

# ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПОДПРОСТРАНСТВ КРЫЛОВА

В. Г. Курбатов\*, С. Д. Кургалин\*\*

\* Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

\*\* Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.03.2013 г.

**Аннотация.** Обсуждаются методы понижения размерности модели динамической системы, основанный на использовании подпространств Крылова. Приводится численный пример.

**Ключевые слова:** подпространства Крылова, система пониженной размерности, пассивность.

**Annotation.** Methods of the reduction of the dimension of the model of a dynamic system based on the usage of Krylov's subspaces are discussed. A numerical example is given.

**Keywords:** Krylov subspaces, reduced-order system, passivity.

## ВВЕДЕНИЕ

В системном анализе нередко возникает ситуация, когда имеющаяся большая модель динамической системы может быть упрощена без существенного изменения ее основных характеристик. Такая возможность может быть связана с тем, что модель составлялась без детального учета физических свойств процесса (например, с помощью компьютерной программы, работающей по стандартному алгоритму) или с тем, что в реально большой системе нас интересует не ее работа в целом, а влияние лишь одного из входов на один из выходов. Излишняя сложность модели обычно проявляется в том, что какие-то из ее частей могут оказаться (почти) неуправляемыми или (почти) ненаблюдаемыми.

Переход к более простой модели оправдан, когда рассматриваемая динамическая система является частью другой и желательно сделать ситуацию доступной для дальнейшего качественного анализа или компьютерного исследования (см., например, [1]).

В последние годы для понижения размерности моделей динамических систем широко используются методы, основанные на использовании подпространств Крылова. Целью настоящей работы является описание двух новых модификаций таких методов. В обсуждаемом классе методов выбор точек интерполяции  $\lambda_j$  обычно проводится, исходя из интуитивных соображе-

ний. Мы предлагаем при выборе точек  $\lambda_j$  использовать информацию о числовом образе коэффициента  $A$  или, в качестве частного случая такой информации, о пассивности рассматриваемой динамической системы. В заключение приводятся результаты численного эксперимента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель динамической системы

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= \langle x(t), d \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

со скалярным входом  $u$  и выходом  $y$ . Здесь  $A$  – (вообще говоря, комплексная) матрица размера  $N \times N$ ,  $b$  и  $d$  – заданные  $N$ -мерные векторы, а символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает обычное скалярное произведение в  $\mathbb{C}^N$ . Для простоты будем предполагать, что система экспоненциально устойчива.

Переход от модели к другой модели, в которой размерность фазового вектора  $\hat{x}$  меньше размерности фазового вектора  $x$  исходной системы (1), но которая сохраняет наиболее существенные особенности системы, называют *понижением размерности*. Модель пониженной размерности будем записывать в виде

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t), \\ \hat{y}(t) &= \langle \hat{x}(t), \hat{d} \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

а размерность фазового вектора  $\hat{x}$  обозначать через  $n$ .

(Операторной) импульсной характеристикой системы называют матричнозначную функ-

цию  $H$ , равную нулю на  $(-\infty, 0)$  и удовлетворяющую уравнению

$$H'(t) - AH(t) = \mathbf{1}\delta(t),$$

где  $\delta$  – функция Дирака, а  $\mathbf{1}$  – единичная матрица. Хорошо известно, что

$$H(t) = \begin{cases} e^{At}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mathbf{1} - \lambda A)^{-1} d\lambda,$$

а  $\Gamma$  – контур, окружающий собственные значения матрицы  $A$ . (Скалярной) импульсной характеристикой системы называют скалярную функцию  $h$ , равную нулю на  $(-\infty, 0)$  и являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} Fx'(t) &= Gx(t) + b\delta(t), \\ h(t) &= \langle x(t), d \rangle, \end{aligned}$$

Импульсная характеристика важна потому, что решение задачи при произвольном входе  $u$  может быть выражено через нее по формуле

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)u(s)ds.$$

Непосредственной подстановкой в соотношения (1) проверяется, что операторная и скалярная импульсные характеристики связаны соотношением

$$h(t) = \langle H(t)b, d \rangle. \quad (3)$$

Тем самым

$$h(t) = \left\langle \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mathbf{1} - \lambda A)^{-1} d\lambda \right] b, d \right\rangle, \quad (4)$$

$$t > 0.$$

Символом  $\hat{h}$  обозначим скалярную импульсную характеристику системы пониженного порядка.

Частотной характеристикой (операторной или скалярной) системы называют преобразование Лапласа соответствующей импульсной характеристики. Можно показать [2, 3], что скалярная частотная характеристика системы представима в виде

$$\tilde{h}(\lambda) = \langle (\mathbf{1} - \lambda A)^{-1} b, d \rangle.$$

Символом  $\tilde{\hat{h}}$  обозначим скалярную частотную характеристику системы пониженного порядка.

