УДК 08.13.18

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

И. И. Терновых

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.08.2013 г.

Аннотация. В статье рассматривается устойчивость одного дифференциального уравнения логического типа. На основе нечеткой производной вводятся понятия α -устойчивость, асимптотическая α -устойчивость.
Ключевые слова: характеристическая функция, нечеткая динамическая система, нечеткая производная, α -устойчивость.
Annotation. The stability of differential equation with fuzzy logic is considered. The fuzzy derivative is derived, applied to the solution of fuzzy system equation and derived α -stability and asymptotic α -stability.
Keywords: membership function, fuzzy dynamical system, fuzzy derivative, α -stability, asymptotic α -stability.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория устойчивости рассматривает точки равновесия систем и их динамическое поведение в окрестности этих точек. В течение пятидесяти лет после Ляпунова и Пуанкаре, ставших классиками в этой области, в проводимых исследованиях наблюдалось заметное продвижение. Благодаря работам Джорджа Биркхофа [5], В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [7] стало очевидным, что суть этой теории заключалась в самом понятии динамической системы. Под динамической системой мы будем понимать систему, описывающую математическую модель некоторого объекта, процесса или явления. В настоящее время теория устойчивости по-прежнему актуальна. Исследуя динамические системы, существующими в биологии, экономике и социологии, с использованием фундаментальных понятий из теории устойчивости Ляпунова или применяя топологические свойства, выведенными Пуанкаре, достоверность полученных результатов теряется, так как основная проблема заключается в том, что подобные системы практически всегда находится вне состояния равновесия, и претерпевают множество изменений, ведущих к отклонению от точки равновесия, что не позволяет в полной мере использовать результаты классической теории.

Теория нечетких множеств, появившаяся сравнительно недавно, представляет новый инструмент для моделирования поведения динамических систем, описывающих реальные процессы во времени. В данной работе исследуется устойчивость нечеткой динамической системы. В работе Де Гласса [1] сформулирован подход исследования нечетких динамических систем с заранее известными решениями нечеткой системы и их областью определения, используя в качестве эталона четкую модель динамического уравнения с заранее определенной областью решений. Нашей задачей является обобщить этот метод, сформулировать условия устойчивости (неустойчивости) при заведомо неизвестных решениях нечеткой динамической системы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЧЕТКИХ СИСТЕМАХ

Пусть X – представляется некоторое нечеткое функцией множество, тогда его нечеткое подмножество $A \subset X$ представляется функцией принадлежности $mu_\alpha : X \to I = [0,1] \in \mathbb{R}$. Семейство всех нечетких подмножеств на X обозначим как $P(X)$.

Слабым α -срезом нечеткого подмножества $A \in P(X)$ для $\alpha \in (0,1]$, называется обычное множество вида

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_\alpha(x) \geq \alpha\}.$$

На основе теории декомпозиции любое нечеткое подмножество $A \in P(X)$ может быть представлено системой своих α-срезов по формуле $A = V_{alpha}\{\alpha A_\alpha\}$.

Нечеткое подмножество R множества X^2 с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$ является нечетким отношением. Совокупность нечетких отношений на X будем обозначать $P(X^2)$.

Для нечетких отношений также можно определить понятие α-среза вида $R_\alpha = \{(x,y) \in \in X^2 : \mu_R(x,y) \geq \alpha\}$, при этом R_α является обычным бинарным отношением. Теорема декомпозиции также имеет место, т.е. $R = \bigvee_\alpha \{\alpha R_\alpha\}$.

Динамическое поведение непрерывной нечеткой системы определяется дифференциальным уравнением вида [5]:

$$x'(t) = x(t) \circ R, \tag{1}$$

где $x(t) \in P(X)$ – состояние системы в момент времени t, R – нечеткое отношение на множестве X с функцией принадлежности $\mu_R(u,y)$, определяющее переход в следующее состояние.

