

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ ГЕНЕРАТОР-ДВИГАТЕЛЬ

П. Э. Подборский\*, Э. Н. Подборский\*\*

\* *Саяно-Шушенский филиал Сибирского федерального университета*

\*\* *Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета*

**Поступила в редакцию 11.07.2013 г.**

**Аннотация.** Анализируются системы управления электромеханическими системами с квадратичным критерием оптимальности на примере электропривода постоянного тока одномассовой системы генератор-двигатель. Предложен критерий оптимальности и получена точная формула регулятора, позволяющего ограничить напряжение управления и все координаты. Раскрыты некоторые дополнительные возможности метода аналитического конструирования регуляторов, решена двухточечная краевая задача.

**Ключевые слова:** электропривод постоянного тока, электромеханическая система, двухточечная краевая задача, оптимальное управление, критерий оптимальности.

**Annotation.** Control of electromechanical systems with square-law cost function is analyzed on an example of the DC-drive for one-mass engine-generator system. The new optimum criterion is offered and the exact formula of a regulator is received, this allows restricting control signal and all state coordinates. Some additional possibilities an analytical design of controllers method are shown, a two points boundary problem is solved.

**Keywords:** DC-drive, electromechanical system, two points boundary problem, optimal control, cost function.

В начале 60-х годов прошлого века А.М. Летовым была опубликована теория об аналитическом конструировании регуляторов [1]. В первой части рассматривались квадратичные функционалы: с минимизацией энергии управления, а также с минимизацией энергии и скорости изменения энергии управления. Не накладывались ограничения типа неравенств на управляющий сигнал. Во второй части для тех же критериев оптимальности введено ограничение на управление типа неравенств. В третьей части приводились дополнительные математические выкладки более общего характера для задачи с минимизацией скорости изменения энергии управления. В последних двух частях минимизация квадратичных функционалов производится методом динамического программирования, что сводится в конечном итоге к решению уравнения Риккати.

Отметим небольшие ограничения данной теории:

– во всех случаях предполагалось решить задачу минимизации около нулевого заданного

значения выхода. То есть необходимо было из какого-либо начального значения вернуть систему в начало координат, чтобы в конце переходного процесса все координаты были равны нулю;

– не рассматривалось решение задачи оптимизации как задачи программного управления с получением сигнала оптимального управления в виде функции времени;

– не упоминалось о возможном наличии комплексных корней в характеристическом полиноме системы;

– предполагалось бесконечное время регулирования с нулевыми граничными условиями на правом конце, на этом основании затем обнулялась половина постоянных в формуле решения для фазовых и сопряженных координат.

Рассмотрим электропривод постоянного тока независимого возбуждения с неизменным потоком возбуждения. Питание двигателя осуществляется по цепи якоря от генератора постоянного тока (система Г-Д) с возбуждением, например, от тиристорного возбудителя. Математическая модель данной одномассовой системы может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} K_B \cdot U_y = R_B \cdot i_B + L_B di_B / dt, \\ K_\Gamma \cdot i_B = R_\alpha \cdot i_\alpha + L_\alpha di_\alpha / dt + C \cdot \omega, \\ Jd\omega / dt = M, \end{cases} \quad \begin{cases} F_{\lambda_0} - \frac{d}{dx} F_{\dot{\lambda}_0} = 0, \\ F_{\lambda_1} - \frac{d}{dx} F_{\dot{\lambda}_1} = 0, \\ F_{\lambda_2} - \frac{d}{dx} F_{\dot{\lambda}_2} = 0, \end{cases}$$

где  $i_B$ ,  $i_\alpha$ ,  $\omega$  – ток возбуждения, ток якоря и угловая скорость одномассовой системы,  $U_y$  – напряжение управления,  $K_B$ ,  $K_\Gamma$  – коэффициенты передачи возбудителя и генератора,  $R_B$ ,  $R_\alpha$ ,  $L_B$ ,  $L_\alpha$  – активные сопротивления и индуктивности обмоток возбудителя и якоря,  $J$  – приведенный момент инерции одномассовой системы,  $C$  – конструктивная постоянная,  $M = C \cdot i_\alpha$  – момент одномассовой системы.