Будем различать две постановки задачи. Первая предполагает, что размер матрицы  $A$  настолько велик, что (требуется слишком вы-

сокое быстродействие и объем памяти компьютера, в результате чего) расчет непосредственно системы невозможен. В этих условиях построение системы пониженного порядка приходится проводить «вслепую». Мы рассматриваем другую постановку задачи. Предполагается, что размер матрицы  $A$  является умеренным в том смысле, что характеристики (импульсная и частотная) системы могут быть найдены, хотя это и требует заметных затрат времени, а ответ получается весьма громоздким. По этой причине для дальнейшей работы вместо модели (являющейся, например, частью другой системы) желательно иметь более простую модель, имеющую близкие к исходной характеристики.

Близость характеристик систем и разумно понимать как малость величин

$$\int_0^{+\infty} |\hat{h}(t) - h(t)| dt, \sup_{\omega \in R} |\tilde{\hat{h}}(i\omega) - \tilde{h}(i\omega)|.$$

Очевидно, вторая величина не превосходит первую. По этой причине первая величина представляется более предпочтительной в качестве количественной меры близости.

Построение  $\hat{h}$ , явно или неявно, сводится к приближению функции  $h$  линейной комбинацией функций вида  $t \mapsto t^{q-1} e^{\mu t}$ . Но прямое (явное) решение этой задачи наталкивается на два препятствия. Во-первых, норма  $L_1$ , в которой  $\hat{h}$  должна приближать  $h$ , обладает негладким шаром. Поэтому методы нахождения экстремумов, основанные на вычислении производных, непосредственно применять затруднительно, см., например, [4]. Во-вторых, набор функций вида  $t \mapsto t^{q-1} e^{\mu t}$  близок к линейно зависимому. Это приводит к тому, что задача непосредственного разложения по этим функциям плохо обусловлена. Таким образом, желательны какие-то альтернативные методы приближения.

## 2. МЕТОД ПОДПРОСТРАНСТВ КРЫЛОВА

В настоящей статье обсуждается метод построения модели, основанный на применении подпространств Крылова. Этот метод в значительной мере является эвристическим. Это означает, что он не дает гарантированного результата. Тем не менее, он подразумевает, что система пониженной размерности строится по известному алгоритму, который может быть запрограммирован. Этот алгоритм содержит параметры (точки  $\lambda_j$  и их кратности  $\kappa_j$  и  $\chi_j$ ), которые можно менять. Некоторые рекомен-

дации по выбору этих параметров приводятся ниже в разделе 4. Предполагается, что импульсная характеристика исходной системы может быть найдена. Таким образом, импульсную характеристику  $\hat{h}$  системы пониженной размерности можно сравнить с импульсной характеристикой  $h$  исходной системы и проверить, является ли качество приближения приемлемым. Если – нет, можно попробовать построить приближение с другими параметрами. Численные эксперименты показывают, что в большинстве случаев можно получить приближение хорошего качества за небольшое число итераций.

Основная идея построения модели восходит к Галеркину и заключается в определении коэффициентов системы по формулам

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \Lambda A V, \\ \hat{b} &= \Lambda b, \\ \hat{d} &= V^* d, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Lambda$  и  $V$  – некоторые (вообще говоря, комплексные) матрицы размеров  $n \times N$  и  $N \times n$  соответственно, удовлетворяющие условию нормировки<sup>1</sup>.

$$\Lambda V = \mathbf{1}_{n \times n}. \quad (6)$$

Основная проблема заключается в удачном выборе матриц  $\Lambda$  и  $V$ .

*Подпространством Крылова*, порожденным вектором  $b$  и матрицей  $A$ , называют [5, п. 33.22] линейную оболочку векторов  $b, Ab, A^2b, \dots, A^{\chi_0-1}b$ , где  $\chi_0$  – некоторое число. Двойственное подпространство Крылова определяют как линейную оболочку векторов  $d, A^*d, A^{*2}d, \dots, A^{*\chi_0-1}d$  (здесь и далее  $T^*$  – эрмитово-сопряженная к матрице  $T$ ). Хорошо известно (см., например, [6, гл. 6, § 3]), что в теории управления такие подпространства связывают с понятиями управляемости и наблюдаемости. Это обстоятельство можно рассматривать как наводящее соображение для следующего способа построения матриц  $\Lambda$  и  $V$ .

В простейшей реализации метод подпространств Крылова применительно к системе означает, что линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  должна совпадать с линейной оболочкой векторов  $b, Ab, A^2b, \dots, A^{\chi_0-1}b$ . При этом матрицу  $\Lambda$  обычно определяют в соответствии

<sup>1</sup> Не вдаваясь в подробности, отметим, что условие нормировки нужно для того, чтобы в уравнении  $\hat{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t)$  коэффициент перед  $\hat{x}'$  оказался единичным.

