

# СТАБИЛИЗАЦИЯ, РАССИНХРОНИЗАЦИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ СВОЙСТВАМИ\*

Д. В. Грачиков\*, Г. Н. Лебедев\*\*, М. Е. Семенов\*\*, О. И. Канищева\*\*\*

\* Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

\*\* Московский авиационный институт (Технический университет)

\*\*\* ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени  
профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

Поступила в редакцию 05.12.2012 г.

**Аннотация.** В работе проводится анализ механических систем с гистерезисными нелинейностями. Исследованы условия диссипативности поведения, реакция на рассинхронизацию в управлении и задача оптимального управления. Получен критерий диссипативности и предложен алгоритм оптимального управления.

**Ключевые слова:** гистерезис, обратный маятник, обратная связь, рассинхронизация, оптимальное управление.

**Annotation.** This paper analyzes the mechanical systems with hysteresis nonlinearities. Studied dissipativity conditions, reaction to mistiming in control and optimal control problem. The article presents condition of dissipativity and optimal control.

**Keywords:** Hysteresis, inverted pendulum, feedback control, mistiming, optimal control.

## ВВЕДЕНИЕ

Впервые обратный маятник изучался в работе [1]. Экспериментально стабилизация обратного маятника с помощью колебаний подвеса была рассмотрена П. Л. Капицей и описана в его работе [2]. Было показано, что за счет осцилляций опоры достаточно высокой частоты можно добиться не просто стабилизации маятника в перевернутом состоянии, а даже устойчивого вертикального положения. В дальнейшем в его работе [3] была рассмотрена стабилизация перевернутого маятника горизонтальными колебаниями, с помощью которых так же удалось добиться его устойчивого верхнего положения. Исследование данной механической системы были активно продолжены в ряде работ Ф. Л. Черноусько [9], [10].

Сейчас описанную в работах [2], [3] механическую систему, которую теперь принято называть «маятником Капицы», можно встретить в совершенно различных сферах нашей жизни – от роботостроения до ракетных и даже космических технологий. Может показаться,

что обратный маятник является полностью изученным, но если предположить, что в подвесе присутствует обыкновенный люфт (например, вследствие износа деталей или же будучи введенным намеренно, как в рулевом управлении автомобиля), то добиться стабилизации верхнего положения становится гораздо труднее. Люфт в опоре маятника – это один из видов гистерезисных зависимостей. Задачи, в которых гистерезисные явления играют существенную роль, встречаются в физике, химии, биологии, экономике и этот список можно продолжать бесконечно. В статье приводится подробное описание полученных результатов по стабилизации обратного маятника посредством гистерезисного управления.

Похожая система, но с вертикальным осциллирующим подвесом, была рассмотрена в работе [7], где были получены условия стабилизации маятника. Несмотря на сходство рассматриваемой в данной работе задачей с исследованиями [7] в результате получены совершенно другие результаты и принципы стабилизации.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается математическая модель стабилизации маятника, шарнирно закрепленного на цилиндре, движение которого

© Грачиков Д. В., Лебедев Г. Н., Семенов М. Е., Канищева О. И., 2013

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 11-08-00032-а, 12-07-00252-а, 13-08-00532-а

вызывается горизонтальным перемещением поршня (рис. 1).

Уравнения движения, описывающие динамику этой системы, и начальные условия имеют вид:

$$A\ddot{\varphi} = mgl\sin\varphi - m\ddot{u}\cos\varphi, \quad (1.1)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0,$$

$$u(t) = \Gamma[u_0, h]x(t), \quad (1.2)$$

где  $\varphi(t)$  – отклонение маятника от вертикали,  $u(t)$  – закон движения цилиндра раствора  $h$ ,  $x(t)$  – закон движения поршня, трактуемый как управление.

Уравнение (1) описывает входно-выходные соотношения гистерезисного преобразователя люфта.

