

**ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ В ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАНИЦ ПЛОСКИХ ФИГУР**

А. В. Атанов, А. В. Лобода

*Воронежский государственный университет***Поступила в редакцию 20.03.2013 г.**

**Аннотация.** В статье изучается проблема реконструкции границ плоских фигур. Приводится оценка точности реконструкции границы круга с использованием радиальных базисных функций.

**Ключевые слова:** компьютерное зрение, реконструкция границ, радиальные базисные функции, интерполяция, погрешность

**Annotation.** The article discusses a 2D reconstruction problem. We produce error estimation for reconstruction of a circle based on RBF method.

**Keywords:** computer vision, interface reconstruction, radial basis functions, interpolation, error estimation

**ВВЕДЕНИЕ**

В статье обсуждается задача, связанная с компьютерной обработкой визуальной информации или (в более современной терминологии) с проектированием систем компьютерного зрения.

В настоящее время такие системы получили широкое распространение во многих областях – от медицины до промышленного производства. Однако (см. [1]), пока не существует универсального математического аппарата и общего формализованного подхода к построению систем компьютерного зрения. Количество частных задач и вопросов, возникающих в названной проблемной области, чрезвычайно велико, а разработка теоретических основ для решения задач компьютерного зрения является актуальной проблемой современных компьютерных технологий.

В частности, одной из важнейших задач, возникающих при проектировании систем компьютерного зрения, является т.н. проблема реконструкции (восстановления) границ различных объектов. Под реконструкцией здесь понимается математическое описание непрерывной границы фигуры на основе имеющихся дискретных данных об этой границе.

Необходимым этапом решения поставленной задачи является оценка точности получив-

шейся реконструкции. При восстановлении границ объектов реального мира, отличающихся бесконечным многообразием форм, универсальные оценки такого рода по сути невозможны. Отметим, что даже фиксация каких-либо классов фигур (пространственных или плоских) лишь незначительно снижает сложность получения подобных оценок. Вместе с тем, без таких оценок, справедливых хотя бы для простых модельных фигур, практическое решение названной задачи компьютерными методами не может считаться полностью адекватным.

В данной работе приводится оценка точности восстановления окружности с использованием т.н. радиальных базисных функций (РБФ). Методы, связанные с такими функциями, получили широкое практическое применение в задачах аппроксимации. В то же время, теоретическое оправдание этих методов является затруднительным даже в плоском случае. В работе иллюстрируется сложность получения необходимых оценок при использовании радиальных базисных функций в весьма простой ситуации.

Приведенный в статье теоретический результат можно обобщать на более сложные фигуры и классы фигур. Ясно, однако, что подобные обобщения не являются тривиальными, их разработка потребует значительных дополнительных усилий.

Постановка изучаемого в данной работе вопроса об оценке погрешности, а также схема

ее вычисления принадлежат второму автору. Техническая реализация этой схемы и компьютерные эксперименты осуществлены первым автором.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ

В общей постановке задачи реконструкции требуется восстановить границу  $\Gamma$  двумерной или трёхмерной фигуры по дискретному набору точек  $D = \{\vec{r}_j\}$  ( $j = 1, \dots, N$ ), расположенных на границе (и полученных, например, с использованием дальнометрических изображений при помощи 3D-сканеров). Под восстановлением границы, как правило, понимают построение некоторой функции  $P(\vec{r})$ , для которой искомая граница является нулевой изоповерхностью (линией нулевого уровня в двумерном случае).

Для решения плоских и пространственных задач реконструкции в работах [2]–[6] используется метод радиальных базисных функций. В плоском случае в рамках этого метода вводится какая-либо “материнская” (базовая) функция двух переменных  $\varphi(\vec{r})$ , зависящая лишь от расстояния  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  между точкой с координатами  $(x, y)$  и началом координат. Ниже мы будем работать с (линейной по  $r$ ) функцией  $\varphi(\vec{r}) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; в [4], [7] рассматриваются и другие варианты для функции  $\varphi(\vec{r})$ . Искомую функцию  $P(\vec{r})$  предлагается представлять в виде линейной комбинации сдвигов материнской функции

$$P(\vec{r}) = \sum_j \lambda_j \varphi(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1)$$