с одним из следующих двух способов [2, 7–9]. В первом, называемом *методом Ланцоша*, линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $d, A^*d, A^{*2}d, \dots, A^{*\chi_0-1}d$ . А во втором, называемом (*прямым*) *методом Арнольди*, матрица  $\Lambda$  определяется как  $V^*$ . Один из недостатков описанного варианта методов Ланцоша и Арнольди состоит в том, что векторы последовательности  $b, Ab, A^2b, \dots$  довольно скоро становятся линейно зависимыми в пределах точности машинной арифметики. Поэтому размерность  $n$  системы может оказаться недостаточно большой, чтобы сохранить все существенные особенности исходной системы. Чтобы преодолеть эту трудность, требуют, чтобы линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  содержала дополнительно векторы  $(1 - \lambda_j A)^{-1}b, (1 - \lambda_j A)^{-2}b, \dots, (1 - \lambda_j A)^{-\chi_j}b$ ; где  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  – некоторые точки, не являющиеся собственными значениями матрицы  $A$ , которые будем называть дополнительными *точками интерполяции*, а  $\chi_j$  – некоторые числа, которые будем называть *кратностями*. Соответственно в методе Арнольди требуют, чтобы линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda$  дополнительно содержала векторы  $(1 - \lambda_j A^*)^{-1}d, (1 - \lambda_j A^*)^{-2}d, \dots, (1 - \lambda_j A^*)^{-\chi_j}d$ . Приводимые ниже теоремы 1 и 2 объясняют, почему методы подпространств Крылова дают хорошие приближения.

Следующая теорема показывает, что применение методов Ланцоша и Арнольди равносильно замене функции  $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$  в формуле ее рациональной интерполяцией.

**Теорема 1 [10, теорема 7.1].** Пусть точки  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$  не являются собственными значениями как матрицы  $A$ , так и матрицы  $\hat{A}$ . Пусть линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  содержит векторы  $(1 - \lambda_j A)^{-k}b, k = 1, \dots, \chi_j, j = 1, \dots, p$ , а линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda^*$  содержит векторы  $(1 - \lambda_j A^*)^{-m}d, m = 1, \dots, \chi_j, j = 1, \dots, p$ .

Пусть, кроме того, линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  содержит векторы  $A^k b, k = 0, 1, \dots, \chi_0 - 1$ , а линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda^*$  содержит векторы  $A^{*m}d, m = 0, 1, \dots, \chi_0 - 1$ .

Тогда

$$\hat{h}(t) = \left\langle \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} r_i(\lambda)(1 - \lambda A)^{-1} d\lambda \right] b, d \right\rangle, \quad t > 0,$$

где  $\Gamma$  – контур, окружающий собственные значения матрицы  $A$ , а  $r_i$  – рациональная функция вида

$$r_i(\lambda) = \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^{\chi_j + \chi_j} \frac{c_{ij}(t)}{(\lambda_j - \lambda)^l} + \sum_{l=0}^{\chi_0 + \chi_0 - 1} c_{i0}(t)\lambda^l, \quad (7)$$

интерполирующая функцию  $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$  в собственных значениях  $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_q \in \mathbb{C}$  матрицы  $\hat{A}$  с производными до порядков  $\hat{w}_1 - 1, \dots, \hat{w}_q - 1$  включительно<sup>2</sup>. Здесь  $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_q$  – кратности соответствующих собственных значений матрицы  $\hat{A}$ .

Следующая теорема показывает, что применение методов Ланцоша и Арнольди порождает систему пониженного порядка, частотная характеристика которой интерполирует частотную характеристику исходной системы.

**Теорема 2** [3, теорема 3.1], [10, следствие 6.1].

(а) Пусть точка  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  не является собственным значением как матрицы  $A$ , так и матрицы  $\hat{A}$ . Пусть линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  содержит векторы  $(1 - \lambda_j A)^{-k} b$ ,  $k = 1, \dots, \chi$ , а линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda^*$  содержит векторы  $(1 - \lambda_j A^*)^{-m} d$ ,  $m = 1, \dots, \chi$ . Тогда первые члены разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $\lambda_j$  частотной характеристики  $\hat{h}$  системы пониженного порядка совпадают вплоть до степеней  $(\lambda - \lambda_j)^{\chi + \chi - 1}$  включительно с соответствующими слагаемыми разложения частотной характеристики  $\hat{h}$  исходной системы.

(б) Пусть линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  содержит векторы  $A^k b$ ,  $k = 0, 1, \dots, \chi - 1$ , а линейная оболочка столбцов матрицы  $\Lambda^*$  содержит векторы  $A^m d$ ,  $m = 0, 1, \dots, \chi - 1$ . Тогда первые члены разложения в ряд Лорана в окрестности бесконечности частотной характеристики  $\hat{h}$  системы пониженного порядка совпадают вплоть до степеней  $\lambda^{-(\chi + \chi) + 1}$  включительно с соответствующими слагаемыми разложения частотной характеристики  $\hat{h}$  исходной системы.

Теорема говорит, что метод Ланцоша позволяет добиться интерполяции удвоенного порядка при той же размерности  $n$  фазового вектора  $\hat{x}$  системы (2) пониженной размерности. Казалось бы, такая интерполяция предпочтительнее. Но это впечатление

<sup>2</sup> Тем самым функции  $c_{ij}$  являются линейными комбинациями функций  $t \mapsto t^{q-1} e^{\hat{\mu}_i t}$ .