Ниже рассматривается ситуация, когда движение поршня происходит с постоянным по абсолютной величине ускорением

$$|\ddot{x}| = k = const.$$

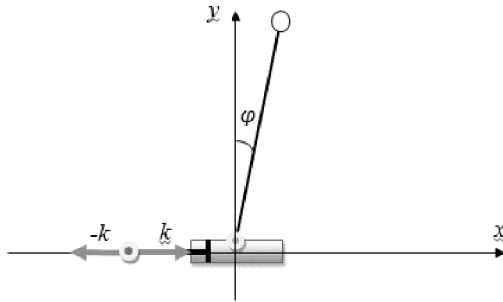


Рис. 1. Обратный маятник с гистерезисным управлением

Будут рассматриваться малые отклонения маятника, поэтому в дальнейшем используется линеаризованная постановка уравнения (1.1)

$$A\ddot{\varphi} = mgl\varphi - m\ddot{u}, \quad (1.3)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \omega_0.$$

Целью данной работы является изучение возможной стабилизации обратного маятника в окрестности вертикального положения и исследование различных аспектов динамической системы, описывающей его поведение.

### 1.1. ГИСТЕРЕЗИСНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ – ЛЮФТ

В дальнейшем используется операторная трактовка гистерезисных нелинейностей в смысле М. А. Красносельского, А. В. Покровского [4].

Выход преобразователя-люфта на монотонных входах описывается соотношением:

$$u(t) = \Gamma[u_0, h]x(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } u_0 \leq x(t) \leq u_0 + h; \\ x(t), & \text{если } x(t) < u_0; \\ x(t) - h, & \text{если } u_0 + h < x(t); \end{cases} \quad (1.4)$$

которое иллюстрирует рис. 2.

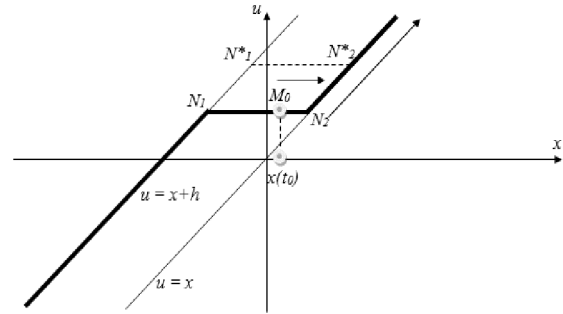


Рис. 2. Динамика входно-выходных соответствий люфта

С помощью специальной предельной конструкции и полугруппового тождества действие оператора распространяется на все кусочно-монотонные входы:

$$\Gamma[u(t_1), h]x(t) = \Gamma[\Gamma[u_0, h]x(t_1), h]x(t). \quad (1.5)$$

Необходимо отметить, что наличие оператора гистерезисного типа в уравнении (1.3) осложняет стабилизацию маятника в целом, заставляя «предсказывать» его будущее положение, так как управляющее воздействие, вообще говоря, будет являться запаздывающим.

## 2. СТАБИЛИЗАЦИЯ

### 2.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассмотрим управление маятником по принципу обратной связи, т.е. вход гистерезисного преобразователя в (1.3) подчиним соотношению:

$$\ddot{x} = k \operatorname{sign}(\alpha\varphi + \omega), \quad (2.1)$$

где  $\alpha > 0$ .

Уравнение (1.3) представим в эквивалентной матричной форме, предварительно определив главный момент инерции  $A = ml^2$  и производя замену  $B = \sqrt{\frac{g}{l}}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} + W, \quad (2.2)$$

где

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\ddot{u}}{l} \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \Gamma[u_0, h]x(t), \ddot{x} = k \operatorname{sign}(B\varphi + \omega),$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) = \omega_0.$$

Собственные числа матрицы  $V$  равны  $B$  и  $-B$ , отвечающие им собственные векторы имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 \\ B \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 \\ B \end{pmatrix}$  соответственно. Если в какой-то момент времени координаты системы окажутся на прямой  $B\varphi + \omega = 0$ , то в дальнейшем, при отсутствии управления, фазовые координаты будут асимптотически стремиться к нулю. Поэтому на идейном уровне управление должно быть устроено таким образом, чтобы сохранять фазовые координаты в окрестности этой прямой.

