УДК 519.85

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

Н. В. Сапкина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.03.2013 г.

Аннотация. В статье рассмотрены основные понятия и операции нечеткой арифметики и приведены доказательства свойств операций над нечеткими числами.
Ключевые слова: нечеткое число, обратное нечеткое число, отрицание нечеткого числа, сумма и произведение нечетких чисел, квадрат нечеткого числа, квадрат суммы нечетких чисел.
Annotation. This article considers basic definitions and operations of fuzzy arithmetic and presents operation properties of fuzzy numbers.
Keywords: fuzzy number, opposite fuzzy number, negation of fuzzy number, sum and product of fuzzy numbers, square fuzzy number, square amount of fuzzy number.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционная математика обеспечивает работу с количественными данными, которые могут быть получены только с помощью точных измерений. Однако в окружающем мире мы очень часто сталкиваемся и с приближенной и неточной информацией. Такой тип данных присутствует в естественном языке, социологии, психометрии, эконометрике и т. д. Для формализации неточных и нечетких знаний используется аппарат нечеткой математики.

В данной статье рассмотрены основные понятия и операции нечеткой арифметики с целью доказательства свойств операций, применяемых для обработки нечеткой информации. В частности, они могут быть использованы в задачах регрессионного анализа для нахождения параметров линейной модели на основе метода наименьших квадратов.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПЕРАЦИИ

Пусть $\mathfrak{R}$ – это одномерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Нечетким числом называется полунепрерывная сверху выпуклая функция $F:\mathfrak{R}\to[0,1]$, где множество $\{x\in\mathfrak{R}\mid F(x)=1\}$ непусто [3]. Другими словами, нечеткое число A определяется как выпуклое нормированное нечеткое множество вещественной прямой $\mathfrak{R}$, так что существует единственное $x_0\in\mathfrak{R}$, для которого $F\left(x_0\right)=1$, причем функция принадлежности $F(x)$ является кусочно-непрерывной.

Приведем некоторые определения, основываясь на работах [1], [3].

Определение 1.

Пусть L (а также R) – убывающая функция формы, действующая из $\mathfrak{R}^+$ в $[0,1]$, такая, что $L(0)=1$; $L(x)<1$ для всех $x>0$; $L(x)>0$ для всех $x<1$; $L(1)=0$ для всех x и $L(+\infty)=0$. Тогда нечеткое число A является *нечетким числом L-R-типа*, если для m, $\alpha>0$, $\beta>0$ из множества $\mathfrak{R}$ его функция принадлежности представима в виде:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), x\le m,\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), x\ge m,\end{cases}$$

где m – мода нечеткого числа, α и β – левый и правый коэффициенты нечеткости соответственно. Условно нечеткое число A обозначается в виде тройки параметров $\left(m,\alpha,\beta\right)$.

Определение 2. Пусть число A задано с помощью L-R-представления $A=\left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$. Тогда L-R-представление противоположного ему числа $-A$ имеет вид:

$$-A=\left(-m_a,\beta_a,\alpha_a\right).$$

Как видно из рис. 1, нечеткое число A и противоположное ему число $-A$ симметричны относительно оси ординат.

Определение 3. Пусть число A задано с помощью L-R-представления $A=\left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$. Тогда L-R-представление обратного нечеткого числа A^{-1} можно выразить в виде формулы:

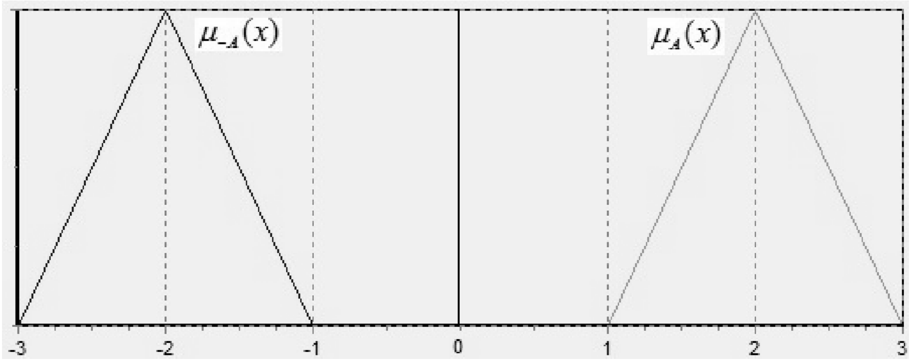

Рис. 1. Число A = «примерно 2» и число $-A$ = «примерно -2», построенные с помощью L-R-представления в виде треугольных нечетких чисел

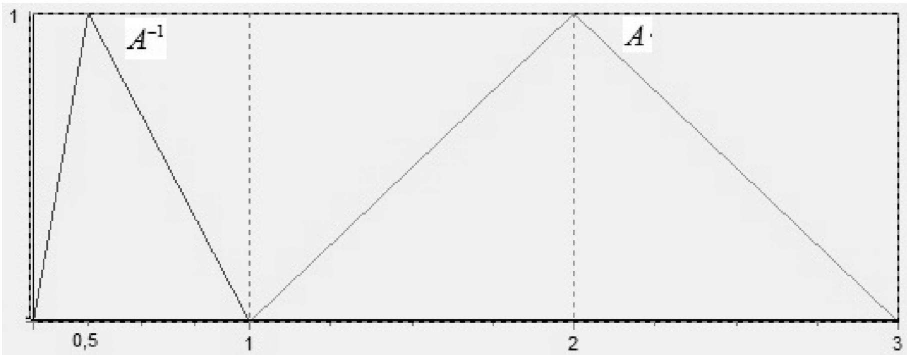

Рис. 2. Нечеткое число A = «примерно 2» и обратное к нему число A^{-1}

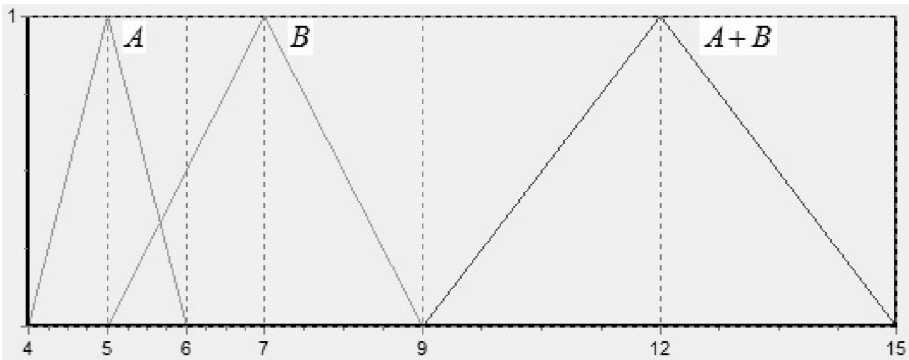

Рис. 3. Сложение двух нечетких чисел A = «примерно 5» и B = «примерно 7» с помощью L-R-представления в виде треугольных нечетких чисел

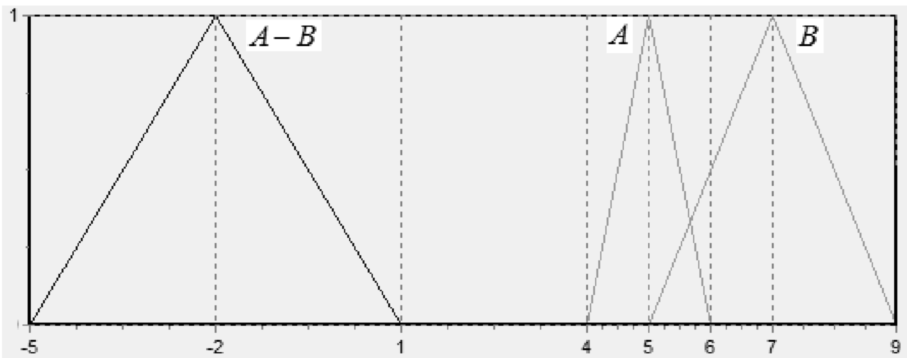

Рис. 4. Вычитание двух нечетких чисел A = «примерно 5» и B = «примерно 7»

