

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ

Ф. О. Найдюк*, Е. Н. Десятирикова**, Д. К. Проскурин***

* *Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)*

** *Воронежский государственный университет*

*** *Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*

Поступила в печать 13.03.2013

Аннотация. В статье рассматривается задача построения численной схемы для модели колебательных процессов. Приводится обзорный сравнительный анализ построенной численной алгоритма с разностной схемой. Описывается метод аппроксимации применения построенной численной схемы к задачам колебательных процессов на сетях.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, разностная схема, численное интегрирование, геометрический граф, смешанная задача, функция Грина.

Annotation. This paper deals with the construction of the numerical scheme for the model of oscillatory processes. Offers an overview of the comparative analysis of the constructed numerical algorithm with a difference scheme. Describes the method of construction of a numerical approximation scheme to problems of oscillatory processes on networks.

Keywords: hyperbolic equation, the difference scheme, numerical integration, the geometric graph, the mixed problem, Green's function.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование самых различных физических и биологических процессов, перечень которых далеко не исчерпывается следующими явлениями: процессы в сетях волноводов, деформации и колебания стержневых решёток, деформации упругих сеток и струнно-стержневых систем (см., например [8]), диффузия в сетях (см., например [2]), распространение электрического потенциала в нейроне и нейронных сетях, бифуркация вихревых течений в жидкости, гемодинамика, колебания сложных молекул, расчёт гидравлических сетей – приводит к уравнениям гиперболического типа (см., например, [3])

$$u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) = u_t(x, t) \quad (1)$$

$$(x \in \Gamma, t > 0)$$

в котором Γ – геометрический граф, а коэффициент $q(x)$ – есть конечная линейная комбинация δ и δ' функций с носителями в точках из Γ

$$q(x) = \sum_i k_i \delta(x - x_i) + \sum_j \tilde{k}_j \delta'(x - \tilde{x}_j).$$

Особенностью поставленной задачи является выведение из рассмотрения реакции опоры на

приложенные возмущения, которое полностью реализуется только в поведении струны. Возможность конструирования плоскостных структур, как жёстко связанных друг с другом в горизонтальной плоскости с узлами совершающими колебания в вертикальной плоскости, так и в условиях упругой связи узлов даёт нам представление о моделях систем, устойчивое существование которых при наличии возбуждения всех узлов сети одновременно обусловлено упругими свойствами связей между этими объектами. Такие системы, к примеру, можно ассоциировать большими экономическими системами (БЭС) в условиях резких изменений внешней среды (кризисные состояния). Интерес в этом случае представляет решение следующих проблем:

1. Какова должна быть прочность упругой связи структурно нечувствительных к возбуждению субъектов, доставляющих устойчивость существования БЭС в целом.

2. Прогнозирование состояния упругих связей в любой наперёд заданный промежуток времени для любого субъекта (узла сети).

Какова должна быть реакция субъекта (с возможным изменением его характеристик) на возмущение всей сети для сохранения упругих связей с другими узлами сети.

Наиболее многогранным видится подход, в котором решение уравнения (1) может быть

© Найдюк Ф. О., Десятирикова Е. Н., Проскурин Д. К., 2013

представлено в явном виде, подходящем для построения вычислительных алгоритмов, наиболее пригодных к использованию вычислительных мощностей ЭВМ.

ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Рассмотрим колебания в вертикальной плоскости следующих систем:

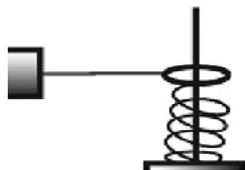


Рис. 1.

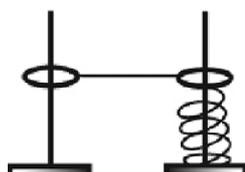


Рис. 2.

Определённые графически модели систем, могут быть описаны задачей

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & (0 < x < \ell, t > 0) \\ l_1(u(\cdot, t)) = 0, l_2(u(\cdot, t)) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq \ell) \end{cases}, \quad (2)$$

где ℓ определяет длину, а k – жёсткость, $\varphi \in C^2[0; \ell]$, а l_1 и l_2 определяются как: $l_2 y = y'(\ell) + ky(\ell)$, $l_1 y = y(0)$ или $l_1 y = y'(0)$, переменная t – определяет время.