На каждом промежутке постоянства  $\ddot{u}$  систему можно проинтегрировать:

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + \ddot{u}_0 v(t), \quad (2.3)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} ch Bt & \frac{1}{B} sh Bt \\ Bsh Bt & ch Bt \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{g}(ch Bt - 1) \\ \frac{B}{g} sh Bt \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

и  $\varphi_0, \omega_0$  – начальное отклонение маятника, а  $\ddot{u}_0$  – ускорение движения цилиндра на промежутке постоянства.

Поведение системы (2.2) на всем временном интервале определяется рекуррентным соотношением:

$$\begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \omega_k(t) \end{pmatrix} = A(t - t_{k-1}) \begin{pmatrix} \varphi_{t_{k-1}} \\ \omega_{t_{k-1}} \end{pmatrix} + \ddot{u}_{t_{k-1}} v(t - t_{k-1}), \quad (2.6)$$

где  $t_k$  – моменты времени смены управления,  $\varphi_{k-1}$  и  $\omega_{k-1}$  значения угла и угловой скорости в момент времени  $t_{k-1}$ , а  $\ddot{u}_{t_{k-1}}$  – ускорение движения цилиндра на промежутках  $[t_{k-1}, t_k]$ .

## 2.2. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИССИПАТИВНОСТИ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Уравнение (1.3) называется диссипативным, если существует такая ограниченная область  $\Omega$  на произведении фазового пространства системы (2.2) и пространства состояний гистерезисного преобразователя (1.4), что для любых начальных значений  $(\varphi_0, \omega_0, u) \in \Omega$ , решения уравнения (1.3) будут оставаться равномерно ограниченными. Иными словами система называется диссипативной, если найдется такая область в фазовом пространстве и согласованная с ней область в пространстве состояний гистерезисного преобразователя, что решение, начавшееся в этой области, не уходит в бесконечность.

### Теорема 1.

Для того чтобы движение маятника было диссипативным достаточно выполнения условия

$$e^{B\tau} |B\varphi_0 + \omega_0| \leq \left| \frac{kB}{g} \right|, \quad (2.7)$$

где  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{k}}$  – время преодоления поршнем длины цилиндра.

### Доказательство.

Рассмотрим фазовый портрет уравнения (1.3) при  $\ddot{u} = 0$ : видно, что попадая на прямую  $B\varphi + \omega = 0$  фазовые координаты будут стремиться к нулевому положению равновесия.

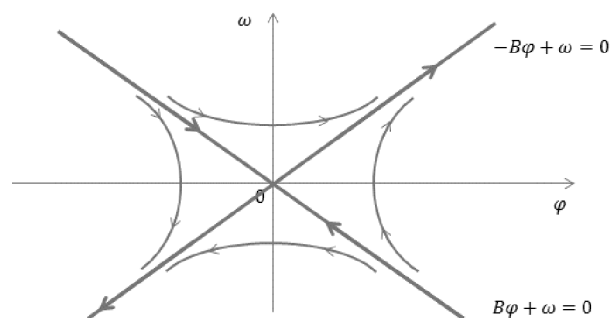


Рис. 3. Фазовый портрет

Таким образом, если управление, определенное соотношением (2.1), способно довести маятник до прямой  $B\varphi + \omega = 0$ , то система будет стабилизирована. Из соотношения следует (2.6), что время необходимое для перемещения фазовых координат уравнения (1.3) на прямую  $B\varphi + \omega = 0$  можно следующим образом:

Положим

$$y(t) = B\varphi(t) + \omega(t), \quad (2.7)$$

Предположим, что в начальный момент времени  $y(t_0) = \varepsilon$ . Найдем время, за которое фазовые координаты системы (2.2) под воздействием управления переместятся в положение  $y(t_c) = 0$ .

$$0 = y(t_c);$$

$$0 = (B \ 1)A(t_c) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + (B \ 1)kv(t_c); \quad (2.8)$$

$$0 = e^{Bt_c} \varepsilon - \frac{kB}{g} (e^{Bt_c} - 1);$$

$$t_c = \frac{1}{B} \ln \frac{\frac{kB}{g}}{\frac{kB}{g} - \varepsilon}. \quad (2.9)$$