При этом суммирование проводится по некоторому набору  $E$  точек, содержащему, например, все заданные точки из множества  $D$  границы  $\Gamma$ . Коэффициенты  $\lambda_j$  в формуле (1) предлагается искать, решая задачу интерполяции: в точках множества  $D$  естественно положить  $P(\vec{r}) = 0$ , в остальных точках желаемые значения функции  $P(\vec{r})$  оговариваются особо. В итоге построение функции  $P(\vec{r})$  сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Отметим необходимость включения в интерполяционное множество  $E$  точек, не лежащих на  $\Gamma$  (и, тем самым, не попадающих в  $D$ ). Дело в том, что в относительно общих ситуациях решение однородной системы линейных уравнений

$$P(\vec{r}_k) = \sum_j \lambda_j \varphi(\vec{r}_k - \vec{r}_j), \quad k = 1, \dots, |E| \quad (2)$$

является тривиальным. Ясно, что тождественно нулевая функция  $P(\vec{r})$  не может рассматриваться как решение исходной задачи реконструкции.

Практическое применение описанного метода показывает достаточно высокую степень точности реконструкции (см., например, [7]). В то же время естественным является вопрос о теоретических гарантиях адекватности и сходимости описанных процедур. Для сравнения можно упомянуть известные по примерам К. Рунге [8] и С.Н. Бернштейна [9] эффекты расходимости интерполяционных процедур при использовании многочленов с равноотстоящими узлами.

Отметим еще, что помимо вопроса об адекватности собственно метода РБФ на точность реконструкции оказывает влияние и необходимость решения больших систем линейных уравнений. В практических задачах компьютерной реконструкции используются массивы  $D$  из десятков тысяч граничных точек реконструируемых фигур, что создаёт большие трудности при использовании метода РБФ. Один из возможных способов реконструкции в подобной ситуации описан в [10].

В настоящей работе рассматривается вопрос о теоретической точности метода плоских РБФ. Ниже изучается лишь одна простейшая задача плоской реконструкции. Её решение показывает, с одной стороны, возможность получения теоретических оценок, дополняющих практические результаты. С другой стороны, на примере этого решения ясно виден уровень сложности получения подобных оценок для фигур, не являющихся простейшими.

Дадим точную формулировку решаемой задачи: по  $N$  точкам, лежащим в вершинах вписанного в окружность правильного  $N$ -угольника и одной дополнительной точке, расположенной в центре окружности, получить оценку отклонения линии нулевого уровня интерполянта

$$P(\vec{r}) = \sum_j^{N+1} \lambda_j \varphi(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (3)$$

от исходной окружности.

В качестве модельной фигуры будем рассматривать круг единичного радиуса. Значение интерполянта в точках границы этого круга

полагаем равным нулю, а в центре круга – минус единице.

Практическое построение таких линий уровня при  $N = 3$  и  $N = 5$  приведено на рис. 1.

При использовании обсуждаемых процедур естественно считать число  $N$  достаточно большим. Полученный нами вывод об оценке отклонения можно сформулировать как утверждение о равномерной сходимости реконструируемого образа единичной окружности к самой окружности при  $N \rightarrow \infty$ .

## 2. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОКРУЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

**Определение.**  $N$ -образом окружности будем называть кривую, получающуюся в результате реконструкции с использованием линейных радиальных базисных функций по  $N+1$  точке, из которых  $N$  точек – вершины правильного многоугольника, вписанного в заданную окружность, а одна точка – её центр.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $N = 2M$  ( $M \in \mathbb{N}$ ) – количество вершин правильного  $N$ -угольника. Тогда  $N$ -образ единичной окружности с центром в

нуле лежит (при достаточно больших  $N$ ) в кольце с внутренним радиусом  $r = 1$  и внешним радиусом  $R = 1 / \cos \frac{\pi}{2N}$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим правильный  $N$ -угольник, вершины которого имеют координаты

