УДК 519.112.71

ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

О. А. Медведева, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.07.2013 г.

Аннотация. В работе рассматривается многокритериальная задача о назначениях. Предлагается алгоритм решения, в основе которого лежит переход к двойственной задаче с последующим использованием метода Удзавы. Предлагается способ формирования функции Лагранжа, позволяющий не решать на каждом этапе задачу о назначениях, что существенно упрощает алгоритм решения.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача о назначениях, многокритериальная задача, двойственная задача, алгоритм решения.

Annotation. In the paper the multicriteria assignment problem is considered. The solution algorithm where translation to a dual problem is assumed as a basis is offered. Udzava method is used to tackle the given problem. This paper introduces the way of Lagrange function formation, allowing not to solve an assignment problem at each stage that significantly simplifies the decision algorithm.

Keywords: discrete optimisation, assignment problem, multicriterion problem, dual problem, solution algorithm.

Многокритериальная задача о назначениях возникает, например, при комплектовании штатов на нескольких предприятиях одновременно. Как правило, при этом каждое предприятие стремится минимизировать затраты, связанные с приёмом на работу.

Рассмотрим математическую формализацию задачи.

Пусть имеется K предприятий ($k = 1,...,K$), на каждом из которых существует определённый набор вакансий (работ) ($j = 1,...,n_k$). Имеется m претендентов для назначения на предложенные работы ($i = 1,...,m$). Кроме того, для каждого предприятия заданы матрицы затрат $C_k = (c_{i\,j}^k) \geq 0$, связанные с назначением i-ого претендента на j-ую работу на k-ом предприятии. Требуется распределить претендентов по рабочим местам так, чтобы каждый нанятый претендент занял одно место, каждое место было занято одним претендентом и так, чтобы связанные с этим распределением затраты были минимальными. При этом возможна ситуация, в которой требуется минимизировать суммарные затраты. В этом случае задача сводится к обычной задаче о назначениях [1]. Далее рассматривается ситуация, когда требуется минимизировать затраты каждого из K предприятий. Один из вариантов был предложен в [2]. При этом на каждом этапе алгоритма необходимо решать задачу о назначениях, что обременительно в случае большого размера задачи. В данной работе предложен другой вариант формирования функции Лагранжа, что дало возможность существенно упростить алгоритм решения.

Обозначим через $n = n_1 + n_2 + ... + n_K$ - общее число работ на всех предприятиях. Рассмотрим для простоты закрытую задачу о назначениях ($m = n$).

Для получения математической записи задачи можно ввести переменные следующим образом:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ - й предент назначается} \\ \text{на } j \text{ - е место на } k \text{ - е предприятие;} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n_k},\ k = \overline{1, K}.$

Математическая формализация задачи при этом выглядит следующим образом

$$\mu \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_1} c_{ij}^1 x_{ij}^1 - \mu \leq 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_2} c_{ij}^2 x_{ij}^2 - \mu \leq 0,$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_K} c_{ij}^K x_{ij}^K - \mu \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1, \forall j = \overline{1, n_k}, \forall k = \overline{1, K},$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{k} = 1, \forall i = \overline{1, n},$$

$$x_{ij}^{k} = \{0,1\}, \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}, \forall k = \overline{1, K}.$$

Здесь $L_k(X)$ – затраты k-ого предприятия, $k = \overline{1, K}$.

Для обеспечения равномерности затрат предприятий вместо многокритериальной задачи рассмотрим задачу с целевой функцией вида:

$$\min \left\{ \max \left(L_1(X), L_2(X), ..., L_K(X) \right) \right\}.$$

Данный критерий оптимальности позволяет минимизировать максимальную величину затрат, теряемых при выборе неверного решения.

