УДК 519.876.3

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

О. А. Коновалов*, Е. В. Коновальчук*, К. А. Малыков*, Ю. С. Сербулов**

** Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)*
*** Воронежская государственная лесотехническая академия*

Поступила в редакцию 11.03.2012 г.

Аннотация. В статье рассмотрена задача оптимального распределения трудовых ресурсов по зависимым операциям. Получено решение задачи минимизации временных затрат на выполнение проекта за счет перераспределения ресурсов. Предложен метод оптимизации структуры детерминированной сетевой модели, позволяющий уменьшить продолжительность выполнения проекта, снизить трудоемкость операций, осуществить экономию трудозатрат и повысить эффективность использования трудовых ресурсов.
Ключевые слова: сетевая модель, распределение ресурсов, оптимизация структуры сети, операции.
Annotation. The problem of optimum distribution of manpower on dependent operations is considered in article. The decision of a problem minimization time expenses for performance of the project at the expense redistribution of resources is received. The method of optimization structure of determined network model, allowing to reduce duration of performance of the project is offered, to lower labor input of operations, to carry out economy of expenditures of labor and to raise efficiency of use of a manpower.
Keywords: network model, resources distribution, optimization of network structure, operations.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время универсальных эффективных точных методов решения задач распределения ресурсов на сетях не существует, как собственно и общих алгоритмов поиска ограниченных ресурсов между операциями, минимизирующих время завершения проекта [1].

Анализ известных методов распределения ресурсов показывает, что они не достаточно эффективны для зависимых операций. Ограниченное применение эвристических алгоритмов определения оптимального распределения ресурсов для «невогнутых» функций интенсивности, как и агрегирование комплекса операций, обуславливается потерей управления уже на стадии планирования [2]. При этом задача оптимального распределения ресурсов является актуальной и обуславливается разработкой методов, моделей и алгоритмов, позволяющих оптимизировать структуру сетевой модели, минимизировать время и стоимость выполнения проекта.

ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим проект, состоящий из комплекса зависимых операций, технологическая зависимость между которыми задается в виде детерминированной сети с первоначальным планом распределения ресурсов.

Примем, что каждая операция выполняется с переменной интенсивностью специалистами различного уровня подготовки (квалификации). Перераспределение ресурсов с одной операции на другую не связано с временными затратами, и операции можно прерывать до их окончания.

Пусть на реализацию проекта выделено ограниченное количество трудовых ресурсов S различных типов h; L – множество операций, заранее заданных списком, $(i, j) \in L$; i и j вершины дуги (i, j); $A_{(ij)}$ – множество различных типов специалистов, которые назначаются на выполнение $l_{(ij)}$-й операции; H и Q – множества операций с каждой из которых будут сниматься и соответственно добавляться специалисты хотя бы одного h-го типа; $R_{(ij)}^{\text{полн}}$ – полный резерв времени $l_{(ij)}$-й операции; $C_{(ij)}$ – часть выполненной $l_{(ij)}$-й операции; $x_{(ij)}$ – число специалистов, приступивших к выполнению $l_{(ij)}$-й операции; $\lambda_{h(ij)}$ – производительность специалиста h-го типа; K_Σ – суммарный эмпирический коэффициент, $K_\Sigma \in [0;\ 1]$; $T^{\text{дир}}$ – директивный срок проекта; $T^{\text{кр}}$ – время критического пути графа; $t_{(ij)}$ – планируемая продолжительность операции при заданном распределении ресурсов.

Для оптимального распределения специалистов различных квалификаций $x_{h(ij)}$ по операциям графа необходимо найти такое их целочисленное перераспределение, $x^*_{h,k(ij)}$, $k = 1,2,\ldots,M^*_{(ij)}$, $\in A_{(ij)}$, ($M^*_{(ij)}$ – число частей $l_{(ij)}$-й операции) которое обеспечит максимум целевой функции (1) в области заданных соответствующих ограничений [2, 3].

$$F^*_\Sigma = -\,(D - T^{\text{дир}}), \qquad (1)$$

где

$$D = \sum_{l_{(ij)} \in T^{\text{кр}}} \sum_{k=1}^{\mathbf{M}^*_{(ij)}} \frac{1}{\sum\limits_{h \in \mathbf{A}_{(ij)}} \lambda_{h(ij)} \cdot x^*_{hk(ij)}} \cdot C^*_{k(ij)} \cdot (1 + K_\Sigma),$$

$$D \to \min.$$

Величина D в (1) характеризует критическое время операций графа.