Для устранения первого ограничения в качестве возможного критерия оптимальности будем исследовать квадратичный функционал следующего вида:

$$J = \int_0^t \left( q_i (z_i - x_i)^2 + r (z_u - u)^2 \right) dt,$$

где  $x_i = i_B$ ,  $i_\alpha$ ,  $\omega$ ;  $u = U_y$ ;  $z_i$ ,  $z_u$  – желаемые значения выходных координат и управления;  $q_i$ ,  $r$  – весовые коэффициенты,  $i = 0, 1, 2$ .

Видно, что данный критерий подразумевает оптимизацию не только около нуля, а около любого желаемого значения, что, в частности, позволяет моделировать процессы пуска, реверса и торможения. В дальнейшем будем исследовать только процессы пуска до номинальной скорости.

Для устранения второго ограничения будем искать оптимальное управление в функции времени.

Известно, что для решения задачи на безусловный экстремум с классическим функционалом  $J = \int_0^\infty F(y, y', x) dx$  нужно решить уравнение

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Поэтому в нашем случае для решения задачи на условный экстремум нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} F_{x_0} - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}_0} = 0, \\ F_{x_1} - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}_1} = 0, \\ F_{x_2} - \frac{d}{dx} F_{\dot{x}_2} = 0, \\ F_u - \frac{d}{dx} F_{\dot{u}} = 0, \end{cases}$$

где

$$F = q_0 (z_0 - x_0)^2 + q_1 (z_1 - x_1)^2 + q_2 (z_2 - x_2)^2 + r (z_u - u)^2 + \lambda_0 (\dot{x}_0 + a_{00}x_0 - bu) + \lambda_1 (\dot{x}_1 - a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - a_{21}x_1).$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} F_{x_0} &= 2q_0x_0 + a_{00}\lambda_0 - a_{10}\lambda_1 - 2q_0z_0; \\ F_{\dot{x}_0} &= \lambda_0 \Rightarrow 2q_0x_0 + a_{00}\lambda_0 - a_{10}\lambda_1 - 2q_0z_0 - \frac{d}{dt}\lambda_0 = 0, \\ F_{x_1} &= 2q_1x_1 + a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 - 2q_1z_1; \\ F_{\dot{x}_1} &= \lambda_1 \Rightarrow 2q_1x_1 + a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 - 2q_1z_1 - \frac{d}{dt}\lambda_1 = 0, \\ F_{x_2} &= 2q_2x_2 + a_{12}\lambda_1 - 2q_2z_2; \\ F_{\dot{x}_2} &= \lambda_2 \Rightarrow 2q_2x_2 + a_{12}\lambda_1 - 2q_2z_2 - \frac{d}{dt}\lambda_2 = 0, \\ F_u &= -2r(z_u - u) - b\lambda_0; \\ F_{\dot{u}} &= 0 \Rightarrow u = z_u + \frac{b}{2r} \cdot \lambda_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая, что остальные три уравнения системы, записанные относительно вспомогательного множителя  $\lambda$ , представляют собой математическую модель объекта управления, в результате имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = -a_{00}x_0 + b \left( z_u + \frac{b}{2r} \cdot \lambda_0 \right), \\ \dot{x}_1 = a_{10}x_0 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1, \\ \dot{\lambda}_0 = 2q_0x_0 + a_{00}\lambda_0 - a_{10}\lambda_1 - 2q_0z_0, \\ \dot{\lambda}_1 = 2q_1x_1 + a_{11}\lambda_1 - a_{21}\lambda_2 - 2q_1z_1, \\ \dot{\lambda}_2 = 2q_2x_2 + a_{12}\lambda_1 - 2q_2z_2. \end{cases} \quad (2)$$

Решением данной системы будут функции времени

$$\begin{aligned} x_i &= C_1 e_{i,1} e^{p_1 t} + \dots + C_6 e_{i,6} e^{p_6 t} + K_i, \\ \lambda_i &= C_1 e_{i+3,1} e^{p_1 t} + \dots + C_6 e_{i+3,6} e^{p_6 t} + K_{i+3}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $e_{i,j}$ ,  $p_j$  – собственные векторы и собственные значения матрицы системы (2),  $K_i$ ,  $K_{i+3}$  – коэффициенты,  $C_j$  – постоянные, определяемые из граничных условий.