В терминах функции принадлежности (1) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_{x'(t)}(y) = \bigvee_u [\mu_{x(t)}(u) \bigwedge \mu_R(u,y)] (t \in \mathbb{R}_+), \tag{2}$$

Пусть $\alpha \in (0;1], R_\alpha$ – α-срез отношения R. Для каждого $u \in X$ множество образов обозначим

$$R_\alpha(u) = \{w \in : (u,w) \in R_\alpha\}, \tag{3}$$

Тогда R_α является функцией на X.

Пусть d определяет метрику в X, тогда потребуем для всех α множество R_α удовлетворяло следующим условиям [1]:

– R_α – компактное и непустое множество,

– $\exists k < 1 \forall (u_1, u_2)(d(R_\alpha(u_1), R_\alpha(u_2)) < k \cdot d(u_1, u_2))$.

Нечеткая система (1) для каждого $\alpha \in (0;1]$ имеет вид [1]:

$$x'_\alpha(t) = R_\alpha(x_\alpha(t)), \tag{4}$$

или иначе:

$$x'_\alpha(t) = \bigcup_{u \in X_\alpha(t)} R_\alpha(u). \tag{5}$$

Пусть x^0 – заданное начальное значение, тогда для всех $\alpha \in (0,1]$ существует такое отображение $f_\alpha : P(X) \to P(X)$, что

$$f_\alpha(x_\alpha^0, t) = x_\alpha(t) \tag{6}$$

Обобщая для всех α и положив $f(x^0,t) = \cup_\alpha f_\alpha(x_\alpha, t)$ и $x(t) = \cup_\alpha x_\alpha(t)$, получим следующее уравнение:

$$f(x^0, t) = x(t) \tag{7}$$

2. ТИПЫ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

Пусть M – замкнутое подмножество в X. Введем некоторые определения, основываясь на [7–10].

Определение 1. Функция $V : X \to \mathbb{R}$ является положительно определенной на множестве M в X тогда и только тогда, когда:

– V(x) – определена в окрестности множества $N \subset M$;

– $\forall u \in M(V(u) = 0)$;

– $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)(d(u,M) < \delta \to V(u) < \varepsilon)$;

– существует возрастающая и непрерывная функция $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $u \in N \setminus$ выполняются условия: $\xi(0) = 0$ и $\xi(d(u,M)) < V(u)$.

Заметим, что, так как M – замкнутое множество, то $N \setminus$ никогда не является пустым. Следовательно, существует такая константа $\eta > 0$, что имеет место следующая цепочка включений: $M \subset B[M,\eta] \subset N$, где

$$B[M,\eta] = \{x \in X : d(x,M) < \eta\} \tag{8}$$

Пусть V – положительно определенная функция в M. Построим такое множество

$$K(\gamma) = \{u \in N : V(u) \leq \gamma\} (\gamma \in \mathbb{R}_+), \tag{9}$$

что всегда возможно найти константу $\gamma = \inf\{V(u) : u \in S(M,\eta)\}$, что $K(\gamma) \subset N$, где $S(M,\eta) = \{x \in X : d(x,M) = \eta\}$.

На основе классическое определения устойчивости в смысле Ляпунова [7–8] и [11] получим следующее.

Определение 2. Подмножество $M \subset X$ называется устойчивым для нечеткой системы f вида (7), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)(u \in B(M,\delta) \to \\ \to \forall t \in \mathbb{R}_+ (f(u,t) \subset B(M,\varepsilon)).$$

Определение 3. Подмножество $M\ inX$ называется α-устойчивым для нечеткой системы f вида (7). если для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)(u \in B(M,\delta) \to \\ \to \forall t \in \mathbb{R}_+ (f_\alpha(u,t) \subset B(M,\varepsilon).$$

В терминах функции принадлежности определение 3 примет следующий вид.

Определение 3'. Подмножество $M \in X$ называется α-устойчивым тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M,\varepsilon)$ предполагает, что $\mu_{f(u,t)}(z) \le \alpha$ для всех $z \in B(M,\varepsilon)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 4. Подмножество $M \subset X$ называется α-притягивающим, если существует такая окрестность $N \subset M$, что для каждого $u \in N$, для любых последовательностей $\{t_n\}, t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и любой последовательности $\{z_n\}(z_n \in f_\alpha(u,t_n))$ имеет место $z_n \to z \in M$ при $n \to \infty$.