Введем новую переменную $\mu = \max \big(L_1(X), L_2(X), ..., L_K(X) \big)$. Заметим, что $L_i(X)$, $i = \overline{1, K}$, принимают неотрицательные значения (Следовательно, можно считать, что переменная $\mu \geq 0$. Кроме того, через S обозначим множество x_{ij}^{k}, удовлетворяющих ограничениям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1, \quad k = \overline{1, K},\ j = \overline{1, n_k},$$

$$x_{ij}^{k} = \{0,1\},\ i = \overline{1, n}, k = \overline{1, K},\ j = \overline{1, n_k}.$$

Задача при этом примет вид:

$$\mu \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1} c_{ij}^{1} x_{ij}^{1} - \mu \leq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{n}_{ij}^{2} x_{ij}^{2} - \mu \leq 0,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_K} \tilde{n}_{ij}^{K} x_{ij}^{K} - \mu \leq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{k} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_{ij}^{k} \in S, \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}, j = \overline{1, n_k},$$

$$\mu \geq 0.$$

Для решения данной задачи в дальнейшем предполагается использовать двойственный алгоритм. С этой целью рассмотрим функцию Лагранжа, которая для данной задачи может быть записана в виде:

$$\Phi(x, \mu, y, v) =$$

$$= \mu + \sum_{k=1}^{K} y_k \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} - \mu \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{k} - 1 \right),$$

$$y \geq 0,\ v - \forall, x \in S,\ \mu \geq 0\ .$$

В результате исходная задача переписывается следующим образом

$$\min_{\substack{x \in S \\ \mu \geq 0}} \max_{y \geq 0, v - \forall} \Phi(x, \mu, y, v),$$

двойственная к ней имеет вид

$$\max_{y \geq 0, v - \forall} \min_{\substack{x \in S \\ \mu \geq 0}} \Phi(x, \mu, y, v) = \max_{y \geq 0, v - \forall} \omega(y, v).$$

Схема двойственного алгоритма Удзавы [3, 4] для решения подобных задач выглядит следующим образом:

Шаг 0. Задать начальные значения $y^0 \geq 0, v^0, N = 0.$

Шаг 1. Найти решение задачи

$$\Phi(x, \mu, y^N, v^N) \to \min_{x \in S, \mu \geq 0}.$$

Шаг 2. Проверить X^{N+1}, полученный на шаге 1, на останов. Если тест на останов выполнен, то выписать ответ $X^* = X^{N+1}$.

Шаг 3. Вычислить значения двойственных переменных $\left(\dfrac{Y}{V} \right)^{N+1} \in R^{K+n}$ по формулам $\left(\dfrac{Y}{V} \right)^{N+1} = \left(\dfrac{Y}{V} \right)^{N} + \alpha_N \widehat{\nabla} \omega(y^N, v^N)$, где через $\widehat{\nabla} w$ обозначено соответствующее значение субградиента двойственной функции $\omega(\cdot)$.

Увеличить N на единицу. Перейти к шагу 1.

Для реализации вычислительной схемы преобразуем функцию Лагранжа следующим образом

$$\Phi(x, \mu, y, v) = \mu - \sum_{k=1}^{K} y_k \mu - \sum_{i=1}^{n} v_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} y_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} + \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{k} =$$

$$= \mu(1 - \sum_{k=1}^{K} y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} (y_k c_{ij}^{k} + v_i) x_{ij}^{k} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} v_i, y \geq 0,\ v - \forall\ , x \in S, \quad \mu \geq 0.$$

В результате на первом шаге алгоритма при фиксированных y и ν решаются следующие задачи:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k}(y_k c_{ij}^k + v_i)x_{ij}^k \to \min_{x\in S}, \qquad (1)$$

$$2.\ \mu(1-\sum_{k=1}^{K} y_k) \to \min_{\mu\ge 0}. \qquad (2)$$

Задача (1) может быть переписана в виде

$$\sum_i\sum_j\sum_k d_{ij}^k x_{ij}^k \to \min$$

при ограничениях (1)

$$\sum_i x_{ij}^k = 1,$$

$$x_{ij}^k = \{0,1\}, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}, \forall k = \overline{1,K},$$

где $d_{ij}^k = y_k c_{ij}^k + v_i$.

Решение данной задачи, очевидно, ищется следующим образом.