Предположим теперь самый неудобный для стабилизации вариант, когда поршень находится на противоположном для направления своего движения конце цилиндра, тогда исходя из решения уравнения (1.1) и описания оператора (1.4), получим, что за время прохождения цилиндра маятник окажется в положении  $\begin{pmatrix} \varphi_\tau \\ \omega_\tau \end{pmatrix}$ :

$$B\varphi_\tau + \omega_\tau = e^{B\tau} (B\varphi_0 + \omega_0). \quad (2.10)$$

Подставив (2.10) в (2.9), получим:

$$t = \frac{1}{B} \ln \left( \frac{-\frac{Bk}{g}}{e^{B\tau} (B\varphi_0 + \omega_0) - \frac{Bk}{g}} \right).$$

Уравнение имеет действительные решения лишь когда

$$\frac{-\frac{Bk}{g}}{e^{B\tau} (B\varphi_0 + \omega_0) - \frac{Bk}{g}} > 0$$

или

$$e^{B\tau} |B\varphi_0 + \omega_0| < \left| \frac{Bk}{g} \right|.$$

Теорема доказана.

### 2.3. НЕИДЕАЛЬНОЕ РЕЛЕ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Измерительные устройства любых механических систем не всегда работают идеально,

поэтому представляет интерес задача стабилизации обратного маятника, когда в управлении заранее заложена погрешность. Предположим, что эта погрешность фиксирована, тогда ускорение движения подвеса маятника, трактуемое как управление, будет подчинено выходу преобразователя неидеального реле:

$$y(t) = B\varphi(t) + \omega(t),$$

$$\ddot{u} = kR[-\varepsilon, \varepsilon, \text{sign}(\ddot{u}(t_0)), y_0]y(t), \quad (2.11)$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Подробное описание этого преобразователя и его свойств приведено в [8].

Здесь  $\varepsilon$  – можно трактовать как погрешность измерения величины  $B\varphi + \omega$ . Будем предполагать выполненным неравенство

$$\varepsilon < \frac{kB}{g},$$

в противном случае погрешность измерения не позволит стабилизировать маятник.

Динамика изучаемой системы с неидеальным реле в обратной связи описывается уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} + W,$$

$$\ddot{u} = kR[-\varepsilon, \varepsilon, \text{sign}(\dot{x}(t_0)), y_0]y, \quad (2.12)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) = \omega_0.$$

Предположим, что в начальный момент времени  $y(t_0) = \varepsilon$ . Найдем время, за которое фазовые координаты системы (2.12) под воздействием управления переместятся в положение  $y(t_c) = -\varepsilon$ .

$$-\varepsilon = y(t_c);$$

$$-\varepsilon = (B \ 1)A(t_c) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + (B \ 1)kv(t_c); \quad (2.13)$$

$$-\varepsilon = e^{Bt_c} \varepsilon - \frac{kB}{g} (e^{Bt_c} - 1);$$

$$t_c = \frac{1}{B} \ln \frac{\frac{kB}{g} + \varepsilon}{\frac{kB}{g} - \varepsilon}. \quad (2.14)$$

Такой же промежуток времени необходим управлению, чтобы переместить фазовые координаты из положения  $y(t_0) = -\varepsilon$  в  $y(t_c) = \varepsilon$ , в этом можно убедиться, проделав аналогичные действия (2.12).

Таким образом, полный период управления (2.11) длится  $2t_c$ , при этом  $y(2t_c) = y(t_0) = \varepsilon$ . Аналогичное утверждение верно и при выполнении условия  $y(t_0) = -\varepsilon$ . Если же  $y(t_0) \neq \varepsilon$  и  $y(t_0) \neq -\varepsilon$ , то за конечный промежуток времени под воздействием управления (2.11) фазовые координаты рассматриваемой системы перейдут в положение  $y(t) = \varepsilon$  или  $y(t) = -\varepsilon$ .

Обратимся к вопросу об устойчивости решенной системы (2.11).