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{m_a}, \frac{\beta_a}{m_a\left(m_a+\beta_a\right)}, \frac{\alpha_a}{m_a\left(m_a-\alpha_a\right)} \right).$$

Пусть $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right)$ и $B = \left(m_b, \alpha_b, \beta_b\right)$ являются нечеткими числами L-R-типа. Приведем определения арифметических операций над нечеткими числами A и B, используя [2], [3].

Определение 4. Суммой нечетких чисел A и B называется нечеткое число вида

$$A + B = \left(m_a + m_b, \alpha_a + \alpha_b, \beta_a + \beta_b\right).$$

Определение 5. Разностью нечетких чисел A и B называется нечеткое число

$$A - B = \left(m_a - m_b, \alpha_a + \alpha_b, \beta_a + \beta_b\right).$$

Определение 6. Произведение положительных нечетких чисел A и B определяется выражением:

$$A \cdot B = (m_a \cdot m_b, m_a\alpha_b + m_b\alpha_a - \\ -\alpha_a\alpha_b, m_a\beta_b + m_b\beta_a + \beta_a\beta_b),$$
$$A > 0,\ B > 0.$$

Под положительным нечетким числом здесь подразумевается нечеткое число, носитель которого полностью находится на положительной полуоси. У отрицательного нечеткого числа носитель содержит отрицательные числа.

L-R-представление произведения нечетких чисел $A < 0$ и $B > 0$ имеет вид:

$$A \cdot B = (m_a \cdot m_b, -m_a\beta_b + m_b\alpha_a + \\ +\alpha_a\beta_b, -m_a\alpha_b + m_b\beta_a - \alpha_b\beta_a),$$
$$A < 0,\ B > 0.$$

Произведение нечетких чисел $A > 0$ и $B < 0$ выражается формулой:

$$A \cdot B = (m_a \cdot m_b, m_a\alpha_b - m_b\beta_a + \\ +\alpha_b\beta_a, m_a\beta_b - m_b\alpha_a - \alpha_a\beta_b),$$
$$A > 0,\ B < 0.$$

Произведение отрицательных нечетких чисел A и B определяется выражением:

$$A \cdot B = (m_a \cdot m_b, -m_a\beta_b - m_b\beta_a - \\ -\beta_a\beta_b, -m_a\alpha_b - m_b\alpha_a + \alpha_a\alpha_b),$$
$$A < 0,\ B < 0.$$

Произведение нечетких чисел A и B произвольного знака имеет вид:

$$AB = \begin{pmatrix} m_a m_b, m_a m_b - \min[\left(m_a - \alpha_a\right)\left(m_b - \alpha_b\right), \\ \left(m_a - \alpha_a\right)\left(m_b + \beta_b\right), \left(m_a + \beta_a\right)\left(m_b - \alpha_b\right), \\ \left(m_a + \beta_a\right)\left(m_b + \beta_b\right)], \\ \max\left(m_a - \alpha_a\right)\left(m_b - \alpha_b\right), \\ \left(m_a - \alpha_a\right)\left(m_b + \beta_b\right), \left(m_a + \beta_a\right)\left(m_b - \alpha_b\right), \\ \left(m_a + \beta_a\right)\left(m_b + \beta_b\right) - m_a m_b \end{pmatrix}.$$

2. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ

Используя основные понятия нечеткой арифметики, докажем следующие свойства операций над нечетким числами.

1. Пусть нечеткое число A задано с помощью L-R-представления $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right)$ и $-A$ – это противоположное ему число. Тогда:

$$-\left(-A\right) = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) = A. \qquad (1)$$

Доказательство.

