

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ РАЗОМКНУТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

П. Б. Абрамов*, М. А. Чурсин**, Д. К. Проскурин***

* ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

** Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета

*** Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 14.03.2013 г.

Аннотация. В статье проведено сравнение параметров систем массового обслуживания (СМО) с отказами, полученных на классических моделях и на моделях марковских форм с внешними потоками событий. Кроме того, впервые предложены разомкнутые модели с очередями, для которых получены общие формулы расчета параметров и также выполнен сравнительный с классической теорией анализ полученных результатов.

Ключевые слова: система массового обслуживания, разомкнутая марковская модель, классическая модель, сравнение параметров.

Annotation. The article deals with the comparison of the parameters of mass service systems (MSS) with failures, received on classical models and received on the models of Markov forms with external event streams. Besides that, for the first time offered open MSS model with queues, for which the General formula for calculation of parameters is obtained and also the comparative with the classical theory analysis of the results is fulfilled.

Keywords: mass service system, open Markov model, classical model, compare of parameters.

ВВЕДЕНИЕ

Классические модели систем массового обслуживания (СМО) основаны на моделях «гибели и размножения», которые определяют некоторую изолированность рассматриваемой системы от внешней среды. В [1] предложены альтернативные модели СМО с отказами на основе марковских форм с незамкнутыми (внешними) потоками событий. Наличие внешних потоков в явном виде позволяет стыковать подобные модели между собой, легко увеличивая таким образом размерность модели, например, для многофазных систем массового обслуживания.

Существенный научный интерес представляет сравнение параметров СМО, полученных в соответствии с классическим подходом [2], с параметрами СМО, рассчитанными на моделях с незамкнутыми потоками событий. В данной статье проведено подобное сравнение для систем массового обслуживания с отказами. Кроме того, впервые предложены незамкнутые модели СМО с очередями, для которых получены общие формулы расчета параметров и выполнен срав-

нительный с классической теорией анализ полученных результатов.

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Рассмотрим модель одноканальной СМО с отказами. Граф потоков событий и состояний системы приведен на рис. 1.

Эта модель достаточно подробно рассмотрена в [1]. В частности, показано, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (1)$$

Выражение (1) определяет вероятность отказа в обслуживании заявки для одноканальной СМО, с учетом того факта, что отказ происходит в случае, когда канал занят.

Отсюда легко получить прочие параметры СМО:

$$P_{\text{отк}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \quad (2)$$

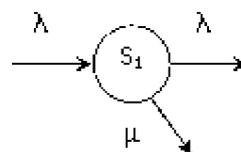


Рис. 1. Граф потоков событий и состояний одноканальной СМО с отказами

$$q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad (3)$$

$$Q = q \cdot \lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \quad (4)$$

Таким образом, параметры предложенной модели полностью совпадают с результатами классической теории для систем массового обслуживания. Вместе с тем, с практической точки зрения гораздо больший интерес представляют многоканальные системы массового обслуживания с отказами и с очередями.

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОТКАЗАМИ

Граф потоков событий и состояний для разомкнутой модели многоканальной СМО с отказами имеет вид, приведенный на рис. 2.

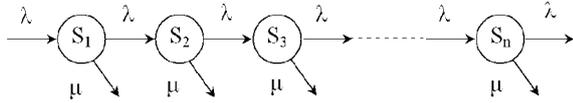


Рис. 2. Граф потоков событий и состояний многоканальной СМО с отказами

В стационарном режиме для каждого из состояний может быть записано условие равенства сумм входящих и выходящих потоков событий:

$$\lambda \cdot P_{i-1} = (\lambda + \mu) \cdot P_i. \quad (5)$$

Это уравнение получается из соответствующего дифференциального уравнения при равенстве производной нулю. Отсюда имеем:

$$P_i = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot P_{i-1}. \quad (6)$$

Окончательно:

$$P_i = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i. \quad (7)$$

Очевидно, что отношение интенсивностей потоков, возводимое в степень, всегда меньше единицы, поскольку величина μ в рассматриваемой модели не равна нулю. Следовательно, справедливо соотношение $1 > P_1 > P_2 > P_3 > \dots > P_n > 0$, кроме того

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} P_i &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_i = 0; \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_i &= \lim_{\mu \rightarrow 0} P_i = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно сделать вывод, что все величины P_i в полной мере удовлетворяют требованиям,

предъявляемым к вероятности по определению.