Для устранения третьего ограничения прием весовые коэффициенты при токах возбуждения и якоря равными нулю, то есть будем минимизировать квадрат отклонения скорости и энергии управления. В результате:

$$J = \int_0^t \left( q_2 (z_2 - x_2)^2 + r (z_u - u)^2 \right) dt.$$

Это приводит для данного объекта управления к наличию комплексных корней в математической модели системы (2). Комплексные корни приведут к комплексным решениям, а нужно получить действительные величины зависимостей во времени тока возбуждения, тока якоря и скорости. Для этого при помощи разложения экспоненты по тригонометрическим функциям каждое комплексное решение, соответствующее паре комплексных сопряженных корней, заменим двумя действительными решениями, т.е. действительной и мнимой частью одного из корней. В нашем случае получилось два действительных корня и две комплексных сопряженных пары. То есть, имеем решение:

$$\begin{aligned} x_i &= C_1 e_{i,1} e^{p_1 t} + C_2 e_{i,2} e^{p_2 t} + \\ &+ C_3 e_{i,3} e^{\alpha_3 t} \cos \beta_3 t + C_4 e_{i,4} e^{\alpha_3 t} \sin \beta_3 t + \\ &+ C_5 e_{i,5} e^{\alpha_5 t} \cos \beta_5 t + C_6 e_{i,6} e^{\alpha_5 t} \sin \beta_5 t + K_i, \\ \lambda_i &= C_1 e_{i+3,1} e^{p_1 t} + C_2 e_{i+3,2} e^{p_2 t} + \\ &+ C_3 e_{i+3,3} e^{\alpha_3 t} \cos \beta_3 t + C_4 e_{i+3,4} e^{\alpha_3 t} \sin \beta_3 t + \\ &+ C_5 e_{i+3,5} e^{\alpha_5 t} \cos \beta_5 t + C_6 e_{i+3,6} e^{\alpha_5 t} \sin \beta_5 t + K_{i+3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку начальные условия объекта управления, как правило, известны, а начальные условия сопряженной системы неизвестны, то в [1] часть постоянных  $C_j$  при неустойчивых корнях (3) или (4) принимаются равными нулю. Тогда остальные постоянные можно найти, например, из начальных условий объекта управления. Это предполагает бесконечное время регулирования с нулевыми значениями координат на правом конце. Покажем, как можно обойти это последнее четвертое ограничение.

Предположим, что на координаты системы в конечный момент времени не накладывается никаких ограничений, то есть решается задача со свободным правым концом. Тогда на правом конце граничные условия для сопряженных координат будут нулевыми (см. [2], стр. 87). Таким образом, чтобы найти все постоянные времени в (3) или (4), необходимо:

- выбрать время регулирования  $T$ , которое необязательно равно бесконечности;
- в первую половину уравнений системы (3) или (4) подставить время начала регулирования (как правило, это время равно нулю) и граничные условия объекта управления на левом конце;
- во вторую половину уравнений системы (3) или (4) подставить время  $T$  и нулевые граничные условия сопряженной системы на правом конце;
- решить полученную систему относительно  $C_j$ .

Далее по (1) определяем оптимальное управление.

На рис. 1 показаны переходные процессы данной оптимальной системы при  $q_2 = 1$ ,  $r = 0.1$ . Видно, что для объекта управления любого порядка решается задача не только перевода в начало координат, но и перевода из любого начального в любое заданное значение. При этом оптимальное управление получается в виде функции времени при наличии не только действительных, но и комплексных корней в математической модели.