Целью рассмотрения задачи (2) является получение численного алгоритма способного описать решение с любой наперёд заданной точностью.

Определение. Функцию $g(x, t, s)$, являющуюся решением задачи (2) заменой $\varphi(x)$ на φ , назовём фундаментальным решением задачи (2).

Замечание. Функция $G(x, s)$ – функция Грина краевой задачи

$$\begin{cases} y''(x) = f(x) \\ l_1 y = 0, l_2 y = 0. \end{cases}$$

Утверждение 1. Фундаментальное решение задачи (2) представимо в виде аналога формулы Даламбера-Эйлера (см., например, [11])

$$g(x, t, s) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + t, s) + \tilde{g}(x - t, s)), \quad (3)$$

где $\tilde{g}(y, s)$ определена соответственно:

$$\begin{aligned} & \text{при } -\ell \leq y - 2n\ell < -s \\ & \tilde{g}(y, s) = (-\mu)^n (\alpha_2(y - 2n\ell) + s) - \\ & - (-\mu)^n \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i^n(2ky) e^{-ky} \cdot (f_{n,i}(y, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{n,i}((2n - 1)\ell, s, \alpha_2, s)) - \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-\mu)^j \sum_{i=1}^j \mathfrak{R}_i^j(2ky) e^{-ky} \cdot (f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{j,i}((2j - 1)\ell, s, \alpha_2, s) + f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_1, 0) - \\ & - f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_1, 0) + \\ & + f_{j,i}((2j + 1)\ell, s, \alpha_2, -s) - f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_2, -s)), \end{aligned}$$

при $-s \leq y - 2n\ell < s$

$$\begin{aligned} & \tilde{g}(y, s) = (-\mu)^n \alpha_1(y - 2n\ell) - \\ & - (-\mu)^n \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i^n(2ky) e^{-ky} \cdot (f_{n,i}(2n\ell - s, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{n,i}((2n - 1)\ell, s, \alpha_2, s) + \\ & + f_{n,i}(y, s, \alpha_1, 0) - f_{n,i}(2n\ell - s, s, \alpha_1, 0)) - \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-\mu)^j \sum_{i=1}^j \mathfrak{R}_i^j(2ky) e^{-ky} (f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_1, 0) - \\ & - f_{j,i}((2j - 1)\ell - s, s, \alpha_2, s) + \\ & + f_{j,i}((2j + 1)\ell, s, \alpha_2, -s) + \\ & + f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_1, 0) - f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_2, -s)), \end{aligned}$$

при $s \leq y - 2n\ell < \ell$

$$\begin{aligned} & \tilde{g}(y, s) = (-\mu)^n \alpha_1(y - 2n\ell) - \\ & - (-\mu)^n \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i^n(2ky) e^{-ky} \cdot (f_{n,i}(2n\ell - s, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{n,i}((2n - 1)\ell, s, \alpha_2, s) + f_{n,i}(2n\ell + s, s, \alpha_1, 0) - \\ & - f_{n,i}(2n\ell - s, s, \alpha_1, 0) + \\ & + f_{n,i}(y, s, \alpha_2, -s) - f_{n,i}(2n\ell + s, s, \alpha_2, -s)) - \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-\mu)^j \sum_{i=1}^j \mathfrak{R}_i^j(2ky) e^{-ky} (f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_2, s) - \\ & - f_{j,i}(2j\ell - s, s, \alpha_1, 0) - \\ & - f_{j,i}((2j - 1)\ell - s, s, \alpha_2, s) + \\ & + f_{j,i}((2j + 1)\ell, s, \alpha_2, -s) + \\ & + f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_1, 0) - f_{j,i}(2j\ell + s, s, \alpha_2, -s)), \end{aligned}$$

где:

$$\mathfrak{R}_i^j(y) = \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_{j-i}^i(y)$$