обманчиво. Во-первых, условие нормировки может приводить к тому, что нормы матриц  $\Lambda$  и  $V$  в методе Ланцоша могут оказаться весьма большими, что вызовет плохую обусловленность матрицы  $\hat{A}$ , в то время как в случае метода Арнольди ( $\Lambda = V^*$ ) условие означает, что столбцы матрицы  $V$  ортонормированы, и поэтому  $\|V\| = \|\Lambda\| = 1$ . Во-вторых, при использовании метода Ланцоша больше шансов получить неустойчивую систему при устойчивой системе, см. подробнее раздел 3. В связи с этим мы рекомендуем не пользоваться методом Ланцоша и предлагаем две дополнительные модификации метода Арнольди.

*Сопряженным методом Арнольди* будем называть метод, в котором линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $A^{*m} d$ ,  $m = 0, 1, \dots, \chi_0 - 1$ , а также векторов  $(1 - \lambda_j A^*)^{-m} d$ ,  $m = 1, \dots, \chi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . При этом матрица  $\Lambda$  определяется как  $V^*$ .

*Смешанным методом Арнольди* будем называть метод, в котором линейная оболочка столбцов матрицы  $V$  совпадает с линейной оболочкой векторов  $A^k b$ ,  $k = 0, 1, \dots, \chi_0 - 1$ , и  $A^{*m} d$ ,  $m = 0, 1, \dots, \chi_0 - 1$ , а также векторов  $(1 - \lambda_j A)^{-k} b$ ,  $k = 1, \dots, \chi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  и  $(1 - \lambda_j A^*)^{-m} d$ ,  $m = 1, \dots, \chi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . При этом матрица  $\Lambda$  определяется как  $V^*$ .

Еще раз отметим, что в силу условия нормировки столбцы матрицы  $V$  образуют ортонормированный базис в линейной оболочке векторов, определяющих  $V$ . Следующее предложение показывает, что независимо от того, как строится этот базис, характеристики системы оказываются одними и теми же.

**Предложение 1.** Пусть  $S$  – произвольная унитарная ( $S^* S = 1$ ) матрица. Положим  $V_1 = VS$ ,  $\Lambda_1 = S^* \Lambda$ ,

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \Lambda_1 A V_1, \\ \hat{b}_1 &= \Lambda_1 b, \\ \hat{d}_1 &= V_1^* d. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи

$$\begin{aligned} \hat{x}'_1(t) &= A_1 \hat{x}_1(t) + \Lambda_1 b u(t), \\ \hat{y}(t) &= \langle \hat{x}_1(t), V_1^* d \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

совпадает с решением задачи.

*Доказательство.* Запишем систему в виде

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \Lambda A V \hat{x}(t) + \Lambda b u(t), \\ \hat{y}(t) &= \langle \hat{x}(t), V^* d \rangle, \end{aligned}$$

и сделаем в ней замену  $\hat{x} = S\hat{x}_1$ :

$$S\hat{x}'_1(t) = \Lambda A V S\hat{x}_1(t) + \Lambda b u(t),$$

$$\hat{y}(t) = \langle S\hat{x}_1(t), V^* d \rangle.$$

Умножим уравнение на  $S^*$  и преобразуем эту запись с учетом равенства  $S^*S = \mathbf{1}$ :

$$\hat{x}'_1(t) = S^* \Lambda A V S\hat{x}_1(t) + S^* \Lambda b u(t),$$

$$\hat{y}(t) = \langle \hat{x}_1(t), S^* V^* d \rangle.$$

Или

$$\hat{x}'_1(t) = \Lambda_1 A V_1 \hat{x}_1(t) + \Lambda_1 b u(t),$$

$$\hat{y}(t) = \langle \hat{x}_1(t), V_1^* d \rangle.$$

Получилась система .

### 3. ПАССИВНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Наиболее важный для приложений класс динамических систем образуют экспоненциально устойчивые системы. К сожалению, экспоненциальная устойчивость не всегда сохраняется при переходе к системам пониженного порядка. Приведем соответствующий пример.

**Пример.** Рассмотрим систему со следующими параметрами

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$b = d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эта система экспоненциально устойчива, поскольку собственные значения матрицы  $A$  (числа  $-1$  и  $-2$ ) лежат в левой полуплоскости. Рассмотрим систему пониженного порядка, которая построена по правилу с помощью матриц

$$V = \Lambda^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилом имеем

$$\hat{A} = \Lambda A V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{b} = \Lambda b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{d} = V^* d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система в рассматриваемом случае имеет вид

$$\hat{x}'(t) = \hat{x}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} u(t),$$

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} x(t).$$

Очевидно, эта система неустойчива.

Таким образом, пример показывает, что при переходе к системе пониженного порядка может наблюдаться потеря устойчивости. Тем не менее, как следует из предложения 3, при применении методов Петрова-Галеркина (в частности, Арнольди) сохраняется другое близкое свойство – пассивность.