В самом деле, используя определение 2, получим:

$$-\left(-A\right) = -\left(-\left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right)\right) = \\ = -\left(-m_a, \beta_a, \alpha_a\right) = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) = A.$$

2. Пусть $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right)$ является нечетким числом L-R-типа. Тогда инволюция числа A имеет вид:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) = A. \qquad (2)$$

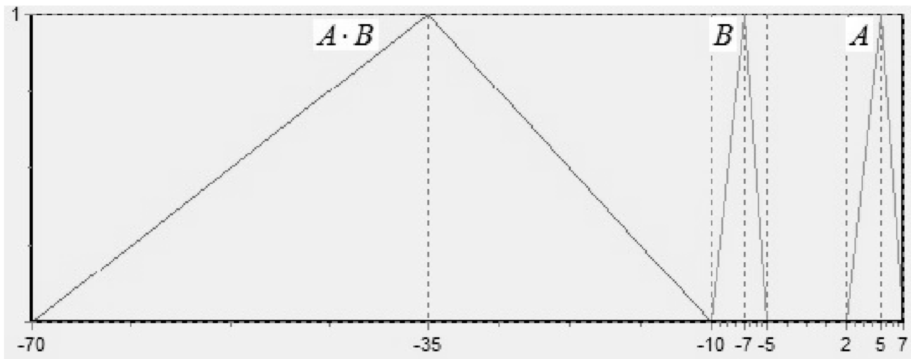

Рис. 5. Умножение двух нечетких чисел A = «примерно 5» и B = «примерно -7»

Доказательство.

Пусть

$$A^{-1} = \left(m, \alpha, \beta\right),$$

где $m = \dfrac{1}{m_a}$, $\alpha = \dfrac{\beta_a}{m_a(m_a + \beta_a)}$, $\beta = \dfrac{\alpha_a}{m_a(m_a - \alpha_a)}$ по определению 3. Тогда получим:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m\left(m+\beta\right)}, \frac{\alpha}{m\left(m-\alpha\right)}\right),$$

где $\dfrac{1}{m} = m_a$,

$$\frac{\beta}{m\left(m+\beta\right)} = \\ = \frac{\alpha_a m_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)\left(\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)}\right)} = \\ = \frac{\alpha_a m_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)\left(\dfrac{m_a - \alpha_a + \alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)}\right)} = \alpha_a,$$

$$\frac{\alpha}{m\left(m-\alpha\right)} = \\ = \frac{\beta_a m_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)\left(\dfrac{1}{m_a} - \dfrac{\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)}\right)} = \\ = \frac{\beta_a m_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)\left(\dfrac{m_a + \beta_a - \beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)}\right)} = \beta_a.$$

Таким образом находим, что

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{m}, \frac{\beta}{m\left(m+\beta\right)}, \frac{\alpha}{m\left(m-\alpha\right)}\right) = \\ = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) = A.$$

3. Пусть нечеткое число A задано с помощью L-R-представления $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right)$. Тогда произведение нечеткого числа A на обратное ему число A^{-1} вычисляется по формуле:

$$A \cdot A^{-1} = \left(1, \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a + \beta_a}, \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a - \alpha_a}\right), \quad \text{если } A > 0, \tag{3}$$

$$A \cdot A^{-1} = \left(1, \frac{\alpha_a + \beta_a}{\alpha_a - m_a}, -\frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a + \beta_a}\right), \quad \text{если } A < 0. \tag{4}$$

Доказательство.

