УДК УДК 517.977

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

П. А. Лакрисенко

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 01.06.2013 г.

Аннотация. Рассматривается система Лотки-Вольтерры с переключениями. Предполагается, что переключения происходят между двумя подсистемами, причём решения каждой из подсистем ограничены. С помощью специального выбора закона переключения и наложения ограничений на коэффициенты подсистем достигается асимптотическая устойчивость положения равновесия системы с переключениями в целом в положительном ортанте.
Ключевые слова: системы с переключениями, асимптотическая устойчивость, системы дифференциальных уравнений, биологические системы.
Annotation. The Switched Lotka-Volterra system is considered. It is assumed that switching occurs between two subsystems, and solutions of each of subsystem are bounded. By means of a special choice of switching law and imposition of restrictions on coefficients of subsystems, asymptotic stability in general at positive orthant of equilibrium point of switched system is achieved.
Keywords: switched systems, asymptotic stability, systems of differential equations, biological systems.

Введение. Под системой с переключениями подразумевается система, состоящая из семейства подсистем и правила, определяющего переключения между ними [1]. Системы с переключениями широко применяются при моделировании разнообразных процессов в механике, робототехнике, в задачах управления воздушным и автомобильным транспортом, биологическими системами [2]. Переключения могут быть обусловлены, например, выходом из строя некоторых частей системы, изменением внешних факторов или срабатыванием переключающих элементов.

Математически система с переключениями может быть описана системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f_\sigma(x),$$

где $x \in R^n$; $\left\{f_p : p \in P\right\}$ – семейство достаточно регулярных функций, действующих из R^n в R^n, параметризованное некоторым набором индексов P; $\sigma : [0,\infty) \to P$ – кусочно-постоянная функция времени, называемая сигналом переключения. Функция σ может зависеть, например, только от t или $x(t)$, или и от t, и от $x(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-00376-а, и СПбГУ, НИР № 9.38.674.2013

Одно из возможных применений систем с переключениями – задачи моделирования и управления биологическими системами. Использование таких систем может быть эффективно, например, как способ описания резких изменений внешних условий [3]. Переключения между биологическими подсистемами могут приводить к неограниченным колебаниям численностей популяций, их сокращению, сходимости к некоторому пределу или к полному уничтожению видов. Полученные в работе результаты иллюстрируют такой подход к исследованию динамики популяций. Случай возникновения неограниченных колебаний численностей популяций рассмотрен в работе [4], в данной работе продемонстрируем, что изменение внешних условий может привести к сходимости численностей популяций к некоторому пределу.

Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases}$$

описывающую отношения между хищниками и жертвами, где x – плотность популяции жертв, y - плотность популяции хищников, $\alpha > 0$ – коэффициент рождаемости жертв, $\beta > 0$ – скорость, с которой хищник убивает жертв, $\gamma > 0$ – коэффициент смертности хищников, $\delta > 0$ – коэффициент, учитывающий скорость, с которой хищник убивает жертв, и эффективность превращения хищниками биомассы жертв в себя и потомство. Эту модель, описывающую межвидовую конкуренцию, предложили независимо друг от друга А. Лотка (1925) и В. Вольтерра (1926) [5]. Такая система имеет устойчивое положение равновесия типа центр $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, находящееся в положительном ортанте, отклонение от которого приводит к колебаниям численностей хищников и жертв.

Влияние внешних факторов на систему отражено с помощью коэффициентов α, β, γ и δ. Если внешние условия меняются, причём изменение происходит скачкообразно (например, произошёл лесной пожар или были разбрызганы химикаты, сокращающие численность одного из видов), то такое поведение может быть описано системой с переключениями. Каждая из подсистем будет соответствовать определенным внешним условиям, изменение которых может обеспечить как затухание колебаний и сходимость численностей популяций к положению равновесия, так и привести к неограниченным колебаниям численностей или вымиранию видов.

Рассмотрим систему с переключениями, состоящую из двух подсистем

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_i x - \beta_i xy, \\ \dot{y} = -\gamma_i y + \delta_i xy, \; i = 1,2. \end{cases} \tag{1}$$

Траектории подсистем – это замкнутые кривые, описываемые уравнениями $y^{\alpha_i} e^{-\beta_i y} = x^{-\gamma_i} e^{\delta_i x} c_i$, положения равновесия - точки $\left(\frac{\gamma_i}{\delta_i}, \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$. Нетрудно убедиться в том, что движения вдоль траекторий происходят вокруг положения равновесия против часовой стрелки.

Предположим, что положения равновесия двух подсистем совпадают. Это будет верно в случае, если коэффициенты систем удовлетворяют условиям $\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$. Если исследуются популяции хищников и жертв, существующие в естественных условиях, то маловероятно, что внешние условия будут меняться таким образом, что положения равновесия подсистем будут совпадать. Если же популяции находятся в искусственных условиях, и осуществляется управление коэффициентами α, β, γ, δ, то случай совпадающих положений равновесия возможен.