Данные определения можно сформулировать в терминах функции принадлежности.

Определение 4'. Подмножество $M \subset X$ называется α-притягивающим (аттрактор) если существует такая окрестность $N \subset M$, что для всех $u \in N$, для всей последовательности $\{t_n\}, t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и для всей последовательности $\{z_n\}$, такой, что $z_n \in \mu_{f(u,t_n)}(z_n) \ge \alpha$, тогда, $z_n \to z \in M$ при $n \to \infty$.

Определение 5. [1]. Подмножество $M \subset X$, которое одновременно является α-устойчивым и α-притягивающим, называется α-асимптотически устойчивым.

Критерий α-устойчивости для нечеткой системы (1) можно установить через понятия нечеткой производной вещественнозначной функции, как это сделано в работе [1]. Также будем опираться на труды классической теории дифференциальных уравнений [9].

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть f – нечеткая система, и пусть M – подмножество X. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V : M \to \mathbb{R}$, такая что

– $V(\cdot)$ – определена в некоторой окрестности $N \subset M$,

– $V(\cdot)$ – положительно определенная функция по отношению к M,

– $\sup D_\alpha V(u) \le 0$ для всех $u \in N$, тогда множество M является α-устойчивым.

Теорема 2 [1]. Пусть f – нечеткая система и $M \subset X$. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, что выполняется условие (1)–(2) из теоремы 1. а условие (3) имеет вид:

3') $\sup D_\alpha V(u) < 0$, для всех $u \in NM$

Тогда множество M является асимптотически α-устойчивым.

Теоремы 1 и 2 предполагают наличие предварительных знаний об эволюционном уравнении и об α-кривых. Однако эта информация чаще всего не является доступной, поэтому необходимо переформулировать критерий α-устойчивости таким образом, что более широкие знания об эволюционном уравнении не потребуются.

Воспользуясь теоремой из [1], фундаментальными понятия об устойчивости их [13], получим Теорему 3.

Теорема 3. Пусть нечеткая система определена в виде (1) и пусть $M \subset X$. Если существует дифференцируемая функция $V : X \to \mathbb{R}$, что выполняется условие (1)–(2) из Теоремы 1, а условие (3) имеет вид

3') $\sup\{\langle \Delta V(\cdot).z\rangle : z \in R_\alpha(u)\} \le 0$ (и соотв. < 0), для всех $u \in N \setminus M$, $\langle\rangle$ – скалярное произведение, тогда множество M является α-устойчивым (и соотв. асимптотически α-устойчивым).

Доказательство можно найти в [1].

Критерий α-устойчивости, предложенный в Теореме 3, по существу, основывается на взаимосвязи между ΔV и производной от V на всех α-кривых. Однако требуется непрерывная дифференцируемость функции V. Данное условие является ограничивающим ппри практическом использовании этой теоремы и поэтому предполагает более обобщенное видение этой теоремы.

Теорема 4. Пусть нечеткая система определена в виде (1) и пусть $M \subset X$. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, такая что выполняется условие (1)–(2) из Теоремы 1, а условие (3) имеет вид:

3') существует такая непрерывная функция $W : X \to \mathbb{R}$, что для $\forall u \in N \setminus M$

$$\sup\left\{ \lim_{t \to 0_+, \xi \to z} \inf \frac{V(u+t\xi) - V(u)}{t} : z \in R_\alpha(u) \right\} \le$$
$$\le -W(u)$$

(соотв. $< -W(u)$) для всех $u \in N - M$.

Тогда множество M – α-устойчивое (и соотв. асимптотически α-устойчивое).

Доказательство. Для всех $u \in N$ любая α-кривая q_α, проходящая через u является решением дифференциального отношения.

$$q'_\alpha(u,t) \in R_\alpha(q_\alpha(u,t))(t \in \mathbb{R}_+).$$

Пусть Φ_α^d – множество всюду дифференцируемых α-кривых, тогда для всех $q_\alpha \in \Phi_\alpha^d$ и для всех $u \in N$ существет такая непрерывная функция h, что $h(u) \in R_\alpha(u)$ и $q_\alpha{}' = h(q_\alpha)$. Так, (3) предполагает, что

$$\lim_{t \to 0_+, \xi \to z} \inf \frac{V(u+t\xi) - V(u)}{t} \le -W(u),$$

для всех $u \in N$.