Основная особенность полученных соотношений состоит в том, что события, которым отвечают вероятности P_i , не составляют полную группу, а сумма вероятностей не равна единице, как это имеет место в классической теории. Вместе с тем, рассматриваемые случайные события являются взаимно зависимыми. Каждый i -й канал может оказаться занятым только при условии, что заняты все каналы с меньшими номерами. Вероятность отказа СМО в целом равна вероятности такого события, что занятыми окажутся все каналы:

$$P_{>B} = P_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^n = \left(\frac{\rho}{\rho + 1} \right)^n, \quad (9)$$

где $\rho = \lambda / \mu$ – нагрузка СМО.

В классической теории СМО выражение (9) трактуется как вероятность отказа n независимых одноканальных СМО. Это нельзя считать верным утверждением, поскольку вероятности P_i взаимосвязаны. Адекватным представлением n независимых одноканальных СМО на основе рассматриваемого подхода будет граф потоков событий и состояний, приведенный на рис. 3.

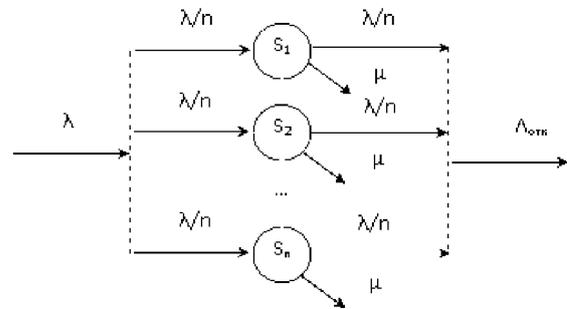


Рис. 3. Граф потоков событий и состояний n независимых одноканальных СМО

Как можно видеть, поток входящих заявок сначала равновероятно делится на n потоков, каждый интенсивностью λ / n , и только затем каждый из этих новых потоков направляется в отдельную одноканальную СМО. Заявка в i -ой СМО может получить отказ даже тогда, когда все остальные свободны. Суммарная интенсивность исходящего потока отказов равна

$$\begin{aligned} \Lambda_{>B_n} &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{n} \cdot P_i = \frac{\lambda}{n} \cdot nP_i = \\ &= \lambda \cdot \frac{\lambda / n}{\lambda / n + \mu} = \frac{\lambda^2}{\lambda + n\mu} = \lambda \cdot \frac{\rho}{\rho + n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вероятность отказа составит:

$$P_{\text{отк}_n} = \frac{\Lambda_{\text{отк}_n}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} = \frac{\rho}{\rho + n}. \quad (11)$$

С учетом того факта, что относительная пропускная способность СМО определяется как $q = 1 - P_{\text{отк}}$, окончательно имеем следующие оценки относительной пропускной способности n -канальной СМО с отказами:

$$q_1 = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}} \quad (12)$$

для классической модели;

$$q_2 = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \left(\frac{\rho}{\rho + 1} \right)^n \quad (13)$$

для модели с незамкнутыми потоками;

$$q_3 = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{n}{\rho + n} \quad (14)$$

для независимых одноканальных СМО.

Сравнение полученных результатов для 10-канальной СМО приведено на рис. 4.

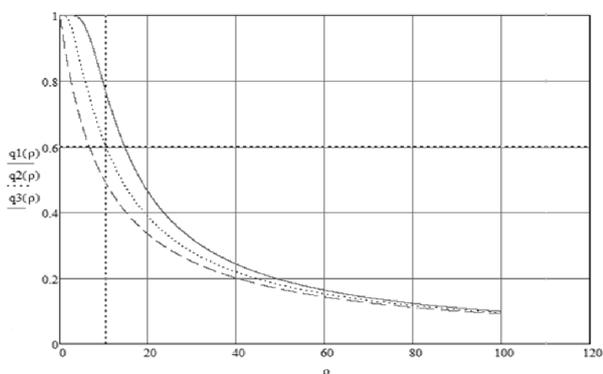


Рис. 4. Зависимость пропускной способности СМО от нагрузки ρ

Можно видеть, что асимптотическое поведение моделей одинаково, как в случае снижения, так и в случае увеличения нагрузки системы.

При $\rho \rightarrow 0$ количество поступающих в систему заявок в единицу времени снижается, и для любой из моделей относительная пропускная способность стремится к максимальному значению, равному единице. Для классической модели эффект достижения максимальных значений пропускной способности при снижении нагрузки выражен значительно сильнее, чем для других моделей.

При увеличении нагрузки $\rho \rightarrow \infty$ относительная пропускная способность системы q стремится к нулю. При значениях нагрузки, превышающих количество каналов в 10 раз, зависимости становятся практически неразличимыми. Однако, достаточно сложно признать эти области изменения аргумента представляющими какой-либо практический интерес.