Возможность форсирования напряжения управления в системе Г-Д позволяет ограничить входной сигнал при помощи соответствующего члена функционала без использования нелинейных ограничений типа неравенств. Минимизация квадрата отклонения скорости приводит к перерегулированию по току возбуждения, которое обычно недопустимо и снимается при помощи отсечки. Ток якоря намного превышает максимально допустимое значение, что также требует применение отсечки. Введение таких нелинейностей приводит к отходу от оптимальности.

Примем весовые коэффициенты при токе якоря и скорости равными нулю, то есть будем минимизировать квадрат отклонения тока возбуждения и энергии управления. В результате:

$$J = \int_0^t \left( q_0 (z_0 - x_0)^2 + r (z_u - u)^2 \right) dt.$$

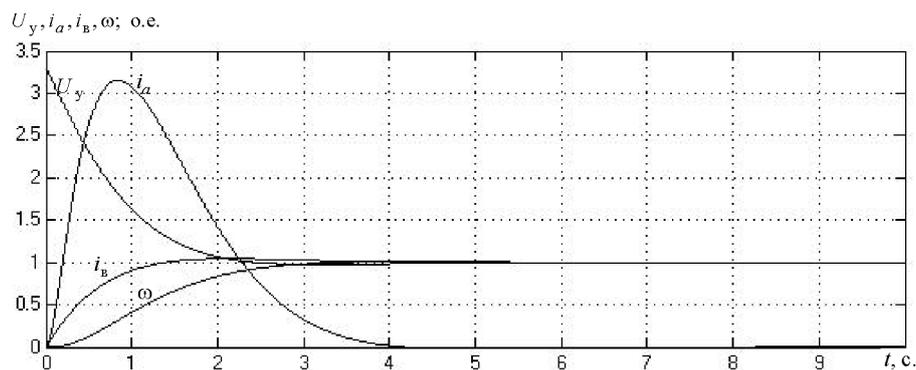


Рис. 1. Переходные процессы системы с минимизацией квадрата отклонения скорости

Заметим, что в этом случае собственными значениями системы (2) для данного объекта управления оказались действительные числа, то есть ее решением будут функции времени (3). Далее находим вышеописанным способом постоянные  $C_j$  и оптимальное управление.

На рис. 2 показаны переходные процессы данной оптимальной системы при  $q_0 = 1$ ,  $r = 0.1$ . Видно, что минимизация квадрата отклонения тока возбуждения обеспечивает наискорейшее достижение этой величины номинального значения при небольшом перерегулировании в 2 %. То есть, нет необходимости вводить дополнительные нелинейности для ее отсечки. Если такое небольшое перерегулирование необходимо снять, то дополнительная отсечка не приведет к значительному отходу от оптимальности. Также косвенным образом обеспечивается и оптимальный пуск до номинальной скорости. А возможность форсирования напряжения управления ограничивает входной сигнал также без использования нелинейных ограничений типа неравенств. Но ток якоря снова намного превышает максимально допустимое значение, что все же требует применение отсечки.

Примем весовые коэффициенты при токе возбуждения и скорости равными нулю, то есть будем минимизировать квадрат отклонения тока якоря и энергии управления. В результате:

$$J = \int_0^t \left( q_1 (z_1 - x_1)^2 + r (z_u - u)^2 \right) dt.$$

Проанализируем данный критерий. Минимизация квадрата отклонения тока якоря от максимально допустимого значения  $z_1$  даст наиболее быстрое достижение током якоря максимальной величины в начале переходного процесса при перерегулировании менее 2 %. Быстрее достичь максимального значения можно только, увеличивая перерегулирование, в нашем случае считаем кратковременное превышение максимально значения на 2 % приемлемым. В тех случаях, когда превышать максимальный уровень нельзя даже на небольшую величину и маленький промежуток времени, можно ввести дополнительную аварийную отсечку, что будет незначительным отходом от оптимальности. Ограничивать максимально допустимое напряжение генератора будем, ис-