Систему называют *пассивной*, если для некоторого  $\alpha > 0$  выполняется неравенство

$$Re\langle Ax, x \rangle \leq \alpha \langle x, x \rangle, x \in \mathbb{C}^N.$$

Свойство пассивности физически означает, что система рассеивает энергию. Типичный пример пассивной системы – линейная *RLC*-цепь. Нетрудно показать, что система с матрицей  $A$  из примера 1 не является пассивной.

**Предложение 2.** Если система пассивна, то она экспоненциально устойчива.

*Доказательство.* Пусть  $\psi$  – собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$ . Тогда из равенства

$$\langle A\psi, \psi \rangle = \lambda \langle \psi, \psi \rangle = \lambda \|\psi\|^2$$

видно, что собственное значение  $\lambda$  лежит в левой полуплоскости.

Следующее предложение показывает, что при построении систем пониженного порядка методами Петрова-Галеркина пассивность сохраняется.

**Предложение 3.** Пусть система пассивна. Пусть при построении системы пониженного порядка выполняется тождество  $\Lambda = V^*$  и условие нормировки. Тогда система также пассивна и, следовательно, экспоненциально устойчива.

*Доказательство.* Действительно,

$$Re\langle \hat{A}x, x \rangle = Re\langle \Lambda A Vx, x \rangle =$$

$$= Re\langle V^* A Vx, x \rangle =$$

$$= Re\langle A Vx, Vx \rangle \leq \alpha \langle Vx, Vx \rangle =$$

$$= \alpha \langle x, V^* Vx \rangle = \alpha \langle x, \Lambda Vx \rangle = \alpha \langle x, x \rangle.$$

Отметим также чуть более общее утверждение, полезное при выборе точек интерполяции  $\lambda_j$ .

Числовым образом матрицы  $A$  называют множество

$$r(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathbb{C}^N, \|x\| = 1\},$$

где  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Очевидно (ср. с предложением 2), числовой образ содержит все собственные значения. Можно показать [11, задача 166], что числовой образ является выпуклым множеством.

**Предложение 4.** Пусть выполнено условие нормировки. Тогда собственные значения матрицы  $\hat{A} = V^*AV$  содержатся в числовом образе матрицы  $A$ .

*Доказательство.* Заметим, что при выполнении условия имеем  $\|Vx\| = \|x\|$  для любого  $x \in \mathbb{C}^n$ . Действительно,

$$\|Vx\| = \sqrt{\langle Vx, Vx \rangle} = \sqrt{\langle V^*Vx, x \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Пусть  $\varphi$  – собственный вектор матрицы  $\hat{A} = V^*AV$ , отвечающий значению  $\lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda &= \langle \lambda\varphi, \varphi \rangle = \langle \hat{A}\varphi, \varphi \rangle = \\ &= \langle V^*AV\varphi, \varphi \rangle = \langle AV\varphi, V\varphi \rangle \in r(A), \end{aligned}$$

поскольку  $\|V\varphi\| = 1$ .

#### 4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм предназначен, в первую очередь, для матриц  $A$  средних размеров (порядка  $1000 \times 1000$ ).

Вначале следует вычислить спектр матрицы  $A$  и построить импульсную характеристику. Если импульсная характеристика имеет  $l$  выраженных экстремумов, то, как показывают численные эксперименты, следует начать с построения системы пониженного порядка размерности, в 2–3 раза большей  $l$ . Напомним, что исходная система предполагается экспоненциально устойчивой. Если система не является пассивной, то следует дополнительно проверять, является ли получившаяся система пониженного порядка устойчивой.

Далее следует выбрать кратности  $\varkappa_0$  и  $\chi_0$  интерполяции в бесконечно удаленной точке, а также дополнительные точки интерполяции  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , и их кратности  $\varkappa_j$  и  $\chi_j$ . Точки интерполяции разумно расположить (по возможности достаточно плотно, если предполагается использовать большое число точек  $\lambda_j$ ) на некотором контуре, окружающем числовой образ матрицы  $A$ . В соответствии с теоремой частотные характеристики исходной системы и системы пониженного порядка мало отличаются

друг от друга на этом контуре. Поскольку матрицы  $A$  и  $\hat{A}$  не имеют собственных значений вне этого контура (предложение 4), то обе частотные характеристики не имеют полюсов вне этого контура и стремятся к нулю на бесконечности. По принципу максимума для аналитических функций разность  $\hat{h}$  и  $\tilde{h}$  вне контура оценивается через максимум модуля разности  $\hat{h}$  и  $\tilde{h}$  на контуре. В нашем примере (в разделе 5) в качестве такого контура взята мнимая ось, поскольку исходная система пассивна. Более точно, в примере из раздела 5 используются всего три точки интерполяции – бесконечность и  $\lambda_j = \pm 5i$ .