**Теорема 2.**

Система (2.11) с начальными условиями  $\varphi(0) = 0, \omega(0) = \pm\varepsilon$  имеет асимптотически устойчивое по Ляпунову периодическое решение, представляющее собой замкнутый контур:

$$\begin{pmatrix} \varphi(\theta) \\ \omega(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch B\theta & \frac{1}{B} sh B\theta \\ Bsh B\theta & ch B\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{k}{g}(ch B\theta - 1) \\ -\frac{Bk}{g} sh B\theta \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

при  $0 \leq \theta < t_c$ ,

$$\begin{pmatrix} \varphi(\theta) \\ \omega(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch B\theta & \frac{1}{B} sh B\theta \\ Bsh B\theta & ch B\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{g}(ch B\theta - 1) \\ \frac{Bk}{g} sh B\theta \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

при  $t_c \leq \theta < 2t_c$  с областью притяжения решения  $|B\varphi_0 + \omega_0| < \left| \frac{kB}{g} \right|$ .

**Доказательство.**

Управление по обратной связи с неидеальным реле устроено таким образом, что значение  $y(t)$  меняется от  $\varepsilon$  до  $-\varepsilon$ . Предположим, что в начальный момент времени выполнено условие  $|y(t_0)| = \varepsilon$ . Используя (2.6) вычислим состояние системы (2.11) за время  $t_c$ :

$$\begin{pmatrix} \varphi(t_c) \\ \omega(t_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2B\ddot{u}\varphi_0}{B\ddot{u} + \text{sign}(\ddot{u})\varepsilon g} - \varphi_0 \\ -\text{sign}(\ddot{u})\varepsilon - B\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\ddot{u} = k \text{sign}(y(t_0)).$$

Видно, что  $\varphi(t_c) = \alpha\varphi_0, 0 < \alpha \leq 1$ , из чего следует вывод о том, что  $\varphi_0 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Т.к. в моменты смены управления  $\omega = -\text{sign}(\ddot{u})\varepsilon - B\varphi$ , то при помощи (2.6) можно однозначно определить траекторию цикла на фазовом портрете системы (2.11). Фазовая траектория системы (2.12) приведена на рис. 4.

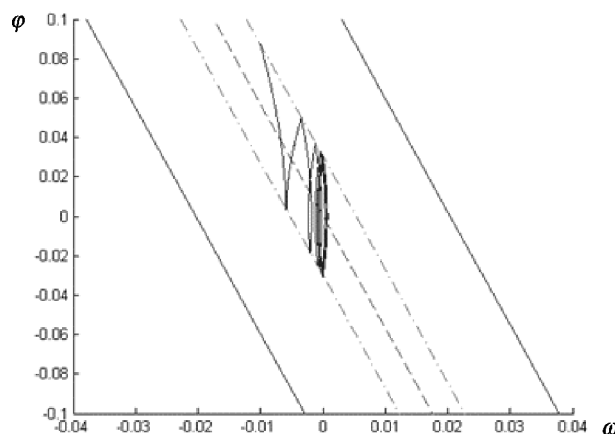


Рис. 4. Фазовый портрет системы (2.9)

**2.5. СЛУЧАЙНЫЕ РАССИНХРОНИЗАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ**

Особый интерес представляет собой случай, когда измерительные приборы имеют случайную погрешность в измерениях.

После каждого полупериода управления системой (2.2), при отсутствии погрешности в измерительных приборах  $y$  должно принять значение  $y_k$ . При наличии же погрешности отклонение от исходного значения будет равным:

$$\Delta y_k = e^{B(t_c + \tau)} y_{k-1} (e^{B\Delta t_k} - 1) - \frac{\ddot{u}_k B}{g} e^{Bt_c} (e^{B\Delta t_k} - 1), \quad (2.17)$$

где  $\Delta t_k$  – рассинхронизация во времени управлении на  $k$ -ом полупериоде. Будем считать, что величина  $\Delta t_k$  распределена равномерно по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{если } x \in [-a; a], \\ 0, & \text{если } x \notin [-a; a] \end{cases}, \quad (2.18)$$

где  $a > 0$ .