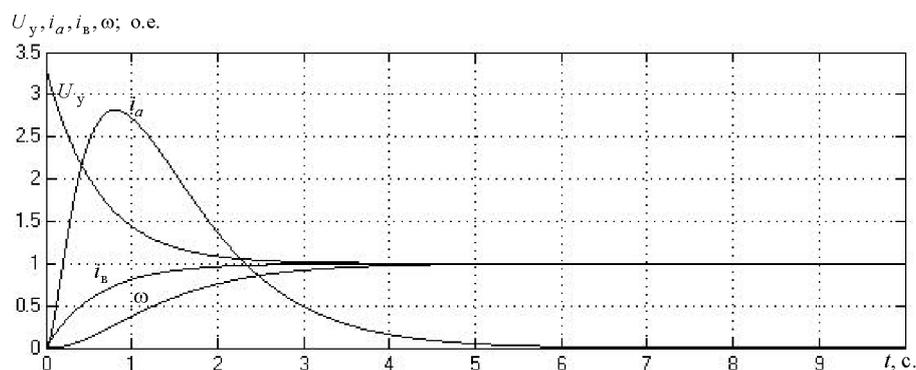


Рис. 2. Переходные процессы системы с минимизацией квадрата отклонения тока возбуждения

пользуя максимальные возможности линейных систем, т.е. вводя минимизацию квадрата отклонения энергии управления от номинального значения  $z_u$ , но, не используя нелинейные отсечки. Введем десятикратное форсирование напряжения генератора при помощи весовых коэффициентов  $q_1 = 1$ ,  $r = 0.01$ .

На рис. 3 показаны переходные процессы в такой системе. Проанализируем полученные результаты. Оптимальные процессы при ограничении на ток якоря по идее должны состоять из трех участков, в начале – максимально быстрое достижение током максимального значения, далее – движение на максимальном токе и в конце – максимально быстрый спад тока до нулевого значения. На первом участке необходимо подавать сначала положительное максимально допустимое напряжение, при котором скорость нарастания тока возрастает. Затем подавать отрицательное максимально допустимое напряжение, при котором скорость нарастания тока убывает. Здесь мы отходим от оптимальности, ограничивая это напряжение не нелинейностями, а при помощи минимизации

квадрата отклонения энергии управления. Однако это вполне оправдано, т.к. незначительно влияет на время переходного процесса при некоторой экономии этой энергии. Второй участок движения на максимальном токе можно считать также обеспечивается расчетом линейных систем. А вот третий участок обеспечить без введения нелинейностей невозможно, т.к. данный критерий оптимальности держит ток на максимальном значении и после достижения скорости номинального значения, что обеспечивает дальнейший разгон двигателя.

Ввести в функционал член, отвечающий за минимизацию квадрата отклонения скорости, приводит к плохим результатам, т.к. система будет выбирать среднее между движением при токе ниже максимального значения и превышением скорости номинального значения. Однако обратим внимание на кривую тока возбуждения. На эту координату обычно накладывается ограничение. Поэтому при достижении током возбуждения, а значит и ЭДС генератора номинального значения (равного обычно входному напряжению двигателя, соответствующе-

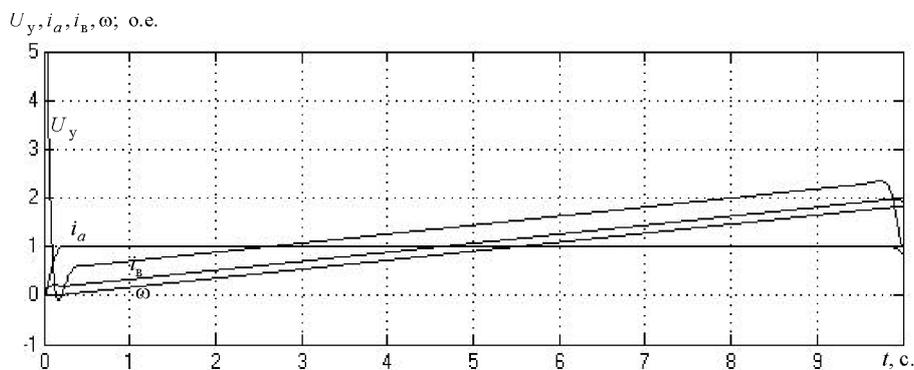


Рис. 3. Переходные процессы системы с минимизацией квадрата отклонения тока якоря