1. Фиксируем индексы j^0 и k^0, $j^0 \in \{1,\dots,n\}$, $k^0 \in \{1,\dots,K\}$;

2. Ищем $\min T_i[(d_\downarrow(ij_\downarrow 0)^\uparrow(k_\downarrow 0))] = d_\downarrow(lj_\downarrow 0)^\uparrow(k_\downarrow 0)$;

3. Положим $x_{lj_0}^{k_0} = 1,\ x_{lj}^k = 0,\ j \ne j_0,\ k \ne k_0$.

Заметим, что в силу определения переменной μ справедливы ограничения

$$0 \le \mu \le \max(L_1(X^N), L_2(X^N),\dots,L_K(X^N)).$$

Таким образом, задача (2) решается следующим образом:

$$\begin{gathered}\mu^N = 0,\ \text{если } \sum_{k=1}^{K} y_k^N < 1,\\ \mu^N - \forall,\ \text{если } \sum_{k=1}^{K} y_k^N = 1,\\ \mu^N = \max(L_1(X^N), L_2(X^N),\dots,L_K(X^N)),\\ \text{если } \sum_{k=1}^{K} y_k^N > 1.\end{gathered} \qquad (3)$$

В результате алгоритм решения исходной задачи можно описать схемой вида:

Модельная схема алгоритма

1. Ввести начальные данные $y^0 \ge 0, v^0$, $N = 0, \alpha_N = \beta_N = \dfrac{1}{N+1}$.

2. Решить задачу (1).

3. Проверить, являются ли полученные матрицы назначений $X_k^N, k = \overline{1,K}$ допустимыми в исходной задаче. Т.е. проверить выполнение равенств

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{kN} - 1\right| = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Если равенства выполняются, то X_k^N, $k = \overline{1,K}$, являются решениями задачи, в противном случае перейти к пункту 4.

4. Вычислить μ по формулам (3).

5. Пересчитать значения двойственных переменных по формулам

$$y^{N+1} = \left[y^N + \alpha_N(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_k} c_{ij}^k x_{ij}^{kN} - \mu^N)\right]^+,$$

$$v^{N+1} = v^N + \beta_N(\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}^{kN} - 1),$$

$$i = \overline{1,n}.$$

Увеличить N на единицу. Перейти к пункту 2.

Вычислительный эксперимент показал целесообразность использования данного алгоритма для получения приближенного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгина О. А.* Использование задачи о назначениях при решении проблемы формирования штатов / О. А. Малюгина, Г. Д. Чернышова // Вестник факультета прикл. мат., информ. и мех. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2010. — Вып. 8. — С. 141–148.

2. *Медведев С. Н.* Использование двойственных методов для решения трёхиндексной задачи о назначениях / С. Н. Медведев, О. А. Медведева, Г. Д. Чернышова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Серия : Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2011. – № 2. – С. 32–35.

3. *Arrow K. J.* Studies in linear and non-linear programming / Kenneth J. Arrow, Leonid Nurwicz, Hirofumi Uzawa. — Stanford University Press: Stanford, California, 1958. – 326 с.

4. *Мину М.* Математическое программирование: теория и алгоритмы / М. Мину [Пер. с фр. А. И. Штерна]. – М.: Наука, 1990. — 488 с.

Медведева Ольга Александровна – аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета ПММ, Воронежский государственный университет. Тел.: 8 904 214 94 45. E-mail: romashka16.12@mail.ru

Medvedeva Olga A. – post-graduate student, Voronezh State University, 8 904 214 94 45. E-mail: romashka16.12@mail.ru

Медведев Сергей Николаевич – аспирант кафедры математического и прикладного анализа факультета ПММ, Воронежский государственный университет. Тел. 8 906 671 62 05. E-mail: S_N_Medvedev@mail.ru

Чернышова Галина Дмитриевна – доцент кафедры Математических методов исследования операций факультета ПММ, кандидат технических наук, Воронежский государственный университет. Тел. 8 903 854 70 78. E-mail: chern@vsau.ru

Medvedev Sergey N. – post-graduate student, Voronezh State University, 8 906 671 62 05. E-mail: S_N_Medvedev@mail.ru

Tchernyshova Galina D. – docent, Cand. Tech. Sci., Voronezh State University, 8 903 854 70 78. E-mail: chern@vsau.ru