($L_p^q(y)$ – ортогональные многочлены Лагерра с параметрами p и q),

$$f_{n,i}(y, s, b, \alpha_p) = e^{ky} \left(\frac{b}{k} y^i + \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^{m+1} y^{i-m-1} \left\{ b \frac{i \cdot \dots \cdot (i-m)}{k^{m+2}} - (\alpha_p - 2n\ell \cdot b) \cdot \frac{(i-1) \cdot \dots \cdot (i-m)}{k^{m+1}} \right\} \right),$$

$$(p = 1, 2), \mu = \mp 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + k(\ell - s)}{1 + k\ell}, \alpha_2 = \frac{2 + k(2\ell - s)}{1 + k\ell}.$$

Более того $\tilde{g}(-y, s) = -\tilde{g}(y, s)$ при $y \geq 0$.

Доказательство представления фундаментального решения в виде (3) основано на представлении решения смешанной задачи (2) в виде аналога формулы Даламбера-Эйлера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\psi(x+t) + \psi(x-t)),$$

а так же представлении функции $\psi(y)$ на любом полуинтервале вида $[(2n-1)\ell, (2n+1)\ell]$ ($n \in \mathbf{N}$) в виде конечной суммы:

$$\begin{aligned} \psi(y) = & (-\mu)^n \psi_1(y - 2n\ell) - \\ & - (-\mu)^n \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_i^n(2ky) \times \\ & \times \int_{(2n-1)\ell}^y t^{i-1} e^{k(t-x)} \psi_1(t - 2n\ell) dt - \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-\mu)^j \sum_{i=1}^j \mathfrak{R}_i^j(2ky) \times \\ & \times \int_{(2n-1)\ell}^{(2n+1)\ell} t^{i-1} e^{k(t-x)} \psi_1(t - 2n\ell) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathfrak{R}_i^j(y) = \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_{j-i}^i(y)$ ($L_p^q(y)$ – ортогональные многочлены Лагерра с параметрами p и q),

$$\psi_1(y) = \begin{cases} -\varphi(-y) & -\ell \leq y \leq 0 \\ \varphi(y) & 0 \leq y \leq \ell \end{cases}$$

$$\mu = -1 \text{ при } l_1 y = y(0);$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \varphi(-y) & -\ell \leq y \leq 0 \\ \varphi(y) & 0 \leq y \leq \ell \end{cases}$$

$$\mu = 1 \text{ при } l_1 y = y'(0);$$

(см., например, [6]).

Утверждение 2. Решение $u(x, t)$ задачи (2) представимо в виде

$$u(x, t) = - \int_0^l g(x, t, s) \varphi''(s) ds. \quad (5)$$

Доказательство непосредственно вытекает из свойств функции $g(x, t, s)$, среди которых распространение скачков производной $g(x, t, s)$ вдоль характеристик и их совпадение по модулю (см., например, [7]), а так же исходя из его представления в виде (3).

В итоге, численный алгоритм решения задачи (2) фактически представляет алгоритм приближённого вычисления интеграла (5).

Построенный на основании утверждений 1-2 численный алгоритм поиска решения задачи (2) позволяет находить решение задачи с любой наперёд заданной точностью для достаточно больших временных промежутков, при этом количество вычислений и точная оценка погрешности (метода) будут зависеть лишь от выбора алгоритма численного интегрирования.

Для сравнения построенной вычислительной схемы проведём, для примера, сравнение с весьма распространённым методом решения подобных задач: разностной схемой, основанной на теореме о среднем для волнового уравнения.