Путем определения в каждый момент времени максимального приращения целевой функции (1) при последовательном назначении ресурсов на операции будет получен рациональный план их распределения [2].

С целью оптимизации структуры графа предлагается перераспределять ресурсы проекта путем снятия их с некритических операций и переназначении на критические. При таком перераспределении ресурсов основным условием является нахождение такого момента времени, при котором резерв времени некритических операций будет минимальным. В результате получим сетевой граф, в котором все пути будут критическими.

Такой подход позволит получить численное решение поставленной задачи с заданной степенью точности, минимизировать время выполнения проекта и получить оптимальную по структуре сетевую модель.

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПО ЗАВИСИМЫМ ОПЕРАЦИЯМ

При решении задачи оптимального распределения ресурсов предлагается скорректировать понятие «резерва времени», поскольку помимо жестких ограничений, возникают зависимости между операциями, обусловленные перераспределением ресурсов. В этом случае основными аргументами являются потоки ресурсов между операциями. Перебор различных вариантов перераспределения ресурсов обуславливается различными резервами времени операций [2]. Однако при перераспределении потоков ресурсов на критические операции возникает парадокс, заключающийся в возможном увеличении времени критического пути, что существенно усложняет расчеты. В связи с этим предлагается в качестве показателя критичности выполнения операций использовать резервы их объема.

<u>Определение 1.</u> Под резервом объема операции понимается объем работ, который могли бы выполнить специалисты за время их максимального допустимого ожидания.

Величина резерва объема операции обуславливается снятием специалистов не позднее момента ее позднего окончания.

В соответствии с разработанным алгоритмом оптимального распределения ограниченных ресурсов по зависимым операциям [3], процесс максимизации функции (1) разбивается на N итераций, на каждой из которых специалисты h-го типа снимаются с некритических операций имеющих резервы объема и назначаются на выполнение критических операций, сокращение продолжительности которых обеспечивает максимальное приращение целевой функции (1).

В общем виде алгоритм включает следующие этапы.

<u>Шаг 1.</u> Определение временных параметров операций (т.е. критического пути графа, ранних и поздних сроков свершения событий, начала и окончания операций, их резервов времени и резервов объема).

<u>Шаг 2.</u> Построение для критических операций фронта операций $r_{q,m}$, за счет которого они могут быть сокращены по продолжительности. Расчет абсолютных и нормированных резервов объема операций.

<u>Шаг 3.</u> Определение в построенном фронте операций $r_{q,m}$ такой некритической операции, с которой целесообразно перераспределить специалиста h-го типа на выполнение критической операции.

<u>Шаг 4.</u> Определение новой производительности специалистов, типа и их количества в соответствии с возможными вариантами их

перераспределения, а также расчет новых временных параметров проекта.

Шаг 5. Оценка полученных результатов в соответствии с требуемыми. Итерационный процесс решения задачи обрывается в случае выполнения одного из условий:

$$D = T^{\text{дир}}; \qquad (2)$$

$$\bigcup_{(ij)\in r_{q,m}} l_{(ij)} = \Lambda. \qquad (3)$$

Шаг 6. Произвести пересчет исходной информации для перехода к $(m+1)$-й итерации решения задачи, $m = 1,2,...K-1$.

В результате решения задачи будет получен оптимальный план распределения ресурсов по зависимым операциям.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

Для независимых операций В. Н. Бурковым было доказано, что распределение ресурсов будет оптимальным в случае, если все операции выполняются специалистами одного типа с постоянной интенсивностью и если они начинаются и заканчиваются одновременно [4].

При этом модернизированный метод последовательных назначений, предложенный в [2], позволяет получить оптимальное решение задачи перераспределения специалистов по зависимым операциям за счет использования их резервов для случая, когда каждая операция может выполняться только одним h-ым типом специалистов, $h = 1, 2,..., S$.

Реализация предложенного метода возможна в случае, если суммарная продолжительность выполнения операций задается в виде вогнутых и аддитивных функций.

Модернизация метода последовательных назначений заключается в том, что каждое значение плана распределения ресурсов делится на μ целых частей, $\mu = 0, 1,..., p$, где p – конечное число частей, которые принимаются за новые единицы, и рассчитывается новый план распределения выделенных ресурсов. Расчет выполняется последовательно и повторяется до тех пор, пока значение приращения целевой функции не станет отрицательным. Затем каждое значение полученного плана умножается на $(1/\mu)$, который в результате будет являться оптимальным.