Можно порекомендовать выбирать точки интерполяции чаще в тех местах, где точки спектра расположены гуще. Если бы вычисления велись без округлений, было бы разумно сделать все кратности равными единице. Но при вычислениях с конечной машинной точностью близкие точки интерполяции  $\lambda_j$  целесообразно заменять одной кратной точкой, чтобы в ходе вычислений не возникали выражения типа  $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ , приводящие к значительной потере верных знаков. В то же время чрезмерно большая кратность точек интерполяции малоэффективна. Это связано с тем, что при больших кратностях набор векторов, определяющих линейную оболочку столбцов матрицы  $V$ , является близким к линейно зависимому и при его ортогонализации возникают большие ошибки округления. Сравнение рис. 1–3 демонстрирует эффективность не слишком большой кратности.

После этого следует выписать векторы, порождающие в соответствии с выбранной модификацией метода Арнольди линейную оболочку столбцов матрицы  $V$ , а затем с помощью алгоритма Грамма-Шмидта ортонормировать выписанные векторы. Получится набор столбцов матрицы  $V$ .

Наконец, следует составить систему пониженного порядка и найти ее импульсную характеристику. Если качество приближения окажется недостаточным, следует повторить все сначала, увеличив количество точек интерполяции  $\lambda_j$ .

#### 5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Вычисления проводились в пакете «Mathematica» [12].

Была построена пассивная матрица  $A$  со случайными элементами размера  $1024 \times 1024$ .

Для этого вначале была сформирована диагональная матрица  $D_0$  со случайными элементами на диагонали, равномерно распределенными на отрезке  $[0, 1]$ . После этого была сформирована матрица  $Z$ , элементы которой являются случайными числами, равномерно распределенными на отрезке  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Затем была сформирована матрица

$$D = ZD_0Z^*$$

Очевидно, матрица  $D$  неотрицательно определена. Наконец, была сформирована антисимметричная ( $c_{ji} = -c_{ij}$ ) матрица  $C$ , внедиагональные элементы которой являются случайными числами, равномерно распределенными на отрезке  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Матрица  $A$  была определена по формуле

$$A = -D + C.$$

В качестве  $b$  и  $d$  были взяты векторы, элементы которых являются случайными числами, равномерно распределенными на отрезке  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

Был вычислен спектр матрицы  $A$  и найдена его правая граница, оказавшаяся равной  $-2,36$ . Кроме того, была построена импульсная характеристика системы. См. рисунки.

Было построено несколько систем пониженного порядка, см. рис. 1–3. На всех рисунках левый столбец соответствует смешанному методу Арнольди, средний – прямому методу Арнольди, а правый – сопряженному методу Арнольди. На всех рисунках в верхнем ряду показаны собственные значения матриц  $A$  (мелкие черные точки) и  $\hat{A}$  (серые круги). В нижнем ряду показаны импульсные характеристики: сплошная линия соответствует импульсной характеристике исходной системы, а пунктирная – импульсной характеристике системы пониженного порядка. Видно, что приближения импульсных характеристик, получившиеся на левом и правом рис. 2, являются приемлемыми. Для них соответственно

$$\int_0^\infty |\hat{h}(t) - h(t)| dt = 0,0218,$$

$$\int_0^\infty |\hat{h}(t) - h(t)| dt = 0,031.$$

Численные эксперименты показывают, что ни один из трех рекомендуемых вариантов метода Арнольди (смешанный, прямой и сопряженный) не является заведомо предпочтительным по сравнению с остальными. Поэтому при построении системы пониженной размерности можно попробовать применить каждый из них, контролируя качество получаемого приближения.

