac{1}{m}}, 1]} \left| \left( \frac{g(y)}{y} \right)^{(n)} \right|}{n!} \times \left| (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n) \right|$$

Вычислить коэффициенты  $a_k$  в формуле (2) можно решая СЛАУ относительно неизвестных  $a_k$  методом Гаусса

$$\sum_{k=1}^n a_k y_j^k = g(y_j), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3)$$

где

$$y_k = e^{-x_k} = e^{-\frac{k}{nm}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

**Алгоритм аппроксимации плотности распределения суммами экспонент в случае  $[a, b] = [0, 1]$ .**

Для аппроксимации заданной плотности распределения  $f(x)$  необходимо:

1. Задать количество узлов интерполирования и значение параметра  $m > 0$ .
2. Определить узлы интерполирования  $y_k$  вспомогательной функции  $g(y) = f(-m \ln y)$  по формуле (4).
3. Вычислить коэффициенты  $a_k$ , решая систему линейных алгебраических уравнений (3).
4. Записать аппроксимирующую функцию в виде формулы (1).

**Замечание 1.** В случае произвольного промежутка  $[a, b]$ , как отмечалось выше, достаточно применить приведенный алгоритм к функции  $\tilde{f}(x') = f(a + (b - a)x')$ , где  $x' \in [0, 1]$ , а затем вернуться к исходной переменной  $x = a + (b - a)x'$ .

**Замечание 2.** Значение параметра  $m$  определяется экспериментально для каждой аппроксимируемой функции  $f(x)$ .

В качестве распределений с «тяжелыми» хвостами возьмем распределения: Парето, логнормальное распределение, распределение Вейбулла.

Случай 1. Рассмотрим плотность распределения Парето

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{\alpha+1}, \quad x > \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – параметр формы,  $\beta$  – масштабный параметр [7], и на промежутке  $[0, 5]$  при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0,2$  построим аппроксимацию данной плотности.

Возьмем количество узлов интерполирования  $n = 3$ .

Аналитическое выражение аппроксимирующей функции имеет вид:

$$f_{\text{exp}}(x) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\alpha_k x} = a_1 e^{-\frac{x}{m}} + a_2 e^{-\frac{2x}{m}} + a_3 e^{-\frac{3x}{m}}. \quad (6)$$

Исходя из особенностей распределений с «тяжелыми» хвостами и с учетом (4), целесообразно выбирать значение  $m$  в границах  $0,1 \leq m \leq 1$ .

Путем подбора для данного распределения находим  $m = 0,3$ , при котором сумма экспонент приближает интерполяционные значения к исходным.

При  $n = 3$  и выбранных параметрах распределения погрешность аппроксимации  $R(x)$  имеет следующий вид.

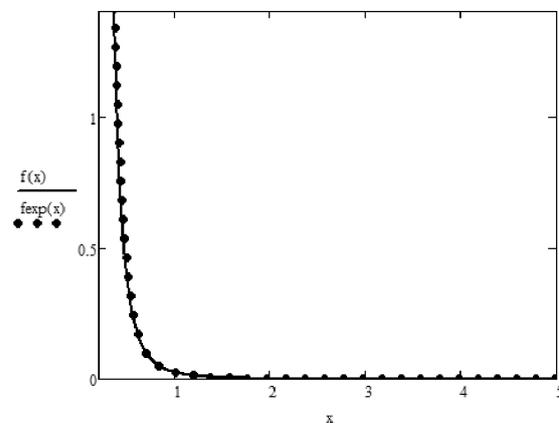


Рис. 1. Распределение Парето ( $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0,2$ ) и результат его аппроксимации

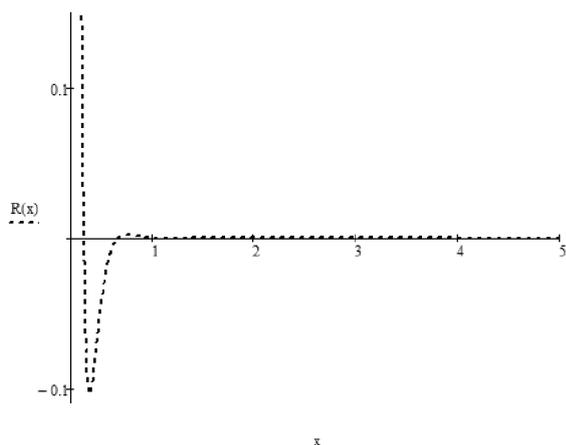


Рис. 2. График погрешности аппроксимации  $R(x)$  распределения Парето при  $n = 3$

Из рис. 2 видно, что осциллирующей погрешности вблизи начала координат можно пренебречь, т.к. область существования самого распределения задаётся условием  $x > \beta$ . Однако общую погрешность можно уменьшить, увеличивая значение  $n$ . Так, например, при  $n = 5$  график погрешности аппроксимации будет иметь вид рис.3.