Для такой задачи целевая функция (1) будет иметь вид:

$$F_{\Sigma}^{*} = -\sum_{l_{(ij)}\in T^{\text{кр}}} \sum_{h=1}^{S} \sum_{k=1}^{M_{(ij)}^{*}} \frac{C_{k(ij)}^{*}\cdot(1+K_{\Sigma})}{\lambda_{h(ij)}\cdot x_{hk(ij)}^{*}}. \qquad (4)$$

Теорема 1. Если все функции суммарной продолжительности выполнения операций $f_{h}^{\text{опер}}(x_{h,1}^{*}, x_{h,2}^{*},..., x_{h,b_h}^{*})$ вогнуты и аддитивны, то перераспределение специалистов за счет использования резервов времени операций с помощью модернизированного метода последовательных назначений приводит к максимуму функции (4) при соответствующих ограничениях.

Доказательство. Пусть в соответствии с условием теоремы

$$f_{h}^{\text{опер}}(x_{h,1}^{*}, x_{h,2}^{*},..., x_{h,b_h}^{*}) + ... + f_{h,b_h}^{\text{опер}}(x_{h,b_h}^{*}), \qquad (5)$$

$$2f_{h,y}^{\text{опер}}(x_{h,y}^{*}) \geq f_{h,y}^{\text{опер}}(x_{h,y}^{*}-a) + f_{h,y}^{\text{опер}}(x_{h,y}^{*}+a), \qquad (6)$$

где b_h – число операций множества $Q^{(f)} = \bigcup_{l_{(ij)}\in Q_m} l_{(ij)}$ с назначенными ресурсами.

Рассмотрим матрицу $\Delta^{\text{пр}} = \{\Delta_{y,r}^{\text{пр}}\}$ приращений функции (4):

$$\begin{cases} f_{h,y}^{\text{опер}}(0) = 0, \\ \Delta_{y,r}^{\text{пр}} = f_{h,y}^{\text{опер}}(r) - f_{h,y}^{\text{опер}}(r-1), \\ h = 1,2,...,S,\ r = 1,2,...,R^{\text{полн}},\ y = 1,2,...,b_h. \end{cases} \qquad (7)$$

где $R^{\text{полн}}$ – полный суммарный резерв времени всех операций множества H_1, включающего в себя такие резервы времени.

Физически $\Delta_{y,r}^{\text{пр}}$ означает приращение функции (4) за счет того, что на выполнение y-ой операции множества $Q^{(f)}$ дополнительно назначается один специалист при условии, что на эту же самую операцию уже было назначено дополнительно $(r-1)$ специалистов, которые были сняты с операций множества H_1. Время снятия одного специалиста с $l_{(ij)_\theta}$-й операции множества H_1 и назначения его на $l_{(ij)_y}$ операцию множества $Q_{1m}^{(f)}$ определяется из условия уменьшения суммарного положительного резерва времени на одну единицу. В соответствии с (6) в силу вогнутости функции $f_{h,y}^{\text{полн}}(x_{h,y}^{*})$ справедливо соотношение $\Delta_{y,r-1}^{\text{пр}} \geq \Delta_{y,r}^{\text{пр}}$, т.е. в матрице $\Delta^{\text{пр}}$ элементы в столбцах расположены в порядке невозрастания $\Delta_{y,r,1}^{\text{пр}} \geq \Delta_{y,r,2}^{\text{пр}} \geq \Delta_{y,r,r}^{\text{пр}} \geq ... \geq \Delta_{y,r,R^{\text{полн}}}^{\text{пр}}$.

Преобразуем $\Delta^{\text{пр}} = \{\Delta_{h,y,r}^{\text{пр}}\}$, в вектор $\{\Delta_{q}^{\text{пр}}\}$, $q = 1, 2,..., \eta$, $\eta = \sum_{h=1}^{S} b_h \cdot R^{\text{полн}}$ так, чтобы элементы $\Delta_{q}^{\text{пр}}$ образовали вариационный ряд по невозрастанию

$$\Delta_{1}^{\text{пр}} \geq \Delta_{2}^{\text{пр}} \geq ... \geq \Delta_{q}^{\text{пр}} \geq ... \geq \Delta_{\eta}^{\text{пр}}. \qquad (8)$$

Элементы этого ряда обладают важным свойством, заключающимся в том, что если $\Delta_q^{\text{пр}} = \Delta_{l,y,r}^{\text{пр}}$, то найдется такое $\gamma < q$, что $\Delta_\gamma^{\text{пр}} = \Delta_{h,y,r-1}^{\text{пр}}$. Это свойство имеет место только для вогнутых функций и позволяет предложить конструктивный метод построения решения задачи.