Итак, разностная схема рассмотренной модели колебания струны будет иметь следующий вид (см., например, [1], [10])

$$\begin{cases} -\frac{1}{q^2} u_{i,j+1} - \frac{1}{q^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{h^2} u_{i+1,j} + \\ + \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{2}{q^2} \right) u_{i,j} = 0, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j < m \\ u_{0,j} = 0, 1 \leq j \leq m \\ u_{n,1} = \frac{q^2}{h^2} \varphi_{n-1} + \left(1 - \frac{q^2}{h^2} - k \frac{q^2}{h} \right) \varphi_n, \\ -\frac{1}{q^2} u_{n,j+1} - \frac{1}{q^2} u_{n,j-1} + \frac{2}{h^2} u_{n-1,j} + \\ + \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{2}{q^2} - \frac{2k}{h} \right) u_{n,j} = 0, 1 \leq j \leq m-1, \\ u_{i,0} = \varphi_i, 0 \leq i \leq n, \\ u_{i,1} = \frac{q^2}{2} \left(-\frac{1}{h^2} \varphi_{i+1} - \frac{1}{h^2} \varphi_{i-1} - \left(-\frac{2}{h^2} + \frac{2}{q^2} \right) \varphi_{i+1} \right), \\ 1 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

где $x = ih$, $t = jq$ ($i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$, $n, m \in \mathbf{N}$) разбиение сеткой области $D = (0, \ell) \cup R^+$.

Известно (см., например, [9]), что после замены задачи (2) указанной разностной схемой получим погрешность аппроксимации

(метода) порядка h^2 (в предположении существования ограниченных производных $u(x, t)$ до четвёртого порядка включительно). Однако данный классический сеточный метод имеет недостатки, к которым следует отнести:

- все оценки погрешности в доказательстве сходимости последовательных приближений определены в предположениях об искомом решении, поэтому являются недостаточными в том отношении, что в них входят максимальные значения модулей производных некоторого порядка от разыскиваемого решения; причём эти значения должны быть определены из дополнительных соображений или же вычислены приближённо по найденным приближённым значениям функции, путём замены этих производных их выражениями через разности или разностные отношения;

- для вычисления решения в какой-то момент времени необходимо найти значения этого решения на всех предыдущих временных слоях, что при достаточно больших значениях моментов времени выглядит «неэкономично».

Замечание. В приведённом выше сравнении применения разностной схемы для решения задачи (2) мы ограничились лишь моделью колебания для случая $l_1 y = y(0)$; случай же $l_1 y = y'(0)$ анализируется аналогично, с точностью до замены.

ОБОБЩЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА НА МОДЕЛЯХ КОЛЕБАНИЙ СЕТЕЙ

Обозначим через $S(\ell; k_1; k_2; \varphi(y))$ (аналог задачи (2)):

$$\begin{cases} u_{yy}(y, t) = u_{tt}(y, t), & (0 < y < \ell, t > 0), \\ u_y(0, t) - k_1 u(0, t) = 0, \\ u_y(\ell, t) + k_2 u(\ell, t) = 0, & (t > 0), \\ u(y, 0) = \varphi(y), u_t(y, 0) = 0, & (0 \leq y \leq \ell), \end{cases} \quad (6)$$

$k_1, k_2 \geq 0$ (не исключена возможность и $k_1 = +\infty$ и/или $k_2 = +\infty$).

Замечание. Для решения задачи $S(\ell; k_1; k_2; \varphi(y))$ применим численный алгоритм, основанный на (5). Возможность применения численного алгоритма, основанного на (5), в случае $0 < k_1 \cdot k_2 < +\infty$ будет оговорена ниже.

Рассмотрим колебания в вертикальной плоскости, например, следующих систем:

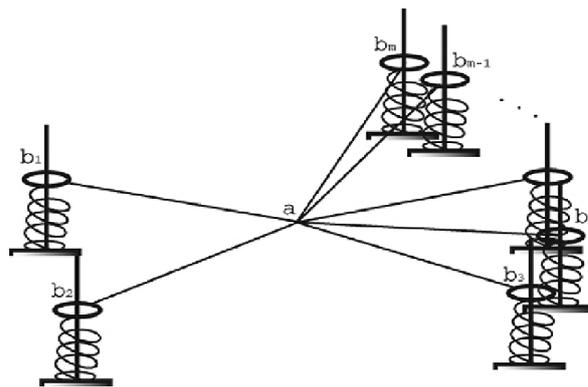


Рис. 3.