а) Рассмотрим сначала случай, когда нечеткое число $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) > 0$, а следовательно и $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{m_a}, \dfrac{\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)}, \dfrac{\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)}\right) > 0$ (определение 3). Тогда по определению 6 найдем формулу произведения нечеткого числа $A > 0$ на обратное ему число $A^{-1} > 0$. Получим:

$$A \cdot A^{-1} = \left(m, \alpha, \beta\right),$$

где $m = m_a \dfrac{1}{m_a} = 1$,

$$\alpha = m_a \frac{\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)} + \frac{1}{m_a}\alpha_a - \\ -\alpha_a \frac{\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)} = \\ = \frac{m_a\beta_a - \alpha_a\beta_a + \alpha_a m_a + \alpha_a\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)} = \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a + \beta_a},$$

$$\beta = m_a \frac{\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)} + \\ + \frac{1}{m_a}\beta_a + \frac{\beta_a\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)} = \\ = \frac{m_\alpha\alpha_a + \alpha_a\beta_a + m_\alpha\beta_a - \alpha_a\beta_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)} = \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a - \alpha_a}.$$

Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = \left(m, \alpha, \beta\right) = \\ = \left(1, \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a + \beta_a}, \frac{\alpha_a + \beta_a}{m_a - \alpha_a}\right), \text{5A; 8 } A > 0.$$

б) Рассмотри теперь нечеткое число $A = \left(m_a, \alpha_a, \beta_a\right) < 0$, а, следовательно, и $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{m_a}, \dfrac{\beta_a}{m_a\left(m_a + \beta_a\right)}, \dfrac{\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)}\right) < 0$ (определение 3). Тогда по определению 6 найдем формулу для произведения нечеткого числа $A < 0$ на обратное ему число $A^{-1} < 0$, предполагая, что результат также является нечетким числом L-R-типа:

$$A \cdot A^{-1} = \left(m, \alpha, \beta\right),$$

где $m = m_a \dfrac{1}{m_a} = 1,$

$$\alpha = -m_a \frac{\alpha_a}{m_a\left(m_a - \alpha_a\right)} - \\ -\frac{1}{m_a}\beta_a - \beta_a \frac{\alpha_a}{m_a\left(m_a-\alpha_a\right)} = \\ = \frac{-m_\alpha \alpha_a + \alpha_a\beta_a - m_\alpha\beta_a - \alpha_a\beta_a}{m_a\left(m_a-\alpha_a\right)} = \\ = \frac{\alpha_a+\beta_a}{\alpha_a - m_a},$$

$$\beta = -\frac{m_a\beta_a}{m_a\left(m_a+\beta_a\right)} - \\ -\frac{1}{m_a}\alpha_a + \frac{\alpha_a\beta_a}{m_a\left(m_a+\beta_a\right)} = \\ = \frac{-m_a\beta_a - \alpha_a\beta_a - \alpha_a m_a + \alpha_a\beta_a}{m_a\left(m_a+\beta_a\right)} = \\ = -\frac{\alpha_a+\beta_a}{m_a+\beta_a}.$$

Таким образом имеем, что при $A < 0$

$$A \cdot A^{-1} = \left(m,\alpha,\beta\right) = \\ = \left(1, \frac{\alpha_a+\beta_a}{\alpha_a - m_a}, -\frac{\alpha_a+\beta_a}{m_a+\beta_a}\right).$$

4. Пусть $A = \left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$ и $B = \left(m_b,\alpha_b,\beta_b\right)$ являются нечеткими числами L-R-типа и при этом мода нечеткого числа B равна нулю. Тогда их произведение является нечетким нулем вида:

$$AB = \begin{pmatrix} 0, -\min[-\left(m_a-\alpha_a\right)\alpha_b, \left(m_a-\alpha_a\right)\beta_b, \\ -\left(m_a+\beta_a\right)\alpha_b, \left(m_a+\beta_a\right)\beta_b], \\ \max[-\left(m_a-\alpha_a\right)\alpha_b, \left(m_a-\alpha_a\right)\beta_b, \\ -\left(m_a+\beta_a\right)\alpha_b, \left(m_a+\beta_a\right)\beta_b] \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Доказательство следует из определения 6 умножения нечетких чисел произвольного знака.

