УДК 004.9+519.71

МЕТОДЫ ВЫБОРА НАИБОЛЕЕ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО ВАРИАНТА РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ

В. И. Девкин

НИЦ АТиВ 4 ЦНИИ МО РФ

Поступила в редакцию 27.10.2012 г.

Аннотация. На основе известных методов выбора наиболее предпочтительного варианта различных систем, характеризующихся многими показателями качества, предложено несколько новых методов выбора такого варианта, позволяющих расширить границы применимости известных методов.
Ключевые слова: системы, характеризующиеся многими показателями качества, выбор наиболее предпочтительного варианта, многокритериальный выбор.
Annotation. On the basis of the known methods for selecting the most preferred embodiment of the various systems, which are characterized by many levels of quality, proposed several new methods to select this option to enable push the limits of applicability of the known methods.
Keywords: systems characterized by many levels of quality, selection of the most preferred embodiment, the multi-criteria selection.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последнее время в работах [1, 2] были предложены новые методы агрегирования исходной информации, позволяющие проводить сравнительную оценку вариантов различных систем, характеризующихся многими показателями качества, в результате которой можно численно определять относительную важность (полезность, значимость) рассматриваемых вариантов. Этими методами являются энтропийный метод и метод специальной матричной метрики [1, 2].

Их отличительными особенностями от других известных методов является отсутствие необходимости, при проведении оценок сравнения вариантов, определения коэффициентов важности отдельных характеристик (частных показателей) качества и предварительного нормирования их количественных значений.

В качестве исходной информации в этих методах используется система из n элементов (сравниваемых вариантов альтернатив), в которой каждый i-й элемент – альтернатива ($i = 1,2,...,n$) описывается m-мерным вектором с неотрицательными компонентами x_{ij}, $j = 1,2,\dots,m$, представляющими собой частные показатели качества i-го варианта альтернативы рассматриваемой системы.

При этом, если j-й показатель выгодно максимизировать, то компоненты матрицы X берутся в виде x_{ij}, а если минимизировать, то в виде $1/x_{ij}$, $x_{ij} > 0$. Таким образом строится матрица исходных данных X.

Рассмотрим кратко существо указанных методов.

В работе [1] показано, что если выполняется условие

$$\theta = \frac{\lambda_{\max}/m - n}{n-1} \le 0.2, \qquad (1.1)$$

где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение матрицы $S = X \cdot X^{-T}$; n – количество строк матрицы X; m – количество столбцов матрицы X, то в качестве обобщённых (интегральных) показателей важности (полезности, значимости) вариантов рассматриваемой системы (строк матрицы X) могут быть выбраны компоненты главного собственного вектора **w** так называемой энтропийной матрицы $\mathrm{S} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{X}^{-\mathrm{T}}$, где $\mathrm{X}^{-\mathrm{T}} = (1/x_{ij})^{\mathrm{T}}$, - x_{ij} – компоненты исходной матрицы X, $i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,m$; а T – операция транспонирования матрицы $(1/x_{ij})$.

Главный собственный вектор **w** матрицы S удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{S}\mathbf{w} = \lambda_{\max} \cdot \mathbf{w}, \qquad (1.2)$$

где $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы S.

Поскольку S – положительно определенная матрица, то, согласно [3], формулы для определения количественных значений **w** и $\lambda_{\max}$ имеют вид:

$$\mathbf{w} = \lim_{k\to\infty} \frac{S^k \cdot \vec{e}}{\vec{e}^T \cdot S^k \cdot \vec{e}}, \quad (1.3)$$
$$\vec{e} = (1,1,\ldots,1)^T \in R^n;$$

$$\lambda_{\max} = \lim_{k\to\infty} (SpS^k)^{1/k}, \quad (1.4)$$

где Sp – след матрицы S^k, то есть сумма ее диагональных элементов.

Таким образом, если при сравнительной оценке альтернативных вариантов системы исходную матрицу показателей X выбирать указанным выше образом, а именно, X = (x_{ij}, если j-й показатель выгодно максимизировать или $1/x_{ij}$, если j-й показатель выгодно минимизировать), то, при выполнении условия (1.1), наилучшим вариантом в матрице X будет тот, который соответствует компоненте вектора **w** с наиболее высоким значением.

В работе [1] предлагается также в качестве обобщенных показателей элементов системы (строк матрицы X) использовать компоненты вектора

$$\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{w} \otimes \mathrm{v}^{-1}},$$

где **w** – главный правый собственный вектор матрицы S; **v** – главный правый собственный вектор матрицы S^T (главный левый собственный вектор матрицы S); ⊗ – символ покомпонентного умножения векторов **w** и $\mathbf{v}^{-1}$.

И в этом методе матрица исходных данных $X = (x_{ij})$ характеристик (показателей) объектов сравнения должна строиться таким образом, чтобы все частные показатели для повышения «качества» объекта необходимо было менять в одну сторону, например, максимизировать (то есть берется x_{ij}, если его увеличение повышает «качество» объекта, и $1/x_{ij}$, если его уменьшение повышает это «качество»; при этом $x_{ij} > 0$). Тогда объекту с лучшим «качеством» (большей «полезностью») будет соответствовать больший по численному значению обобщенный показатель.

В методе специальной матричной метрики [2] по указанной выше матрице исходных данных X определяются относительные обобщённые показатели важности рассматриваемых вариантов систем **p** = (p_1, p_2, ..., p_n), а также параметр аппроксимации метода

$$\chi = \left\| XD(\vec{q}) - \mu \vec{p}\vec{e}^T \right\| / \left\| XD(\vec{q}) \right\|.$$

В работе [2] указанную аппроксимацию предлагается считать приемлемой, если $\chi \le 0.2$.