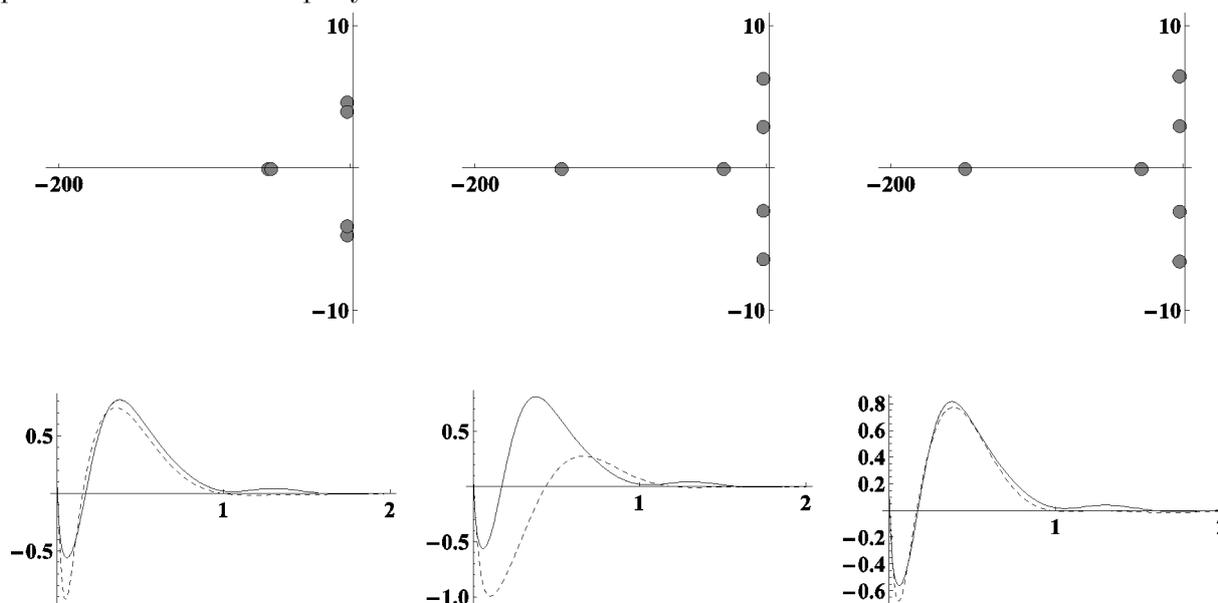


Рис. 1. Размерность системы пониженного порядка равна 6. Столбцы матрицы  $V$  определялись как ортонормированный базис в линейной оболочке следующих векторов: для смешанного метода Арнольди  $b, d, (1 - 5iA)^{-1}b, (1 + 5iA)^{-1}b, (1 - 5iA^*)^{-1}d, (1 + 5iA^*)^{-1}d$ ; для прямого метода Арнольди  $b, Ab, (1 - 5iA)^{-1}b, (1 - 5iA)^{-2}b, (1 + 5iA)^{-1}b, (1 + 5iA)^{-2}b$ ; для сопряженного метода Арнольди  $d, A^*d, (1 - 5iA^*)^{-1}d, (1 - 5iA^*)^{-2}d, (1 + 5iA^*)^{-1}d, (1 + 5iA^*)^{-2}d$

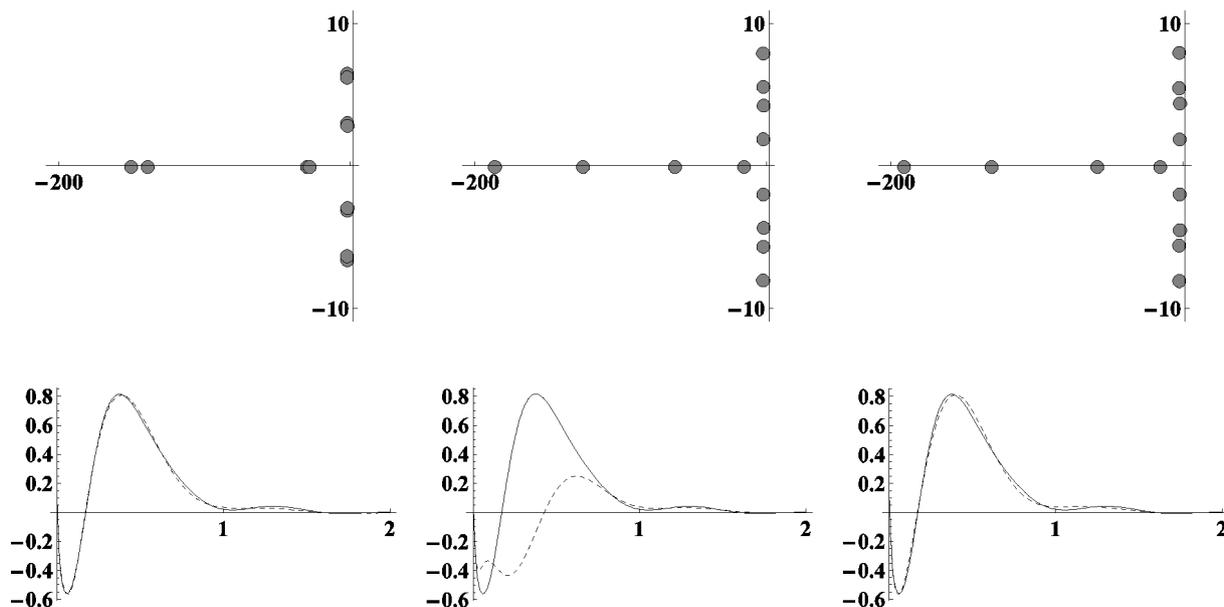


Рис. 2. Размерность системы пониженного порядка равна 12. Столбцы матрицы  $V$  определялись как ортонормированный базис в линейной оболочке следующих векторов: для смешанного метода Арнольди  $b, Ab, d, A^*d, (1-5iA)^{-1}b, (1-5iA)^{-2}b, (1+5iA)^{-1}b, (1+5iA)^{-2}b, (1-5iA^*)^{-1}d, (1-5iA^*)^{-2}d, (1+5iA^*)^{-1}d, (1+5iA^*)^{-2}d$ ; для прямого метода Арнольди  $b, \dots, A^3b, (1-5iA)^{-1}b, \dots, (1-5iA)^{-4}b, (1+5iA)^{-1}b, \dots, (1+5iA)^{-4}b$ ; для сопряженного метода Арнольди  $d, \dots, A^3d, (1-5iA^*)^{-1}d, \dots, (1-5iA^*)^{-4}d, (1+5iA^*)^{-1}d, \dots, (1+5iA^*)^{-4}d$