Найдем условную плотность распределения  $\Delta y_k$ :

$$f(\Delta y_k) = \frac{1}{2aAB} \frac{1}{\frac{\Delta y_k}{A} + 1}. \quad (2.19)$$

где  $A = e^{Bt_c} \left( e^{B\tau} y_{k-1} - \frac{\ddot{u}_k B}{g} \right)$ .

Экспериментально построенные графики плотности распределения величины  $\sum_{k=1}^N \Delta y_k$  приведены на рис. 5.

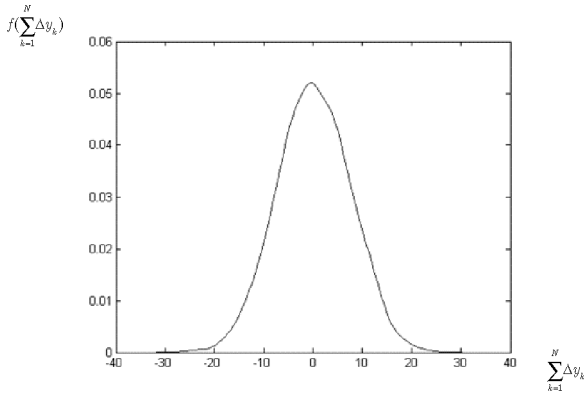


Рис. 5. Плотность распределения  $\sum_{k=1}^N \Delta y_k$ .  $N = 10$ ,  $a = 0.01$ ,  $k = 5$ ,  $l = 0.4$ .

$$D \left[ \sum_{k=1}^N \Delta y_k \right] = 55.8305, M \left[ \sum_{k=1}^N \Delta y_k \right] = 0.1276$$

Видно, что при увеличении времени моделирования системы вероятность ее стабилизации уменьшается, т.е. рассинхронизация фактически лишает маятник возможности остаться в вертикальном положении.

### 3. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Во многих технических задачах требуется не только стабилизировать систему, но и добиться асимптотически оптимальных характеристик. В рассмотренной задаче стабилизации обратного маятника этому соответствует минимизация функционала, определяющего отклонение маятника от вертикального положения:

$$J = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^T \left( \varphi^2 + \frac{1}{B^2} \omega^2 \right) dt. \quad (3.1)$$

При выполнении уравнений, описывающих динамику системы (2.2) необходимо достичь

минимизации функционала (3.1). Отметим, что поставленная задача не является классической задачей оптимального управления, т.к. управление следует искать лишь среди функций стабилизирующих систему (2.2), т.е. при выполненных фазовых ограничениях:

$$|B\varphi(t) + \omega(t)| \leq \left| \frac{kB}{g} \right|. \quad (3.2)$$

Таким образом, на физическом уровне задача свелась к минимизации среднеквадратичного отклонения маятника от вертикального положения.

**Теорема 3.** Пусть задана система уравнений (2.2) с начальными условиями, удовлетворяющими условию диссипативности маятника. Тогда существует управление, определяемое соотношением (1.4), минимизирующее функционал (3.1), при этом траектория движения будет целиком лежать в области диссипативности.

#### Доказательство.

Следуя принципу максимума Понтрягина, выпишем гамильтониан для системы уравнений (2.2) и функционала (3.1):

$$H(\varphi, \omega, \lambda) = -\frac{1}{2T} \left( \varphi^2 + \frac{1}{B^2} \omega^2 \right) + \lambda_1 \omega + \lambda_2 \left( B^2 \varphi - \frac{u}{l} \right). \quad (3.3)$$

Составим систему сопряженных уравнений [5]

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda + \frac{1}{T} Qx, \quad (3.4)$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & B^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ .

Будем искать решение системы (3.5) в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = -P \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}, P = P^T > 0. \quad (3.5)$$

Введем в рассмотрение вектор-строку  $C = (C_1, C_2)$ , которая вместе с матрице  $P$  составляет решения системы алгебраических уравнений, полученной на основе подставки (3.6) в (3.5):

$$A^T P + PA = -Q + C^T C, \quad (3.6)$$

$$PM = 0. \quad (3.7)$$

Решив (3.7)-(3.8) получим:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{B} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Введем виртуальный выход системы  $y = Cx$ . Воспользовавшись свойством 8.1 из [5], найдем управление, которое минимизирует функционал (3.4):

$$u = \left[ u_0, h \right] \left( k \operatorname{sign} \left( \varphi + \frac{1}{B} \omega \right) \right). \quad (3.10)$$

Необходимо отметить, что прямая  $\varphi + \frac{1}{B} \omega = 0$  должна являться множеством нулевой динамики ([6], п. 3.2.2). Из чего следует доказанность теоремы.