5. Пусть нечеткие числа $A = \left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$ и $B = \left(m_b,\alpha_b,\beta_b\right)$ имеют L-R-представление и мода нечеткого числа B равна единице. Тогда их произведение является нечетким числом с модой m_a вида:

$$A \cdot B = (m_a, m_a\alpha_b + \alpha_a - \alpha_a\alpha_b, m_a\beta_b + \\ +\beta_a + \beta_a\beta_b),\ \text{если}\ A > 0, \quad (6)$$

$$A \cdot B = (m_a, -m_a\beta_b + \alpha_a + \alpha_a\beta_b, - \\ -m_a\alpha_b + \beta_a - \alpha_b\beta_a),\ \text{если}\ A < 0. \quad (7)$$

Доказательство следует из определения 6 при $m_b = 1$.

6. Пусть $A = \left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$ является нечетким числом L-R-типа, тогда:

$$A^2 = (m_a^2, 2m_a\alpha_a - \alpha_a^2, 2m_a\beta_a + \beta_a^2), \\ \text{при}\ A > 0, \quad (8)$$

$$A^2 = (m_a^2, -2m_a\beta_a - \beta_a^2, -2m_a\alpha_a + \alpha_a^2), \\ \text{при}\ A < 0. \quad (9)$$

Доказательство.

а) Пусть $A > 0$. По определению 6 находим, что:

$$A^2 = (m_a^2, m_a\alpha_a + m_a\alpha_a - \\ -\alpha_a^2, m_a\beta_a + m_a\beta_a + \beta_a^2) = \\ = \left(m_a^2, 2m_a\alpha_a - \alpha_a^2, 2m_a\beta_a + \beta_a^2\right).$$

б) При $A < 0$ на основе определения 6 получим:

$$A^2 = (m_a^2, -m_a\beta_a - m_a\beta_a - \\ -\beta_a^2, -m_a\alpha_a - m_a\alpha_a + \alpha_a^2) = \\ = \left(m_a^2, -2m_a\beta_a - \beta_a^2, -2m_a\alpha_a + \alpha_a^2\right).$$

7. Пусть нечеткие числа $A = \left(m_a,\alpha_a,\beta_a\right)$ и $B = \left(m_b,\alpha_b,\beta_b\right)$ имеют L-R-представление, тогда:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \\ \text{если}\ A > 0, B > 0 \\ \text{или}\ A < 0, B < 0. \quad (10)$$

Доказательство.

а) Положим, что $A + B > 0$. Тогда на основе определений 4 и 6 из формулы (6) получим:

$$\left(A+B\right)^2 = \\ = \left(\left(m_a+m_b\right)^2, 2\left(m_a+m_b\right)\left(\alpha_a+\alpha_b\right) - \\ -\left(\alpha_a+\alpha_b\right)^2, 2\left(m_a+m_b\right)\times \\ \times\left(\beta_a+\beta_b\right) + \left(\beta_a+\beta_b\right)^2\right) = \\ = \left(m_a^2, 2m_a\alpha_a - \alpha_a^2, 2m_a\beta_a + \beta_a^2\right) + \\ +2\left(m_a m_b, m_a\alpha_b + m_b\alpha_a - \\ -\alpha_a\alpha_b, m_a\beta_b + m_b\beta_a + \beta_a\beta_b\right) + \\ +\left(m_b^2, 2m_b\alpha_b - \alpha_b^2, 2m_b\beta_b + \beta_b^2\right) = \\ = A^2 + 2AB + B^2,$$

при условии, что $A > 0$, $B > 0$.