На рабочем склоне характеристики значения относительной пропускной способности существенно отличаются. Вероятность обслуживания потока в n -канальной СМО, согласно предложенным оценкам, может превышать вероятность обслуживания потока в n одноканальных СМО на величину $\Delta P=0,1$. В то же время классическая теория повышает эту оценку еще на 0,2 по вероятности. Разности оценок в рабочей области имеют тенденцию к возрастанию с ростом количества каналов в СМО и напротив, для одноканальной СМО зависимости имеют одинаковый вид.

Выявленная разница в оценках, как показывает анализ, определяется тем, что в классической модели происходит некоторое прореживание входного потока заявок. При освобождении каналов в классической модели происходит переход по графу состояний, и в этот момент начинается заново отсчет времени до очередного события в потоке. Таким образом, оценки пропускной способности СМО, получаемые согласно классической теории следует признать несколько завышенными. Вместе с тем, погрешность оценки на величину 0,2–0,3 по вероятности может играть весьма существенную роль при разработке новых систем. Учитывая этот факт, становится очевидным также известное из инженерной практики правило о необходимости предусмотреть 15–20 % запас пропускной способности системы массового обслуживания. Предложенные модели дают возможность получения адекватных оценок параметров СМО.

МНОГОКАНАЛЬНАЯ СМО С ОЖИДАНИЕМ

Модель многоканальной СМО с ожиданием (с очередью) на основе марковских форм с внешними потоками событий существенно отличается от разомкнутой модели СМО с ожиданием. Собственно очередь можно рассматривать как самостоятельную систему массового обслуживания, обеспечивающую входящий поток для

каналов обслуживания. Граф потоков событий и состояний модели приведен на рис. 5.

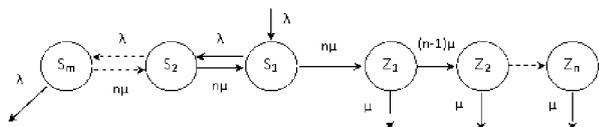


Рис. 5. Граф потоков событий и состояний СМО с ожиданием

Правая часть графа представляет многоканальную СМО, функционирующую с полной нагрузкой, если только в очереди имеются ожидающие обслуживания заявки. Интенсивность потока, связывающего очередь с каналами обслуживания, равна $n\mu$. Очевидно, что с этой же интенсивностью происходит продвижение заявок в очереди. Напротив, пополнение очереди происходит с интенсивностью входящего потока λ . Такова же интенсивность потока заявок, получивших отказ в случае, когда все места в очереди заняты.

Можно видеть, что если величина $n\mu$ задана, то параметры системы полностью определяются аналитическим описанием левой части графа, включающей в себя состояния S_i . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu \cdot P_2 = (\lambda + 4\mu) \cdot P_1 \\ \lambda \cdot P_1 + 4\mu \cdot P_3 = (\lambda + 4\mu) \cdot P_2 \\ \dots \\ \lambda \cdot P_{m-1} = (\lambda + 4\mu) \cdot P_m. \end{cases} \quad (15)$$

Кроме того, для очереди в целом может быть записано условие равенства входящих и выходящих потоков:

$$\lambda = \lambda \cdot P_m + 4\mu \cdot P_1 \quad (16)$$

Решая уравнения (15) с использованием уравнения (16) в качестве вспомогательного на отдельных этапах решения, получим обобщенную формулу для вероятности каждого из состояний:

$$P_i = \lambda^i \cdot \frac{\lambda^{m-i} + \lambda^{m-i-1}(n\mu) + \lambda^{m-i-2}(n\mu)^2 + \dots + \lambda(n\mu)^{m-i-1} + (n\mu)^{m-i}}{\lambda^m + \lambda^{m-1}(n\mu) + \lambda^{m-2}(n\mu)^2 + \lambda^{m-3}(n\mu)^3 + \dots + \lambda(n\mu)^{m-1} + (n\mu)^m}. \quad (17)$$

Числителем выражения (17) является полином степени $(m - i)$, умноженный на величину λ^i , а знаменателем – полином степени m . Домножая числитель и знаменатель на величину $(\lambda - n\mu)$, получим:

$$P_i = \lambda^i \cdot \frac{\lambda^{m-i+1} - (n\mu)^{m-i+1}}{\lambda^{m+1} - (n\mu)^{m+1}}. \quad (18)$$