Оптимальное управление, следуя теореме, сначала перемещает фазовые координаты системы (2.2) в положение  $y(t) = 0$  и, затем, прекращается. Такое управление стабилизирует маятник в верхнем положении, но в реальных системах трудно реализуемо, поэтому рассмотрим задачу оптимального управления в иной постановке.

### 3.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим систему, описывающую динамику изменения фазовых координат маятника с неидеальным реле в измерительном устройстве:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = B^2 \varphi - \frac{\ddot{u}}{l}, \\ \ddot{x} = kR \left[ -\varepsilon, \varepsilon, \operatorname{sign}(\ddot{x}(t_0)), y(0) \right] y(t), \\ u(t) = \left[ u_0, h \right] x(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \\ \omega(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Положим, что в начальный момент времени поршень находится на правом конце цилиндра и начальное положение маятника удовлетворяет условию  $y(0) = -\varepsilon$ .

Определим теперь периодическое управление, состоящее из четырех этапов, и найдем фазовые координаты системы (3.12) после 4 этапов:

1) Прохождение поршнем длины цилиндра за время  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{k}}$ ,

2) Управление маятником ( $\ddot{u} = -k$ ) до выполнения условия  $y(t) = \varepsilon$ ,

3) Прохождение поршнем длины цилиндра в противоположном к 1) направлении,

4) Управление маятником ( $\ddot{u} = k$ ) до выполнения условия  $y(t) = -\varepsilon$ .

На проведение действий 2 этапа требуется затратить время  $t_c$ , которые можно вычислить аналогично (2.19):

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= y(t_c); \\ -\varepsilon &= (B \ 1) A(t_c) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + (B \ 1) k v(t_c); \\ -\varepsilon &= e^{Bt_c} \varepsilon - \frac{kB}{g} (e^{Bt_c} - 1); \\ t &= \frac{1}{B} \ln \frac{\frac{kB}{g} + \varepsilon}{\frac{kB}{g} - e^{Bt} \varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для 4 этапа требуется такой же промежуток времени, вычисляемый аналогично (3.13).

Таким образом, положение маятника после периода воздействия управления примет вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = A(2\tau + 2t) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} - A(\tau + t) B(t) k + B(t) k. \quad (3.13)$$

Обозначим период управления системой (3.14) через  $T_p$ . Предположим, что существует техническая возможность варьирования ускорения движения поршня в опоре маятника, тогда выпишем зависимость  $T_p$  от  $k$ :

$$T_p = 2 \frac{1}{B} \ln \frac{\frac{kB}{g} + \varepsilon}{\frac{kB}{g} - e^{B\tau} \varepsilon} + 2 \sqrt{\frac{2h}{k}}. \quad (3.14)$$

Экспериментально была получена зависимость значения целевого функционала от  $k$  (рис. 6). Как видно величина целевого функционала будет наименьшей при минимальном ускорении, обеспечивающем стабилизацию маятника.

Также были построены фазовые траектории системы (3.11) при различных значениях  $k$ . На рис. 7 приведен фазовый портрет этой системы при значении ускорения близком к минимально возможному, обеспечивающему стабилизацию, при заданных параметрах.