Однако проведенные расчеты показывают, что часто получается так, что $\chi > 0.2$, но при этом значения обобщенных показателей **p** получаются близкими к найденным энтропийным методом при индексе согласованности $\theta < 0.2$. То есть метод применим и при $\chi > 0.2$.

Установление максимальной пороговой величины χ_0, при которой применим метод специальной матричной метрики, для рассматриваемого круга задач требует дополнительных исследований.

Указанные выше общие методы определения наиболее предпочтительного варианта различных систем неприменимы при $\theta > 0.2$ и $\chi > \chi_0$ соответственно. Поэтому весьма актуальным является поиск общих методов определения наиболее предпочтительного варианта различных систем, которые могли бы быть применимы и при $\theta > 0.2$ или $\chi > \chi_0$.

Оказывается, в целом ряде случаев такие методы могут быть найдены.

2. НОВЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ ВЫБОРА НАИБОЛЕЕ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО ВАРИАНТА РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ

Искомые методы могут быть построены следующим образом.

Введём в рассмотрение матрицы $X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} \ldots x_{im} \\ x_{j1} & x_{j2} \ldots x_{jm} \end{pmatrix}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$.

Применим к матрицам $X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{1n}, X_{23}, X_{24}, \ldots, X_{2n}, X_{34}, X_{35}, \ldots, X_{3n}, \ldots, X_{n-2,n-1}, X_{n-2,n}, X_{n-1,n}$ энтропийный метод определения главных собственных векторов соответствующих двухмерных энтропийных матриц $S_{ij} = X_{ij}X_{ij}^{-T}$. Поделив первую компоненту этих собственных векторов на вторую компоненту, получим величины $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}, a_{34}, a_{35}, \ldots, a_{3n}, \ldots, a_{n-2,n-1}, a_{n-2,n}, a_{n-1,n}$.

По полученным величинам a_{ij} построим обратно-симметричную ($a_{ij} = 1/a_{ji}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$) матрицу Т. Саати [3]

$$A = \begin{pmatrix} 1 \quad a_{12} \quad a_{13} \;\ldots\ldots\; a_{1,n-1} \quad a_{1n} \\ \ldots\; 1 \quad a_{23} \ldots\ldots\; a_{2,n-1} \quad a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots 1 \quad a_{34} \ldots\; a_{3,n-1} \quad a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \quad a_{n-2,n-1} \quad a_{n-2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \quad a_{n-1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда поиск оценок коэффициентов относительной важности (полезности, значимости) альтернатив w_i, $i = 1,2,...,n$ может быть осуществлён обычным образом, путём решения задачи нахождения максимального собственного значения λ_1 и соответствующего ему собственного вектора $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ матрицы A, то есть находится не нулевое решение уравнения

$$A\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{w}.$$

Компоненты найденного нормализованного главного собственного вектора **w** и являются оценками относительной важности (полезности, значимости) альтернатив, по которым и осуществляется выбор наилучшего варианта системы.

Поскольку A – положительная матрица, то, согласно работе [3],

$$\mathbf{w} = \lim_{k\to\infty} \frac{A^k \vec{e}}{\vec{e}^T A^k \vec{e}},$$
$$\vec{e} = (1,1,...,1)^T \in R^n;$$
$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} (SpA^k)^{1/k},$$

где Sp – след матрицы A^k, то есть сумма ее диагональных элементов.

Индекс согласованности для обратно–симметричной матрицы A определяется согласно работе [3] по формуле

$$\theta_1 = (\lambda_1 - n) / (n - 1).$$

Для обратно – симметричной матрицы A всегда $\lambda_1 \geq n$. Чем ближе λ_1 к n, тем больше согласованность. Согласно работе [3] величина индекса согласованности θ_1 должна быть порядка 0.1 или менее, чтобы быть приемлемой. В некоторых случаях можно допустить 0.2, но не более.

Таким образом, если $\theta_1 \leq 0.1...0.2$, то предложенный подход позволяет определять коэффициенты относительной важности альтернативных вариантов системы $w_1, w_2, ..., w_n$, даже в том случае, когда другие известные ранее и изложенные в разделе 1 методы их определения не применимы.

Аналогично методу, изложенному выше, матрица A может быть построена с помощью метода специальной матричной метрики, применённого матрицам $X_{12}, X_{13}, ..., X_{1n}, X_{23}, X_{24}, ..., X_{2n}, X_{34}, X_{35}, ..., X_{3n}, ..., X_{n-2,n-1}, X_{n-2,n}, X_{n-1,n}$. Тем самым получим другой метод определения коэффициентов относительной важности альтернативных вариантов системы $w_1, w_2, ..., w_n$, если $\theta_1 \leq 0.1...0.2$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенные в настоящей работе методы позволяют определять, если $\theta_1 \leq 0.1...0.2$, коэффициенты относительной важности (полезности, значимости) альтернативных вариантов системы $w_1, w_2, ..., w_n$, характеризующихся многими показателями качества, и тем самым, позволяют осуществлять выбор наилучшего варианта системы.

Если $\theta_1 \leq 0.1...0.2$, то эти методы применимы даже в том случае, когда другие известные ранее и изложенные в разделе 1 методы их определения не применимы ($\theta_1 > 0.2$ или $\chi > \chi_0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куренков Н.И., Лебедев Б.Д.* Энтропийные методы определения обобщённых характеристик систем. Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 3. С. 322 – 324.

2. *Куренков Н.И.* Особенности анализа многомерных данных. Статья в Интернете. 2006.

3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М. «Радио и связь». 1993.

Девкин В. И. – НИЦ АТиВ 4 ЦНИИ МО РФ, E-mail: NAT@ZARWA.RU

Devkin V. I. – НИЦ АТиВ 4 ЦНИИ МО РФ, E-mail: NAT@ZARWA.RU