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{N}\right); y_k = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{N}\right). \quad (4)$$

Найдем величину  $\vec{r}_k - \vec{r}_j = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$ . Используя равенства (4) и известные тригонометрические формулы, можно показать, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} = \\ & = \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi(k-j)}{N}\right)} = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi(k-j)}{N}\right) \right|. \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов  $\lambda_i$  в интерполянте

$$P(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k \varphi(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & \dots & 2 \sin\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right) & 1 \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & 0 & \dots & 2 \sin\left(\frac{\pi(N-2)}{N}\right) & 1 \\ 2 \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) & 2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & \dots & 2 \sin\left(\frac{\pi(N-3)}{N}\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 2 \sin\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right) & 2 \sin\left(\frac{\pi(N-2)}{N}\right) & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \lambda_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Учитывая симметричность получившейся системы уравнений, а так же тот факт, что матрица в левой её части невырождена (см. [11]),

легко видеть, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = -\frac{1}{RN}$ , а

$$\lambda_{N+1} = 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N}.$$

Отметим, что такие значения коэффициентов справедливы для произвольного положения

правильного многоугольника, а не только для расположения (4).

Таким образом, интерполянт  $P(\vec{r})$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P(\vec{r}) = & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \vec{r} - \vec{r}_k + \\ & + \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \vec{x} - \vec{x}_{N+1}, \end{aligned}$$

или

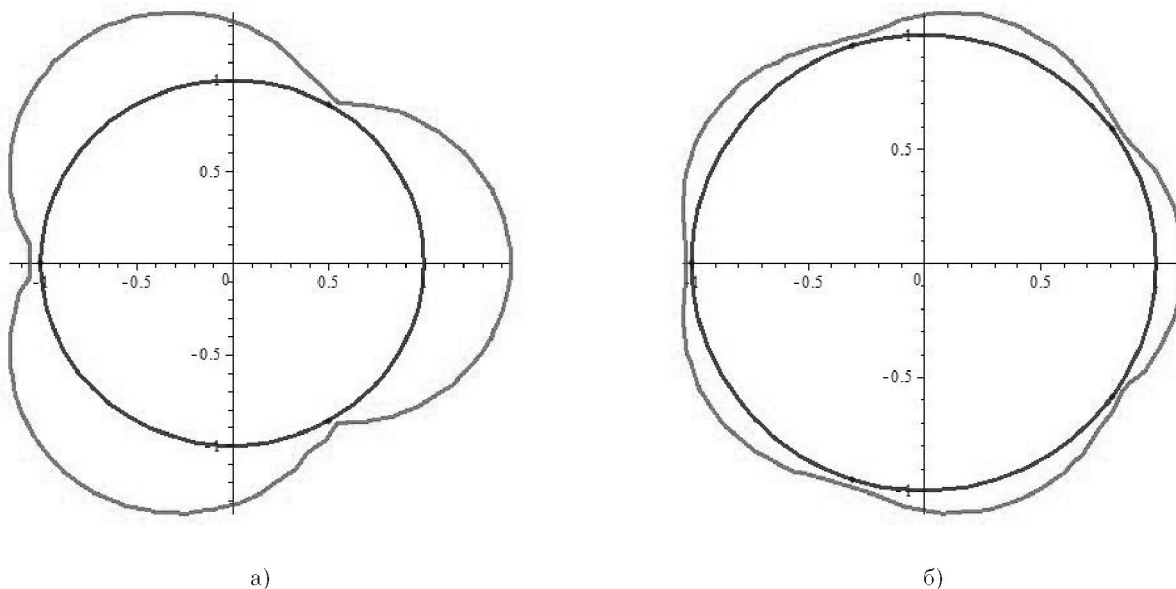


Рис. 1. Реконструкция окружности методом РБФ:  
(а) реконструкция по 3-м точкам; (б) – реконструкция по 5-ти точкам

$$P(x, y) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} + \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \sqrt{(x - x_{N+1})^2 + (y - y_{N+1})^2}. \quad (5)$$