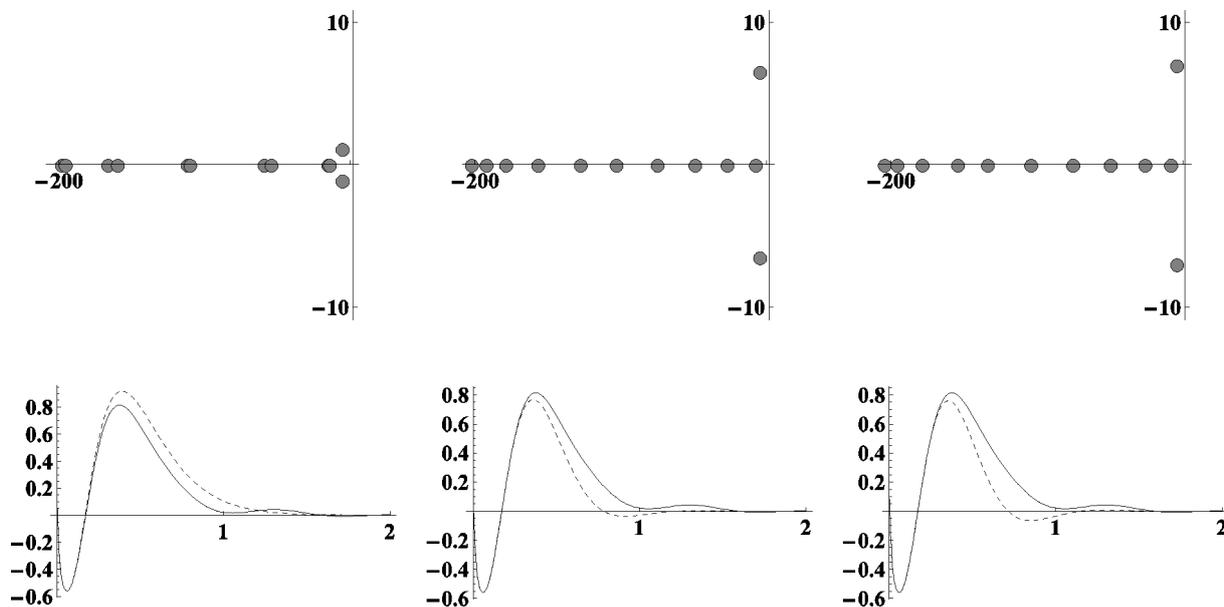


Рис. 3. Размерность системы пониженного порядка равна 12. Столбцы матрицы  $V$  определялись как ортонормированный базис в линейной оболочке следующих векторов: для смешанного метода Арнольди  $b, \dots, A^5b, d, \dots, A^{15}d$ ; для прямого метода Арнольди  $b, \dots, A^{11}b$ ; для сопряженного метода Арнольди  $d, \dots, A^{11}d$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложены новые модификации методов подпространств Крылова понижения размерности моделей динамических систем. Даются рекомендации по их практическому использованию. Приводится численный пример.

Результаты могут найти применение при проектировании и анализе систем управления.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дылевский А.В., Лозгачев Г.И., Малютина В. С. Синтез конечномерных регуляторов для устойчивых объектов с распределенным запаздыванием // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии, 2013, № 1

тник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 1. – С. 20–24.

2. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems // Philadelphia: SIAM, 2005. – XXXVI. – 479 p.

3. *Grimme E.J.* Krylov Projection Methods for Model Order Reduction // PhD Thesis. – University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997. – XI. – 213 p.

4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

5. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

6. *Первозванский А.А.* Курстеория автоматического управления. – М.: Наука, 1986. – 616 с.

7. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

8. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. – М.: Наука, 1991. – 240 с.

9. *Van der Vorst H.A.* Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – XIII. – 221 p.

10. *Kurbatov V.G., Kurbatova I.V.* Krylov subspace methods of approximate solving of differential equations from the point of view of functional calculus // Eurasian Math. Journ. – 2012. – V. 3, № 4. – P. 53–80.

11. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.

12. *Воробьев Е.М.* Введение в систему “Математика”. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 262 с.

**Курбатов Виталий Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Тел.: (4742) 27-09-62, e-mail: kv51@inbox.ru

**Kurbatov Vitalii Gennad'evich** – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Department of Mathematics and Informatics, Finance University under the Government of the Russian Federation. Phone: (4742) 27-09-62, e-mail: kv51@inbox.ru

**Кургалин Сергей Дмитриевич** – доктор физико-математических наук, зав. кафедрой цифровых технологий Воронежского государственного университета. Тел.: (473) 2208-384, e-mail: kurgalin@bk.ru

**Kurgalin Sergey Dmitrievich** – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Head of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University. Phone: (473) 2208-384, e-mail: kurgalin@bk.ru