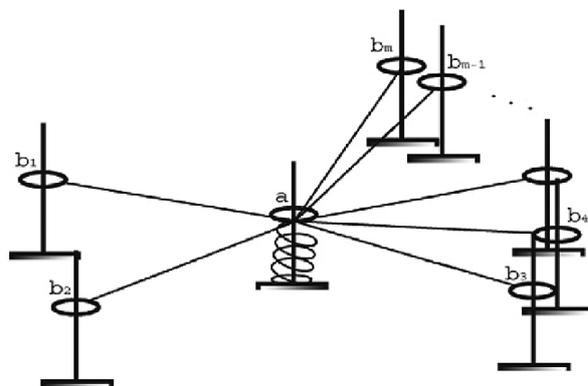


Рис. 4.

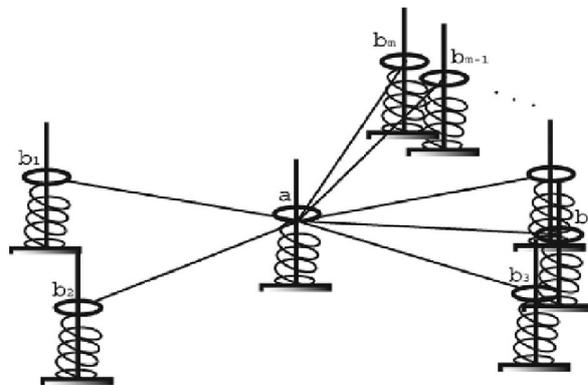


Рис. 5.

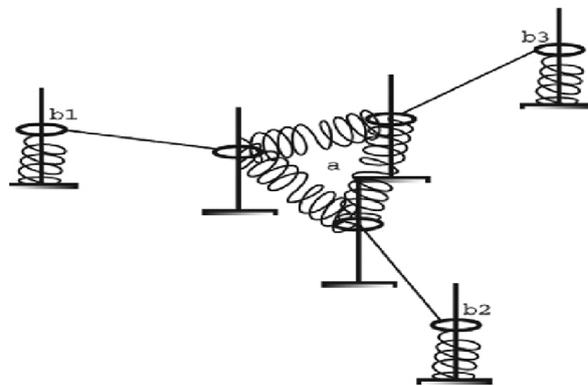


Рис. 6.

В каждой из систем была оказана внешняя мгновенная сила, придавшая системе (струн) начальную деформацию $\varphi(x)$, после чего никакого внешнего воздействия на систему не оказывалось (подобные модели, но более простые и в частном случае рассмотрены, например, см. [4], [5]).

Каждая из моделей, приведённая выше, аналитически может быть описана задачей (1) при условиях

$$\begin{aligned} u(x+0 \cdot h, t) &= 0 \\ (x \in \partial\Gamma, h \in D(x), t \geq 0) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = 0 \\ (x \in \bar{\Gamma}). \end{aligned} \quad (8)$$

По аналогии с (6), будем обозначать через $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ – задачу (1), (7)-(8) (понимается как [7]) на графе-звезде, где k_1 – коэффициент, определённый для общей вершины степени m , которую договоримся обозначать через a , а k_2 – коэффициент, определённый для всех остальных вершин, которые будем обозначать через b_1, b_2, \dots, b_m .

Покажем, что для задачи $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ так же применим численный подход отыскания решения, основанный на (5).

Утверждение 3. Пусть существует $u(x, t)$ – решение задачи (1), (7)-(8). Тогда оно единственно.