Таким образом, получим

$$V(q_\alpha(u,t)) - V(u) \le -\int_0^t W(q_{alpha}(u,\tau))d\tau$$

и, соответственно,

$$\lim_{t\to 0_+} \inf \frac{V(q_\alpha(u,t)) - V(u)}{t} \le -W(u).$$

Итак, для всех $q_\alpha \in \Phi_\alpha^d$ верно неравенство $V(q_\alpha, u) \le -W(u)$.

Продолжая, как в Теореме 3, можно показать, что для всех $q_\alpha \in \Phi_\alpha$, $V(q_\alpha, u) < -W(u)$. Следовательно, $\sup D_\alpha V(u) \le -W(u)$. Применение Теоремы 1 и Теоремы 2 дополняет доказательство.

Определение 2 α-устойчивости предполагает, что α-устойчивость нечеткой системы вытекает из одинакового поведения всех α-кривых, по крайней мере, в окрестности множества $M \subset X$. На практике такого может и не быть. Это обуславливает необходимость такого понятия α-устойчивости, которое учитывает возможность иного поведения α-кривой.

Определение 6. Подмножество $M \subset X$ является частично α-устойчивым для нечеткой системы f, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)(u \in B(M,\delta) \to$$
$$\to \forall t \in \mathbb{R}_+ (f_\alpha(u,t) \cap B(M,\varepsilon) \ne \varnothing)).$$

В терминах функции принадлежности подмножество $M \subset X$ – частично α-устойчивое тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $u \in B(M,\delta)$, то существует $z \in B(M,\varepsilon)$, такое что $\mu_{f(u,t)}(z) > \alpha$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

На основе Теоремы 1 можно сформулировать следующее утверждение об α-устойчивости множества M, справедливость которого легко показать.

Теорема 5. Пусть f – нечеткая система , и пусть $M \in X$. Если существует полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, такая что выполняются условия (1)–(2) из Теоремы 1, а условие (3) имеет вид:

3’) $\forall u \in N \inf D_\alpha V(u) \le 0$,

Тогда множество M является частично α-устойчивым.

Доказательство. Так как для всех $u \in N \inf D_\alpha V(u) \le 0$, то продолжая, как в Теореме 1, мы можем показать, что существует некая такая α-кривая $q_\alpha \in \Phi_\alpha$, что $V(q_\alpha(u,t)) \le V(u)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Положительная определенность V предполагает, что для всех $\varepsilon > 0$ существует δ, что $d(u,M) < \delta$ предполагает, что $V(q_\alpha(u,t)) < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Более того, для всех λ существует такая $\varepsilon > 0$, что (см. Определение 1) $d(u,M) > \lambda$, предполагающая, что $V(u) > \varepsilon = \xi(\lambda)$, т.е. такая, что $d(u,M) < \lambda$ везде, где $V(u) < \varepsilon$.

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что $d(u,M) < \delta$, что предполагает, что $d(q_\alpha(u,t), M) < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что $u \in B(M,\delta$ предполагает, что $q_\alpha(u,t) \in B(M,\varepsilon)$, т.е. $f_\alpha(u,t) \cap B(M,\varepsilon) \ne \varnothing$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3 дает критерий α-устойчивости, который не требует особых знаний об эволюционных уравнениях нечеткой системы. Мы можем установить подобный результат для частичной α-устойчивости.

Теорема 6 [1]. Пусть нечеткая система определена через нечеткое отношение $R, M \subset X$. Если существует дифференцируемая функция $V : X \to \mathbb{R}$, что выполняются условия (1)–(2) из Теоремы 1, а условие (3) имеет вид:

3’) $\forall u \in N \inf\{\langle \Delta V, z\rangle : z \in R_\alpha(u)\} < 0$, тогда M является частично α-устойчивым.