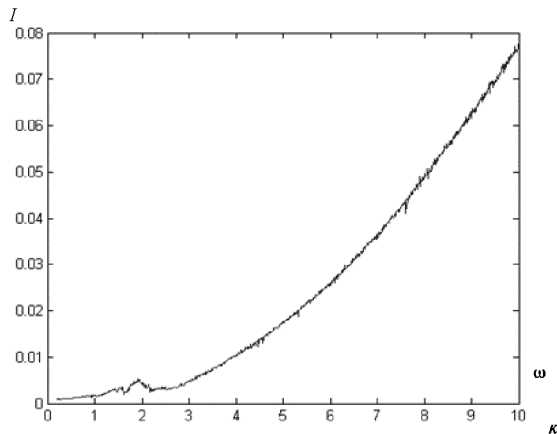


Рис. 6. Зависимость целевого функционала от ускорения

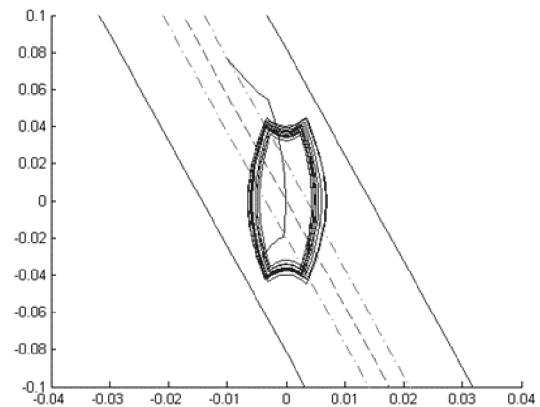


Рис. 7. Фазовый портрет системы при  $k = 0.12 \text{ м/с}^2$ ,  $l = 0.4 \text{ м}$ ,  $m = 1 \text{ кг}$  (3.11)

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют не только точно предсказать поведение маятника с гистерезисным управлением (п. 2.1), но и определить условия диссипативности системы в окрестности верхнего положения в зависимости от начального отклонения маятника и физических параметров системы (п. 2.2). Введение неидеального реле в обратной связи позволило описать периодические режимы системы (2.2). Исследовано влияние малых рассинхронизаций на стабилизацию маятника. Рассмотрена задача оптимального управления, решение которой позволяет строить гистерезисное управление, минимизирующее среднеквадратическое отклонение маятника от положения равновесия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephenson A. «On an induced stability» Phil. Mag. 15, 233 (1908)
2. Канища П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. № 44. С. 7–20.
3. Канища П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ 21. 1951. № 21. С. 588–597.

**Грачиков Дмитрий Вячеславович** – аспирант, каф. высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет. Тел. +7 919 186 57 20. Email: dgrachikov@gmail.com

**Семенов Михаил Евгеньевич** – доктор ф.-м. наук, профессор, Московский авиационный институт (Технический университет). E-mail: mkl150@mail.ru

4. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. – Наука, Москва 1983.

5. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы – СПб.: Питер, 2006 – 272 с.

6. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985.

7. Стабилизация перевернутого маятника вертикальными осцилляциями с помощью гистерезисного управления / М. Е. Семенов, Д. В. Шевлякова, О. И. Канищева, Д. В. Грачиков // Научные технологии. – 2012. – № 3.

8. Семенов М.Е. Устойчивые периодические решения систем с непрерывными системами неидеальных реле / М.Е. Семенов // Математическое обеспечение ЭВМ: сб. науч. тр.- Воронеж, 1999. – Вып. 1. – С. 73–78.

9. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. – 383 с.

10. Решмин С.А., Черноушко Ф.Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006, № 3, С. 51–62.

**Grachikov D. V.** – Post-Graduate Student, the dept. of Higher Mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Tel. +7 919 186 57 20. Email: dgrachikov@gmail.com

**Semenov M. E.** – Doctor of physics-math. Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (Technical University). E-mail: mkl150@mail.ru



**Лебедев Георгий Николаевич** – доктор ф.-м. наук, профессор 301 кафедры, Московский авиационный институт (Технический университет). E-mail: k301@mail.ru

**Канищева Олеся Ивановна** – кандидат ф.-м. наук, доцент, Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» г. Воронеж. E-mail: oleka\_olesya@mail.ru

**Lebedev G. N.** – Doctor of physics-math. Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (Technical University). E-mail: k301@mail.ru

**Kanishcheva O. I.** – Candidate of physics-math. sciences, assistant professor. Military educational and scientific center of the AIR FORCE's «Air Force Academy im. professor N. E. Zhukovsky and Yuri Gagarin». E-mail: oleka\_olesya@mail.ru