Из (5) получаем следующее уравнение линии нулевого уровня

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} = \\ & = \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \sqrt{(x - x_{N+1})^2 + (y - y_{N+1})^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Получаемая с помощью такого интерполянта фигура будет иметь вид «ромашки» с  $N$  «лепестками». Кроме того, очевидно, что фигура, получаемая из симметричного многоугольника также будет симметричной. Чтобы понять, насколько реконструируемая фигура будет отличаться от окружности, достаточно рассмотреть отклонение одного из «лепестков» от соответствующей дуги окружности. Нетрудно увидеть (например, с помощью построения реконструкций в компьютерных приложениях – см. рис. 1), что соответствующее отклонение будет максимальным в центре стороны рассматриваемого многоугольника.

Найдём нижнюю оценку отклонения границы лепестка от единичной окружности.

Рассмотрим сторону  $N$ -угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в точке  $(0;0)$  (см. рис. 2). Выясним, когда интерполянт (5) равен нулю на оси  $Ox$  ( $x > 0$ ).

На оси  $Ox$  левая часть (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{x^2 - 2xx_k + x_k^2 + y_k^2} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{x^2 - 2xx_k + 1}. \end{aligned}$$

Правая часть (6) равна

$$\begin{aligned} & \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \sqrt{(x - x_{N+1})^2 + (y - y_{N+1})^2} = \\ & = \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \cdot x. \end{aligned}$$

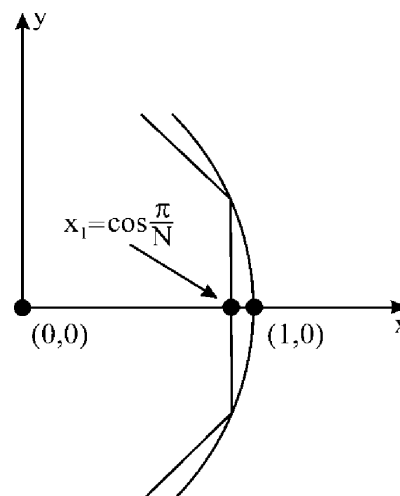


Рис. 2. Сторона  $N$ -угольника, вписанного в единичную окружность с центром в начале координат

Таким образом,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{x^2 - 2xx_k + 1} = \frac{2}{N} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} \cdot x \quad (7)$$

Поделим последнее равенство на  $x$ :

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{1 - \frac{2x_k}{x} + \frac{1}{x^2}} = B_N, \quad (8)$$

где  $B_N = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N}$ .

Пусть

$$w(x) = \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - \frac{2x_k}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Рассмотрим вопрос о монотонности функции  $w(x)$  с учётом монотонности отдельных её слагаемых.

$$w_k(x) = \sqrt{1 - \frac{2x_k}{x} + \frac{1}{x^2}}, \quad (9)$$

На интервале  $\left(0; \frac{1}{x_k}\right)$  функция  $w_k(x)$  моно-

тонно убывает, что видно из рассмотрения её производной. Так как в рассматриваемом случае все  $x_k < 1$ , то монотонное убывание  $w(x)$  сохраняется на полуинтервале  $(0; 1]$ .

Найдём значение функции  $w(x)$  в точке  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} w(1) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - x_k} = \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{1 - \cos 2 \left( \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right)} = \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{2 \sin^2 \left( \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right)} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \sin \left( \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) = \\ &= 2 \frac{\cos \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi}{2N} + \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{\pi}{2N} + \cos \frac{\pi}{2N}}{\sin \frac{\pi}{N}} = \\ &= 2 \frac{2 \cos \frac{\pi}{2N}}{2 \sin \frac{\pi}{2N} \cos \frac{\pi}{2N}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2N}} > \frac{2 \cos \frac{\pi}{2N}}{\sin \frac{\pi}{2N}} = B_N. \end{aligned}$$

Так как на интервале  $(0; 1)$  функция  $w(x)$  убывает, а  $w(1) > B_N$ , то искомым корнем уравнения лежит справа от точки  $x = 1$ . Таким образом, получена оценка снизу.