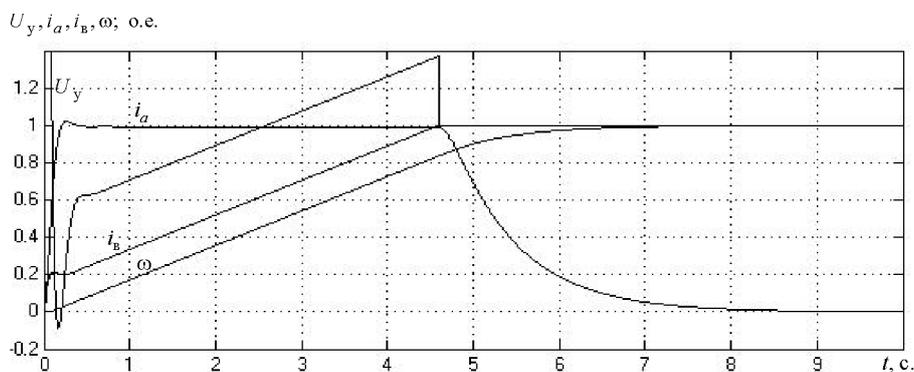


Рис. 4. Переходные процессы оптимальной системы Г-Д

му желаемому значению скорости) следует ввести отсечку, либо переключить входной сигнал на желаемое установившееся значение. Такие действия сделают процессы на третьем участке оптимальными. На рис. 4 показаны соответствующие переходные процессы.

Таким образом, при помощи расчета линейных систем имеем точную аналитическую формулу, определяющую оптимальное управление электроприводом при учете ограничения на ток якоря и входной сигнал. Незначительный отход от оптимальности будет в связи с небольшим перерегулированием по току якоря и небольшой минимизацией энергии управления. А при достижении током возбуждения номинального значения необходимо переключить входной сигнал на номинальное значение напряжения двигателя, что легко реализовать. Это ограничит

в конце переходного процесса ток возбуждения, что делает оптимальным изменение этой величины и автоматически ограничивает и делает оптимальной также и скорость. В процессе исследования также несколько расширена теория аналитического конструирования регуляторов, особенно в плане точного решения двухточечной краевой задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов [текст] / А.М. Летов // Автоматика и телемеханика. – 1960. Т. 1 – № 4. – С. 436 – 441; – № 5. – С. 561 – 568; – № 6. – С. 661 – 665; – 1961. Т. 22 – № 4. – С. 425 – 435; – 1962. – Т. 23 – № 11. – С. 1405 – 1413.
2. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа [текст] / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

**Подборский Павел Эдуардович** – к.т.н., доцент кафедры ГГЭЭС, Саяно-Шушенский филиал Сибирского федерального университета. E-mail: panpodpe@mail.ru.

**Podborski Pavel** – Sayano-Shushensky branch of Siberian federal university, associate professor of HHEES chair, Dr.-ing, home address: Druzhbi Narodov 3-27, Abakan, Russia, 655016, business address: post office box 39, Chermushki 46, Sayanogorsk, Russia, 655619. E-mail: panpodpe@mail.ru

**Подборский Эдуард Николаевич** – к.т.н., доцент кафедры ЭЭ, Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета, E-mail: panpoden@mail.ru.

**Podborski Eduard** – Khakass technical institute – branch of Siberian federal university, associate professor of EE chair. E-mail: panpoden@mail.ru