На рассматриваемом графе-звезде Γ определим ориентацию следующим образом:

$$h_i = \frac{1}{\|b_i - a\|} (b_i - a).$$

Определим m вспомогательных операторов заданных на $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} (F\varphi)(x) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi(a + \|x - a\| h_i), \\ (G_i\varphi)(x) &= \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \begin{cases} (F\varphi)(x) - \varphi(a + \|x - a\| h_i), & x \in \bar{\gamma}_1 \\ \varphi(a + \|x - a\| h_i) - (F\varphi)(x), & x \in \bar{\gamma}_i \\ 0, & x \in \Gamma \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_i) \end{cases} \quad (10)$$

Определение. Класс начальных данных задачи $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$, определяемый условиями $\varphi(x) \in \tilde{C}^2(R(\Gamma))$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi_{hh}^{++}(x) = 0$ для

$$\begin{aligned} x \in \partial\Gamma \left(\varphi_h^+(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varphi(a + \varepsilon h) - \varphi(a)}{\varepsilon} \right); \sum_{h \in D(z)} \varphi_h^+(z) - \\ - k_z \varphi(z) = 0, \varphi_{hh}^{++}(z) = \varphi_{h_1 h_1}^{++}(z) \text{ для } z \in J(\Gamma) \text{ и любых} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h, h_1 \in D(z) \left(D(z) = \{h \in \mathbf{R}^n : \|h\| = 1, \forall (\varepsilon > 0) \forall \right. \\ \left. \forall (a \in \Gamma) [a + \varepsilon h \in \Gamma] \} \right), \varphi_h(y + 0 \cdot h) = \sum_{\eta \in D(y) \setminus \{h\}} \tilde{k}_y \times \\ \times (\varphi(y + 0 \cdot h) - \varphi(y + 0 \cdot \eta)) \text{ для } y \in Y \ (Y \subset \{a, \\ b_1, \dots, b_m\}) \text{ будем обозначать через} \\ K_m^B(\ell; Y; k_1; k_2). \end{aligned}$$

Утверждение 4. Пусть $\psi: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ и $\psi \in K_m^B(\ell; Y; k_1; k_2)$, тогда $(F\psi)(x)$ и $(G_i\psi)(x)$ (для любого $i = 2, m$) принадлежат классу $K_m^B(\ell; Y; k_1; k_2)$, причём $(F\psi)_h^+(a) = (F\psi)_\eta^+(a)$, $(G_i\psi)(a) = (G_i\psi)_{hh}^{++}(a) = 0$ (для любых $h, \eta \in D(a)$, $i = 2, m$).

Доказывается проверкой выполнения условий определения класса начальных данных $K_m^B(\ell; Y; k_1; k_2)$.

Следствие. Решение задачи $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ $u^\varphi(x, t)$ ($x \in \Gamma$, $t > 0$) представимо в виде

$$u^\varphi(x, t) = u^{(F\varphi)}(x, t) + \sum_{i=2}^m u^{(G_i\varphi)}(x, t), \quad (11)$$

где $u^{(F\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; (F\varphi)(x))$, а $u^{(G_i\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; (G_i\varphi)(x))$ ($i = 2, m$).

Утверждение 5. Пусть $\varphi(x) \in K_m^B(\ell; 0; k_1; k_2)$, где пара (k_1, k_2) принимает одно из четырёх значений $(0, k)$, $(k, 0)$, $(k, +\infty)$ или (mk, k) (k – некоторое положительное число). Тогда:

1) $u^{(F\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; 0; k_1; k_2; (F\varphi)(x))$ существует, причём для любого $h \in D(a)$ функция $u^{(F\varphi)}(a + yh, t)$ не зависит от выбора h и является решением задачи

$$S\left(\ell; \frac{k}{m}; k_2; (F\varphi)(a + yh)\right);$$

2) $\forall (i = \overline{2, m})$ $u^{(G_i\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; 0; k_1; k_2; (G_i\varphi)(x))$ существует, причём функция $u^{(G_i\varphi)}(a + yh_i, t)$ является решением задачи $S(\ell; +\infty; k_2; (G_i\varphi)(a + yh_i))$ и, кроме того, $u^{(G_i\varphi)}(a + yh_i, t) = -u^{(G_i\varphi)}(a + yh_i, t)$ и, если $h \notin \{h_1, h_i\}$, то $u^{(G_i\varphi)}(a + yh, t) \equiv 0$.