Получим теперь оценку сверху для единственного (!) вещественного корня  $x$  уравнения (6) или, что то же самое, уравнения (7). Как и при получении оценки снизу, будем использовать монотонность функций (9) на промежутке

$\left(0, \frac{1}{x_1}\right)$ . Докажем, что  $w\left(\frac{1}{x_1}\right) < B_N$ , это и будет

означать желаемую оценку.

Для доказательства оценим разность  $w(1) - w\left(\frac{1}{x_1}\right)$  и покажем, что она достаточно велика. В частности, она не меньше, чем

$$w(1) - B_N = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2N}} - \frac{2 \cos \frac{\pi}{2N}}{\sin \frac{\pi}{2N}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4N}.$$

Отметим, что при больших  $N$  разность  $w(1) - B_N$  приближённо можно заменить малой величиной  $\frac{\pi}{2N}$ .

Пользуясь симметрией рассматриваемого  $N$ -угольника относительно оси  $Ox$ , мы будем обсуждать далее лишь его вершины, расположенные в верхней полуплоскости. При условии  $N = 2M$  рассмотрим

$$\sum_{k=1}^M R_k = \sum_{k=1}^M \left( w_k(1) - w_k\left(\frac{1}{x_1}\right) \right).$$

Отдельное слагаемое этой суммы можно привести к виду

$$\begin{aligned} R_k &= w_k(1) - w_k\left(\frac{1}{x_1}\right) = \\ &= \sqrt{2(1-x_k)} - \sqrt{1 - 2x_k x_1 + x_1^2} = \\ &= \frac{2(1-x_k) - 1 + 2x_k x_1 - x_1^2}{\sqrt{2(1-x_k)} + \sqrt{1 - 2x_k x_1 + x_1^2}} = \\ &= \frac{(1-x_1)(1+x_1-2x_k)}{\sqrt{2(1-x_k)} + \sqrt{1 - 2x_k x_1 + x_1^2}}. \end{aligned}$$

Для оценки  $R_k$  снизу достаточно получить оценку числителя последнего выражения снизу, а знаменателя – сверху. В связи с этим докажем две леммы.

**Лемма 1.** При  $2 \leq k \leq M$  выполняется неравенство

$$1 + x_1 - 2x_k \geq \frac{3}{2}(1 - x_k).$$

**Доказательство.**

Пусть  $2 \leq k \leq M$ . Тогда

$$x_1 - x_k \geq 1 - x_1. \quad (10)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} x_1 - x_k &= \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{N}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

В силу монотонности синуса на промежутке

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} x_1 - x_k &> 2 \sin^2\left(\frac{(k-1)\pi}{N}\right) \geq 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) > \\ &> 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) = 1 - x_1. \end{aligned}$$

В свою очередь, неравенство (10) равносильно утверждению

$$2x_1 - 1 - x_k > 0,$$

или, что то же самое,

$$2(1 + x_1 - 2x_k) - 3(1 - x_k) > 0.$$

Ясно, что последнее неравенство доказывает требуемое в лемме 1 утверждение.

**Лемма 2.** При  $1 \leq k \leq M$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1-x_k)} + \sqrt{1-2x_kx_1+x_1^2} &\leq \\ &\leq \sqrt{8(1-x_k^2)}. \end{aligned}$$

**Доказательство.**

Из неравенства  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$  получаем, что

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2(1-x_k)} + \sqrt{1-2x_kx_1+x_1^2}\right)^2 &\leq \\ &\leq 2\left(2(1-x_k) + 1-2x_kx_1+x_1^2\right) = \\ &= 2\left(3-2x_k-2x_kx_1+x_1^2\right). \end{aligned}$$

Теперь нам достаточно показать, что

$$3 - 2x_k - 2x_kx_1 + x_1^2 < 4(1 - x_k^2).$$

При  $1 > x_1 > x_k$  это утверждение справедливо, так как  $3 + x_1^2 < 4$  и  $-2x_k - 2x_kx_1 < -4x_k^2$ .