Следует иметь в виду, что выражение (18) имеет искусственно введенную неопределенность в точке $\lambda = n\mu$. Переходя к нагрузке СМО ρ , для чего поделим числитель и знаменатель на $(n\mu)^{m+1}$, окончательно имеем:

$$P_i = \left(\frac{\rho}{n}\right)^i \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-i+1} - 1}{\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} - 1}. \quad (19)$$

Вероятность отказа определится как вероятность состояния S_m , откуда получаем расчетные соотношения для параметров СМО с ожиданием:

$$P_{\text{отк}} = P_m = \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{n}\right) - 1}{\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} - 1}, \quad (20)$$

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{n}\right) - 1}{\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1} - 1}.$$

Результаты сравнения полученных результатов с классической теорией приведены на рис. 6. Расчеты проведены для значений $\rho = 5$ и $n = 3$.

Полученные оценки отображены на рис. 6 сплошной линией. Можно видеть, что, как и для случая СМО с отказами, полученные оценки вероятности отказа превышают известные из классической теории (последние показаны штриховой линией). Следует отметить, что полученные оценки могут иметь несколько завышенные значения для очереди длиной 1–2 места, в силу существенного различия моделей

СМО с отказами и с ожиданием. В частности, для одного места в очереди вероятность отказа превышает эту же вероятность для СМО с отказами, рассчитанную согласно (9) (на рис. 6 – точечная линия). В настоящее время цена единичного места в очереди для хранения инфор-

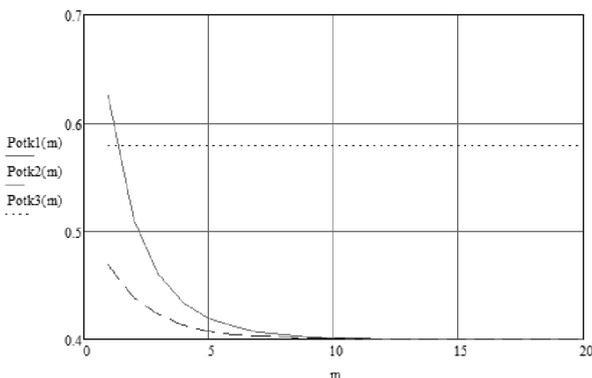


Рис. 6. Сравнение расчетных параметров СМО с классической теорией

мации сравнительно невелика, а риск, сопряженный с потерей информации, может быть критичным. Поэтому полученные оценки представляются более адекватными целям проектирования СМО с требуемым уровнем вероятности успешной обработки информации. Более того, для числа мест в очереди $m > 10$ оценки вероятности отказа сходятся, что дает полную уверенность в их достоверности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применяя предложенный в настоящей статье подход и доказанные расчетные соотношения, возможно получение адекватных оценок параметров СМО. Эти оценки по сравнению с классической теорией диктуют более жесткие

Абрамов Петр Борисович – кандидат технических наук, доцент. Военный учебно-научный центр Военно-Воздушных Сил «Военно-Воздушная академия имени проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина». E-mail: abpostbox58@mail.ru

Чурсин Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент. Воронежский филиал Российского Государственного торгового экономического университета

Проскурин Дмитрий Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой прикладной информатики и информационных систем, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет. E-mail: pdk@vgasu.vrn.ru

требования к разрабатываемой системе, что весьма актуально с точки зрения минимизации потерь, сопряженных с отказом в обслуживании заявки. Кроме того, модели с разомкнутыми входами и выходами позволяют легко наращивать анализируемую структуру. Отдельными элементами этой структуры, как показано в третьей части статьи, могут являться накопители в виде очередей, параметры которых легко оцениваются исключительно на основе интенсивностей входящих и исходящих из накопителя потоков, без привязки к виду и архитектуре конкретного потребителя. На этой основе могут быть построены модели многофазных СМО и даже сетей массового обслуживания с множеством подсетей, организованных самым различным образом. Последнее особенно актуально в современных условиях глобального развития инфокоммуникационных технологий, когда проектируемые системы и сети имеют очень сложную и разветвленную структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов П. Б., Чурсин М. А.* Анализ существования и устойчивости решения для марковских моделей разомкнутых систем массового обслуживания. // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 56–61.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.

Abramov P. B. – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Military training-scientific center of Military Aviation Forces «Military Aviation academy named by prof. N. E. Zhukovsky and U. A. Gagarin», teacher. E-mail: abpostbox58@mail.ru

Chursin M. A. – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Voronezh branch of Russian State trade and economic University

Proskurin D. K. – Candidate of physics-math. Sciences, Senior Lecturer of the dept. Applied Computer Science and Information Systems, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. E-mail: pdk@vgasu.vrn.ru