Теорема 7. Пусть нечеткая система, определенная в виде (1) и множество $M \subset X$. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, что выполняются условия (1)–(2) из Теоремы 1, а условие (3) имеет вид:

3’) существует такая непрерывная функция $W : X \to \mathbb{R}_+$, что $\forall u \in N$

$$\inf\{\lim \inf_{t\to 0_+, \eta\to z} \frac{V(u+t\eta) - V(u)}{t} : z \in R_\alpha(u)\} <$$
$$< -W(u),$$

тогда множество M является частично α-устойчивым.

3. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим нечеткую систему вида (1) с нечетким отношением:

$$R_\alpha = \{(u,v) \in X^2 : (2+\alpha)\cdot u \le$$
$$\le v \le (5-2\alpha)\cdot u\}.$$

Эволюционное уравнение имеет вид:

$$f\alpha(u_0,t) = [u_0 \exp(5+$$
$$+2\alpha)t, u_0 \exp(-2-\alpha)t].$$

Функции $q_\alpha(u_0,t) = u_0 \exp(-at)$ являются устойчивыми непрерывно-дифференцируемыми α-траекториями при всех $\alpha \in [2+\alpha, 5-2\alpha]$.

Но также верно, что любые функции вида:

$$q_\alpha(u_0,t)=\begin{cases}u_0\exp(-a_1t),\ t<T;\\ u_0\exp(-a_1T-a_2(t-T)),\ t\geq T.\end{cases}$$

Для любых $a_1,a_2\in[2+\alpha,5-2\alpha]$ так же являются устойчивыми непрерывно-дифференцируемыми α-траекториями.

Применим Теоремы 1 и 2 к данному примеру и докажем α-устойчивость и асимптотическую α-устойчивость.

Пусть $V(u)=d(u,M)$, тогда производная имеет вид:

$$D_\alpha V(u)=\lim_{t\to 0_+}\frac{V(ue^{(-5+2\alpha)t},ue^{(-2-\alpha)t)-V(u)}}{t}.$$

Путем вычислений нетрудно доказать, что $\sup D_\alpha V(u)\leq 0$. Все условия теорем соблюдены, что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье сформулирваны критерии α-устойчивости и асимптотической α-устойчивости, а также получен критерий частичной α-устойчивости. На основе приведенного примера доказана справедливость Теоремы 1 и Теоремы 2. В дальнейшем будут предложены процедуры проверки устойчивости нечетких динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glas M.* Theory of fuzzy systems/ M. Glas // Fuzzy sets and systems. – 1983. – 10. – pp. 65–77.

2. *Ивохин Е.В.* Исследование динамики нечетких дискретных систем / Е.В. Ивохин, С.О. Волчков // System research & Information Technologies. – 2005. – 4. – pp. 94–105.

3. *Леденева Т.М.* Обработка нечеткой информации/ Т.М. Леденева. – Воронеж: ВГУ, 2006. – 233 с.

4. *Zadeh A.* Lotfi Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process/ A. Lotfi Zadeh // IEEE Transactions on systems, MAN, and Cybernetics, 1973. –vol. smc – 3, № 1.

5. *Birkhoff G.* Dynamical systems/ G. Birkhoff // Amer. Math.Soc.,Providence. – 1927. – vol.9. – pp. 15–57.

6. *Nemytskii V.* Qualitative Theory of Differential Equations/ V. Nemytskii, V. Stepanov. – Prinston.: Prinston Universe Press, 1960. – 423 pp.

7. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ И. Г. Петровский. –М.: Наука, 1964. – 272 с.

8. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве/Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн . – М.: Наука, 1970. – 536 с.

9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости/ Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

10. *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа/ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

11. *Терновых И.И.* Исследование устойчивости решений нечеткой динамической системы методом функций Ляпунова/ И. И. Терновых// Труды молодых ученых. В. :ВГУ, 2011. – Вып.2. – С. 14–17.

Терновых И. И. – аспирант факультета ПММ, ВГУ

Ternovykh I. I. – post-graduate student, Voronezh State University