б) При $A + B < 0$, основываясь на тех же определениях, получим:

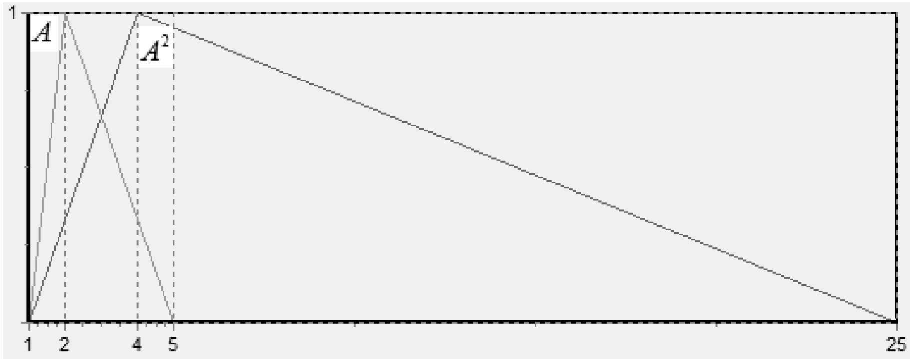

Рис. 6. Квадрат нечеткого числа A = «примерно 2», найденный с помощью L-R-представления

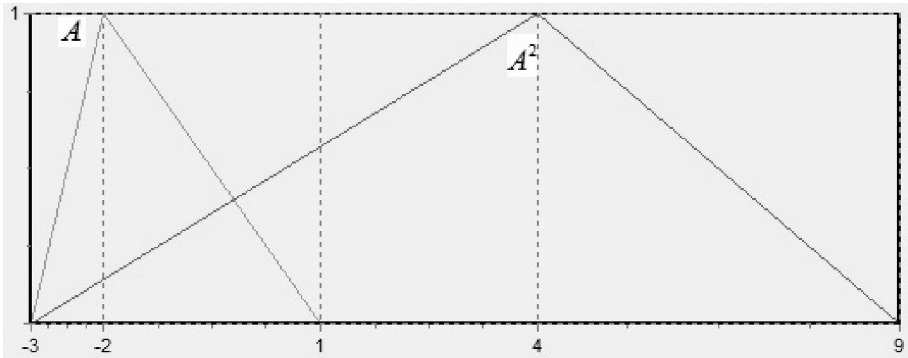

Рис. 7. Квадрат нечеткого числа A = «примерно -2», найденный с помощью L-R-представления

$$
\begin{gathered}
\left(A+B\right)^2 = \\
= \Big(\left(m_a+m_b\right)^2, -2\left(m_a+m_b\right)\left(\beta_a+\beta_b\right) - \\
-\left(\beta_a+\beta_b\right)^2, -2\left(m_a+m_b\right)\left(\alpha_a+\alpha_b\right) + \\
+\left(\alpha_a+\alpha_b\right)^2\Big) = \\
= \left(m_a^2, 2m_a\alpha_a - \alpha_a^2, 2m_a\beta_a + \beta_a^2\right) + \\
+2\left(m_a m_b, -m_a\beta_b - m_b\beta_a - \right. \\
\left. -\beta_a\beta_b, -m_a\alpha_b - m_b\alpha_a + \alpha_a\alpha_b\right) + \\
+\left(m_b^2, 2m_b\alpha_b - \alpha_b^2, 2m_b\beta_b + \beta_b^2\right) = \\
= A^2 + 2AB + B^2,
\end{gathered}
$$

при условии, что $A<0$ и $B<0$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье были рассмотрены основные арифметические операции над нечеткими числами и выведены формулы для вычисления инволюции, произведения нечеткого числа на нечеткий ноль и единицу, получена формула квадрата нечеткого числа, а также произведения суммы двух нечетких чисел и произведения квадрата нечеткого числа на обратное ему число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Конышева Л. К., Назаров Д. М.* Основы теории нечетких множеств. – Спб.: Питер, 2011. – 192 с.

2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

3. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат. – М.: Бином, 2009. – 798 с.

Сапкина Наталья Владимировна – аспирант факультета ПММ кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета. E-mail: natashasapkina@yandex.ru

Sapkina Natalia Vladimirovna – post-graduate student at the faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics of the dep. of Calculus and Applied Information Technologies, Voronezh State University. E-Mail: natashasapkina@yandex.ru