Следствие. Решение задачи $S(\ell; k; k; \psi(y))$ ($0 < k < +\infty$) существует и единственно, может быть представлено в явном виде в форме аналога формулы Даламбера-Эйлера и является решением задачи $B_2\left(\frac{\ell}{2}; 0; 0; k; (F\varphi)(x)\right)$ при $\psi(y) = (F\varphi)(a + yh)$.

Утверждение 6. Пусть $\varphi(x) \in K_m^B(\ell; \{a\}; k_1; k_2)$, где пара (k_1, k_2) принимает одно из трёх

значений $\left(\frac{k}{m}, 0\right)$, $\left(\frac{k}{m}, k\right)$ или $\left(\frac{k}{m}, +\infty\right)$ (k – не-

которое положительное число). Тогда:

3) $u^{(F\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; \{a\}; k_1; k_2; (F\varphi)(x))$ существует, причём для любого $h \in D(a)$ функция $u^{(F\varphi)}(a + yh, t)$ не зависит от выбора h и является решением задачи $S(\ell; 0; k_2; (F\varphi)(a + yh))$;

4) $\forall (i = 2, m)$ $u^{(G_i\varphi)}(x, t)$ – решение задачи $B_m(\ell; \{a\}; k_1; k_2; (G_i\varphi)(x))$ существует, причём функция $u^{(G_i\varphi)}(a + yh_1, t)$ является решением задачи $S(\ell; k; k_2; (G_i\varphi)(a + yh_1))$ и, кроме того, $u^{(G_i\varphi)}(a + yh_i, t) = -u^{(G_i\varphi)}(a + yh_1, t)$ и, если $h \notin \{h_1, h_i\}$, то $u^{(G_i\varphi)}(a + yh, t) \equiv 0$.

Из (11), а также утверждений 5-6 непосредственно вытекает возможность применения численного алгоритма описанного в утверждениях 1-2 (основанного на (5)) для отыскания решения колебательных моделей обозначенных как $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$.

Таким образом, полученные решения математически обеспечивают алгоритм решения волнового уравнения на геометрическом графе с δ сингулярным возмущением средствами программного продукта, разработанного в среде C++.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И.С. Методы вычислений: в 2-х т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – Т. 2. – 171 с.

Найдюк Ф. О. – к. ф.-м. наук, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Десятирикова Е. Н. – д.э.н., проф., кафедры информационных систем, Воронежский государственный университет.

Проскурин Д. К. – к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой прикладной информатики и информационных систем, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет. E-mail: pdk@vgasu.vrn.ru

2. Боровикова М. М. Моделирование диффузии вещества в плоской случайно-неоднородной среде / М. М. Боровикова, В. Г. Задорожный // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии – 2006. – № 2. – С. 10–18.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный [и др.]. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

4. Копытин А. В. Моделирование процесса распространения волн на сети / А. В. Копытин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии – 2008. – № 1. – С. 11–13.

5. Копытин А. В. Об одной особенности распространения волн на сети / А. В. Копытин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии – 2009. – № 2. – С. 10–12.

6. Найдюк Ф.О. Исследование формулы Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода / Ф. О. Найдюк; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2003. – Деп. в ВИНТИ 07.07.03, 23 с. – № 1288-B2003.

7. Покорный Ю.В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских // Докл. РАН. – 2003, – Т. 388, № 1. – с. 16–18.

8. Провоторов В.В. Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты / В. В. Провоторов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный Анализ и Информационные Технологии – 2006. – № 2. – С. 28–35.

9. Рябенский В.С. Об устойчивости разностных уравнений / В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1956. – 171 с.

10. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

11. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1953. – 680 с.

Naydyuk F. O. – Candidate of physics-math. Sciences, Senior Lecturer of the dept. Higher and Applied Mathematics, Moscow State University of Railway Transport.

Desyatirikova Elena N. – doctor of economy Sciences, Professor of the dept. of the Information Systems, Voronezh State University

Proskurin D. K. – Candidate of physics-math. Sciences, Senior Lecturer of the dept. Applied Computer Science and Information Systems, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. E-mail: pdk@vgasu.vrn.ru