Пользуясь доказанными леммами, получаем следующую формулу для отдельного слагаемого  $R_k$  ( $2 \leq k \leq M$ ):

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{(1-x_1)(1+x_1-2x_k)}{\sqrt{2(1-x_k)} + \sqrt{1-2x_kx_1+x_1^2}} \geq \\ &\geq \frac{3(1-x_1)}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{3(1-x_1)}{4\sqrt{2}} \times \\ &\times \frac{1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{N}\right)} = \frac{3(1-x_1)}{4\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{2N}. \end{aligned}$$

Так как при  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  выполняется неравенство

$\operatorname{tg} t > t$ , то для  $R_k$  можно теперь получить оценку

$$R_k > \frac{3(1-x_1)}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{(2k-1)\pi}{2N}.$$

Как следствие получается оценка для интересующей нас суммы

суммы  $\sum_{k=2}^M R_k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^M R_k &> \frac{3\pi(1-x_1)}{8N\sqrt{2}} \sum_{k=2}^M (2k-1) = \\ &= \frac{3\pi(1-x_1)(M^2-1)}{8N\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как

$$1 - x_1 = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right),$$

то при больших  $M$  последнее выражение в (11) приближённо равно

$$\frac{3}{4N\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2N}\right) \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{3\pi^2}{32\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2N}.$$

Суммируя  $R_k$  по всем вершинам многоугольника, кроме первой и последней, получаем удвоенную оценку

$$\sum_{k=1}^N R_k > \sum_{k=2}^{N-1} R_k = 2 \sum_{k=2}^M R_k > \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2N}.$$

Остаётся заметить, что коэффициент  $\frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}} > 1$ , а это и означает требуемую оценку сверху из заявленной теоремы (справедливую при больших  $N$ ).

Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шапиро Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Дж. Стокман: Пер. с англ. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 752 с.

2. *Hardy R.L.* Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces / R.L. Hardy // *J. Geophys. Res.* — 1971. — Vol. 76. — P. 1905-1915.

3. *Schagen I.P.* Interpolation in two dimensions — a new technique / I.P. Schagen // *J. Inst. Math. Appl.* — 1979. — Vol. 23. — P.53-59.

4. *Beatson R.K.* Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions / R. K. Beatson [et al.] // *Proceedings of ACM SIGGRAPH.* — 2001. — P. 67-76.

5. *Dyn N.* Numerical procedures for global surface fitting of scattered data by radial functions / N. Dyn, D. Levin, S. Rippa // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* — 1986. — Vol. 7. — pp.639-659.

6. *Beatson R.K.* Surface interpolation with radial basis functions for medical imaging / R.K. Beatson, J.C. Carr, W.R. Fright // *IEEE Trans. Medical Imaging.* — 1997. — Vol. 16. — pp.96-107.

7. *Franke R.* Scattered data interpolation: tests of some methods / R. Franke // *Math. Comput.* — 1982. — Vol. 38. — P. 181-200.

**Атанов Артем Викторович** — ассистент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета. Тел.: (473) 220-83-84

**Лобода Александр Васильевич** — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета. Тел.: (473)220-83-84

8. *Runge C.* Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen dquidistanten Ordinaten (нем.) / C. Runge // *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* — 1901. — Т. 46. — С. 224—243.

9. *Березин И.С.* Методы вычислений : учебное пособие для вузов : [в 2 т.] / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — М. : Физматгиз, 1962. - Т. 1. — 2-е изд., стереотип. — 1962. — 464 с.

10. *Атанов А.В.* Параллельный алгоритм реконструкции двумерных объектов на основе радиальных базисных функций / А.В. Атанов, А.А. Крыловецкий, С.Д. Кургалин // *Известия Южного федерального университета. Технические науки.* — Таганрог, 2012. — № 6. — С. 195-198.

11. *Micchelli C.A.* Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions / C.A. Micchelli // *Constr. Approx.* — 1986. — Vol. 2 — P. 11-22.

**Atanov Artem V.** — Assistant of department of Digital Technologies, Voronezh State University. Tel.: (473) 220-83-84

**Loboda Alexandr V.** — Professor, Doctor of mathematical and physical science, Voronezh State University. Tel.: (473) 220-83-84