Покажем, что можно построить систему с переключениями, состоящую из подсистем (1) и имеющую асимптотически устойчивое положение равновесия.

Выбор закона переключения. Пусть переключение с первой подсистемы на вторую происходит только в точках минимума траекторий первой подсистемы по x, а переключение со второй на первую – в точках минимума траекторий второй подсистемы по y.

Теорема. *При выбранном законе переключения и при условии, что коэффициенты подсистем удовлетворяют соотношениям* $\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$, $\gamma_1 > \gamma_2$, $\delta_1 > \delta_2$ *положение равновесия* $x = \frac{\gamma_1}{\delta_1}$, $y = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ *системы (1) асимптотически устойчиво в целом в положительном ортанте.*

Доказательство. Для доказательства построим траекторию системы с переключениями. Начнём построение с траектории первой подсистемы

$$x^{\gamma_1} e^{-\delta_1 x} y^{\alpha_1} e^{-\beta_1 y} = c_1. \tag{2}$$

Первыми тремя точками переключения будут соответственно $\left(x_1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, $\left(\frac{\gamma_2}{\delta_2}, y_2\right)$, $\left(x_3, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$. С начальной траектории переключаемся на траекторию

$$x^{\gamma_2} e^{-\delta_2 x} y^{\alpha_2} e^{-\beta_2 y} = c_2 = c_1 x_1^{(\gamma_2 - \gamma_1)} e^{x_1(\delta_1 - \delta_2)} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)}, \tag{3}$$

а затем – на траекторию

$$x^{\gamma_1} e^{-\delta_1 x} y^{\alpha_1} e^{-\beta_1 y} = c_3 = c_2 y_2^{(\alpha_1 - \alpha_2)} e^{y_2(\beta_2 - \beta_1)} \left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{(\gamma_1 - \gamma_2)} e^{(\gamma_2 - \gamma_1)}. \tag{4}$$

Учитывая, что траектории (2) и (3) пересекаются в точке $\left(x_1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, траектории (3) и (4) - в точке $\left(\frac{\gamma_2}{\delta_2}, y_2\right)$, можно выразить постоянную c_3 через c_1:

$$c_3 = c_1\left[y_2^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{y_2(\beta_2-\beta_1)}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_1-\alpha_2)}e^{-\frac{\alpha_2}{\beta_2}(\beta_2-\beta_1)}\right]\times$$
$$\times\left[x_1^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{x_1(\delta_1-\delta_2)}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{(-\gamma_2-\gamma_1)}e^{-\frac{\gamma_1}{\delta_1}(\delta_1-\delta_2)}\right].$$

Точка x_1 – точка минимума траектории первой подсистемы по x, а y_2 – точка минимума траектории второй подсистемы по y, следовательно, $y_2 < \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $x_1 < \frac{\gamma_1}{\delta_1}$.

Исследуя функции $h(y) = y^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{(\beta_2-\beta_1)y}$, $f(x) = x^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{(\delta_1-\delta_2)x}$ и учитывая, что $y_2 < \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ и $x_1 < \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\delta_1-\delta_2} = \frac{\gamma_1}{\delta_1}$, получаем, что

$$y_2^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{y_2(\beta_2-\beta_1)} > \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}(\beta_2-\beta_1)}$$

и

$$x_1^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{x_1(\delta_1-\delta_2)} > \left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{\frac{\gamma_1}{\delta_1}(\delta_1-\delta_2)}.$$

Можно сделать вывод, что $c_3 > c_1$

Сравним значения x_1 и x_3, для которых верны соотношения

$$x_1^{\gamma_1}e^{-x_1\delta_1} = c_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1},$$
$$x_3^{\gamma_1}e^{-x_3\delta_1} = c_3\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1}.$$

Исследуем функцию $g(z) = z^{\gamma_1}e^{-\delta_1 z}$, производная которой

$$g'(z) = z^{\gamma_1-1}e^{-\delta_1 z}(\gamma_1 - z\delta_1).$$

Учитывая, что $x_1 < \frac{\gamma_1}{\delta_1}$, $x_3 < \frac{\gamma_1}{\delta_1}$ и $c_3 > c_1$, получаем $x_3 > x_1$.

Продолжим построение траектории системы с переключениями и получим возрастающую последовательность

$$x_1, x_3, x_5, \ldots$$

Для каждого элемента последовательности верно неравенство $x_{2k+1} < \frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2}$, $k = \overline{0,\infty}$, следовательно, эта последовательность имеет предел и является фундаментальной, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k+3} - x_{2k+1}) = 0.$

Воспользуемся теоремой Лагранжа:

$$x_3 - x_1 = \frac{\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1}(c_3-c_1)\xi}{e^{-\delta_1\xi}\xi^{\gamma_1}(\gamma_1-\delta_1\xi)} >$$
$$> \frac{\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1}(c_3-c_1)x_1}{e^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\gamma_1}\gamma_1},$$

где $\xi \in (x_1, x_3)$. Для двух произвольных соседних членов последовательности будет верна оценка

$$x_{2k+3} - x_{2k+1} >$$
$$> \frac{\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1}(c_{2k+3}-c_{2k+1})x_{2k+1}}{e^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\gamma_1}\gamma_1} > 0.$$

Перейдём к пределу при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}(x_{2k+3} - x_{2k+1}) \geq$$
$$\geq \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}e^{\alpha_1}(c_{2k+3}-c_{2k+1})x_{2k+1}}{e^{-\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\gamma_1}\gamma_1}\right) \geq 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(c_{2k+3} - c_{2k+1}) = 0$.