Случай 2. Рассмотрим плотность логнормального распределения:

$$f(x) = \frac{e^{-0,5\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2x^2}}, \quad x > 0, \quad (7)$$

$$-\infty \leq \mu \leq \infty, \quad \sigma \geq 0,$$

где  $\sigma$  – параметр формы,  $\mu$  – масштабный параметр [7], и на промежутке  $[0, 5]$  при  $\mu = 0$ ,

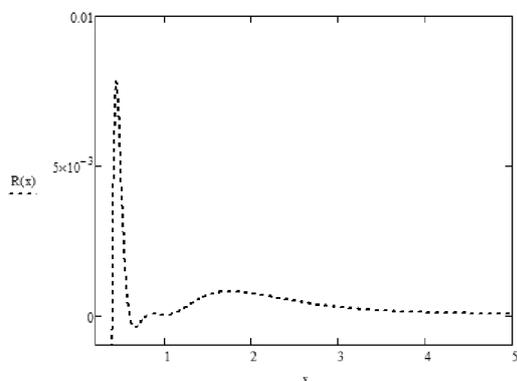


Рис. 3. График погрешности аппроксимации распределения Парето при  $n = 5$

$\sigma = 0,5$  построим аппроксимацию данной плотности.

При количестве узлов  $n = 5$  и параметре  $m = 0,5$  результат аппроксимации и погрешность аппроксимации характеризуются рис. 4 и рис. 5

Увеличение значения  $n$ , естественно, повышает точность аппроксимации, но и при  $n = 5$  результат можно считать вполне приемлемым для целей, обозначенных в начале статьи.

Случай 3. Рассмотрим плотность распределения Вейбулла

$$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad (8)$$

$$x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

где  $\alpha$  – параметр формы,  $\beta$  – масштабный параметр [7], и на промежутке  $[0, 5]$  при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$  построим аппроксимацию данной плотности.

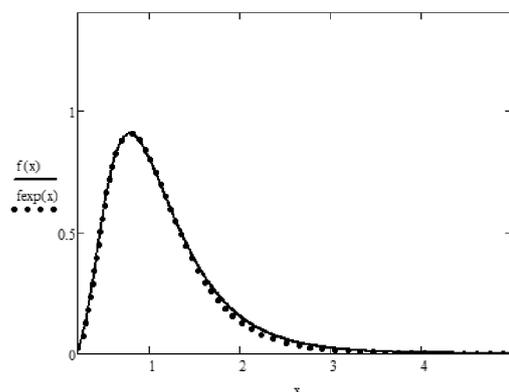


Рис. 4. Логнормальное распределение ( $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0,5$ ) и результат его аппроксимации

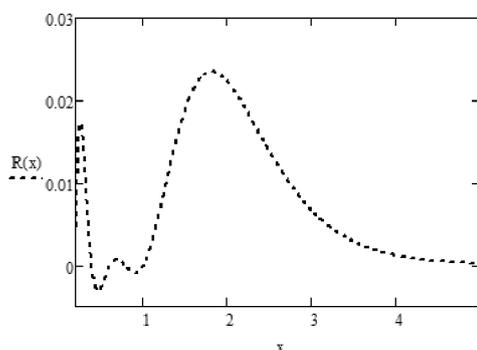


Рис. 5. График погрешности аппроксимации  $R(x)$  логнормального распределения при  $n = 5$

В силу негладкости аппроксимируемой функции в начале координат у аппроксимирующей функции следует ожидать осцилляций в окрестности точки 0. При  $n = 10$  и  $m = 0,3$  результаты аппроксимации и анализа погрешности аппроксимации выглядят следующим образом (рис.6).