Рассмотрим разность

$$c_{2k+3} - c_{2k+1} =$$
$$= c_{2k+1}\left(\left[y_{2k+2}^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{y_{2k+2}(\beta_2-\beta_1)}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_1-\alpha_2)}e^{-\frac{\alpha_2}{\beta_2}(\beta_2-\beta_1)}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[x_{2k+1}^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{x_{2k+1}(\delta_1-\delta_2)}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{-(\gamma_2-\gamma_1)}e^{-\frac{\gamma_1}{\delta_1}(\delta_1-\delta_2)}\right]-1\right).$$

Отбросив первый множитель в квадратных скобках, получим оценку

$$c_{2k+3} - c_{2k+1} > c_{2k+1}\cdot$$
$$\cdot\left(x_{2k+1}^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{x_{2k+1}(\delta_1-\delta_2)}\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{-(\gamma_2-\gamma_1)}e^{-\frac{\gamma_1}{\delta_1}(\delta_1-\delta_2)}-1\right).$$

Переходя к пределу, имеем

$$\lim_{k-\infty}x_{2k+1}^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{x_{2k+1}(\delta_1-\delta_2)} = \left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{(\gamma_2-\gamma_1)}e^{\frac{\gamma_1}{\delta_1}(\delta_1-\delta_2)}.$$

Можем сделать вывод, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \dfrac{\gamma_1}{\delta_1}$.

Отбросив в выражении для разности $c_{2k+3} - c_{2k+1}$ второй множитель в квадратных скобках, аналогичным образом можем показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{2k+2} = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следовательно, удалось построить систему с переключениями, положение равновесия которой $x = \dfrac{\gamma_1}{\delta_1}$, $y = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ асимптотически устойчиво в целом в положительном ортанте. Другими словами, при выбранном законе переключения численности популяций хищников и жертв сходятся к конечным пределам.

Теорема доказана.

Пример. Построим систему с переключениями, состоящую из подсистем

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 0.01xy, \\ \dot{y} = -1.5y + 0.015xy, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 0.02xy, \\ \dot{y} = -y + 0.01xy \end{cases}$$

и выбранного закона переключения. Траектории подсистем – замкнутые кривые, описываемые уравнениями $ye^{-0.01y} = x^{-1.5}e^{0.015x}c_1$ и $y^2e^{-0.02y} = x^{-1}e^{0.01}c_2$ соответственно. Коэффициенты подсистем удовлетворяют необходимым ограничениям, следовательно, положение равновесия системы с переключениями асимптотически устойчиво. Одна из траекторий системы с переключениями будет иметь вид, представленный на рисунке 1.

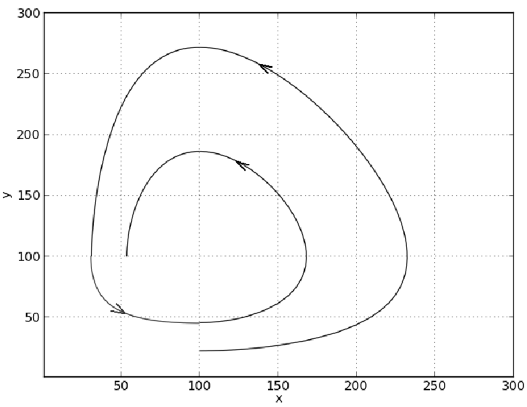

Рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D., Morse A. S.* Basic problems in stability and design of switched systems // Control System Magazine, IEEE, 1999. Vol. 19, No. 5. P. 59–70.

2. *Decarlo R. A., Branicky M. S., Petterson S., Lennartson B.* Perspectives Sand results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proc. of the IEEE, 2000. Vol. 88, No. 7. P. 1069–1082.

3. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. М-Ижевск: РХД, 2002. – 236 с.

4. *Лакрисенко П. А.* Об ограниченности решений системы Лотки-Вольтерры с переключениями // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. 2012. С. 291–296.

5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. – 287 с.

Лакрисенко Полина Александровна – аспирант кафедры управления медико-биологическими системами, факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет. E-mail: p.lakrisenko@gmail.com

Lakrisenko P. A. – Postgraduate student, Department management of medical and biological systems Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University. E-mail: p.lakrisenko@gmail.com