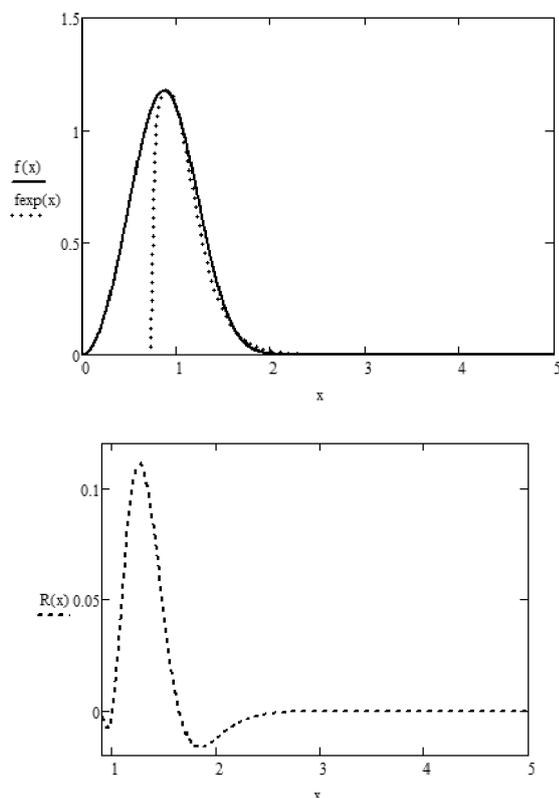


Рис. 6. График аппроксимирующей функции и погрешности аппроксимации  $R(x)$  для распределения Вейбулла ( $\alpha = 3, \beta = 1$ )

Если задача исследования заключается в анализе влияния именно «тяжелых» хвостов распределения, то окрестность вблизи нуля, где наблюдаются существенные осцилляции погрешности, следует исключить из рассмотрения.

При построении всех графиков учтено, что аппроксимирующее выражение для плотности должно удовлетворять условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Данный метод применим для аппроксимации неизвестных функций плотности распределения, когда аналитического выражения плотностей вероятности, характеризующих процессы поступления и обслуживания, записать не удастся, но существуют соответствующие гистограммы распределений.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В настоящее время актуальной проблемой при исследовании трафика мультисервисной сети является учет его самоподобных свойств, которые оказывают существенное влияние на характеристики узла обработки пакетов. Полученные аппроксимации типовых распределений с «тяжелыми» хвостами, которые являются одним из признаков наличия у трафика самоподобных свойств, позволяют аналитически исследовать характеристики СМО типа G/G/1, получаемые спектральным методом решения уравнения Линдли [3,8].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. / Под ред. Шелухина О.И., . – М.: Радиотехника, 2003, 480 с.
2. Шелухин О. И. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения / О. И. Шелухин, А. В. Осин, С. М Смольский. М. : Физматлит, 2008.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Prony G.R.B. Essai experemenal et analytique: sur les lois de la dilitabilite de fluids elastques et sur celles de la force expanslve de la vapore de l'eau et la vapore de l'alkool, a differentes temperatures. //J. de L'Ecole Polytechnique. –1795. – Т.1. –24-76.
5. Марпл С.П. Цифровой спектральный анализ и его приложения. –М. –Мир. –1990.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003, 632 с.
7. Лоу А.М., Кельтон В.Д. Имитационное моделирование. Классика CS. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2004, 848 с.
8. Чунахина Л.Р., Киреева Н.В. Построение функций распределения реального трафика с помощью кумулянтного анализа // ИКТ, Т. 1, №1. 2013. С. 33–36.

**Блатов И. А.** – д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и

**Blatov I. A.** – Doctor of Physics-math. Sciences, Professor of the dept. of the Higher mathematics Povolzhskiy State University of Telecom-

информатики (ПГУТИ). Тел. (846) 228-00-71.  
E-mail: blatow@mail.ru

**Карташевский В. Г.** – д. т. н., профессор кафедры мультисервисные сети и информационная безопасность ПГУТИ. Тел. (846) 333-13-13. E-mail: kartash@psati.ru

**Киреева Н. В.** – кандидат технических наук, доцент кафедры мультисервисные сети и информационная безопасность ПГУТИ. Тел.: (846) 339-11-67. E-mail: zeppelin@yandex.ru

**Чупахина Л. Р.** – аспирант кафедры мультисервисные сети и информационная безопасность ПГУТИ; Тел.: (846) 339-11-62. E-mail: garip4ik555@mail.ru

munications and Informatics (PSUTI), Tel. (846)228-00-71. E-mail: blatow@mail.ru

**Kartashevskiy V. G.** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the dept. of multiservice network and information security PSUTI. Tel. (846) 333-13-13. E-mail: kartash@psati.ru

**Kireeva N. V.** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the dept. of multiservice network and information security PSUTI. Tel.: (846) 339-11-67. E-mail: zeppelin@yandex.ru

**Chupakhina L. R.** – Post-graduate Student of the Department multiservice network and information security PSUTI, Tel.: (846) 339-11-62. E-mail: garip4ik555@mail.ru