Тогда в силу отмеченного выше свойства очевидно, что

$$\phi_r^* = \sum_{h=1}^{S} \sum_{y=1}^{b_h} \sum_{R^{\text{полн}}=1}^{x_{h,y}^* - x_{h,y}} \Delta_{h,y,r}^{\text{пр}} = \sum_{h=1}^{S} \max_{x_{h,y}^*} f_h^{\text{опер}}(x_h^*), \quad (9)$$

где ϕ_r^* – сумма первых r элементов вектора $\{\Delta_q^{\text{пр}}\}$, причем $\sum_{h=1}^{S} \sum_{y=1}^{b_h} x_{h,y}^* - x_{h,y} = r.$ Теорема 1 доказана.

Последовательно двигаясь по наибольшим приращениям целевой функции (элементам ряда (8)), на каждом шаге будет получено оптимальное перераспределение специалистов за счет использования резервов времени операций и, в конечном итоге, при $r = R^{\text{полн}}$ – получим оптимальное решение задачи.

Аналогичным образом теорема 1 доказывается и справедлива для резервов объема операций.

Определение 2. Сетевая модель, в которой все пути одинаковы, а также резервы времени и/или резервы объема операций равны нулю будем считать оптимальной по структуре.

Теорема 2. Для того чтобы время выполнения проекта при заданном распределении ресурсов можно было уменьшить, необходимо и достаточно, чтобы в сетевой модели отсутствовал критический путь.

Необходимость. Рассмотрим доказательство методом от противного. Предположим, что время выполнения проекта можно уменьшить на $\Delta\tau$, перераспределив ресурсы с некритических операций на критические. Очевидно, что критический путь сетевой модели при этом изменится, хотя бы при одном таком перераспределении. Также изменятся и времена выполнения операций, с которых будут перераспределяться ресурсы. При этом новые поздние моменты операций, с которых были сняты ресурсы – увеличатся на величину $\Delta\tau$, считая, что время выполнения проекта останется прежним. Таким образом, получим, что при том же распределении ресурсов и том же времени окончания проекта резерв времени и объема операции критического пути увеличится в результате изменения моментов перераспределения ресурсов. Но операции критического пути нельзя увеличить изменением моментов перераспределения ресурсов при постоянных потоках ресурсов и времени окончания проекта.

Достаточность. Рассмотрим разрез сетевой модели (X, Y), состоящий из дуг (i, j) таких, что абсолютный резерв объема $\Delta W_{(ij)}^{\text{абс}} > 0$ и примем, что все операции $z_{(ij)} \in Z$ имеют ненулевые резервы объема. Отметим, что функция зависимости скорости выполнения операции от количества ресурсов является кусочно-постоянной, неубывающей, непрерывной справа функцией и равной нулю в нуле. При снятии ресурсов с некритических операций и перераспределении их на критические, уменьшив поздние моменты начала операций, а также поздние моменты назначения ресурсов на величину $\Delta\tau = \min_Z \Delta\tau_{(ij)}$, время окончания проекта уменьшится на величину $\Delta\tau$.

Теорема 2 доказана.

Для оптимизации структуры сети предлагается следующий метод, в соответствии с которым необходимо разбить продолжительности выполнения операций (с которых и на которые перераспределяются ресурсы) на определенные и равные временные интервалы. Следует отметить, что чем на большее число интервалов будет разбита операция, тем выше степень точности получения оптимального решения задачи. Рекомендуется задавать степень точности порядка 0,1–0,01, т.е. необходимо будет разбивать продолжительность выполнения операции на 10–100 частей соответственно и выбирать шаг дискретизации $\Delta\tau$ времени ее выполнения.

Далее необходимо в каждый момент времени определить объемы выполненной некритической и критической операции $\Delta C_{(ij)_q}^{\text{вып}}$ и $\Delta C_{(ij)_\kappa}^{\text{вып}}$ соответственно, а также оставшиеся объемы операций $\Delta C_{(ij)_q}^{\text{ост}}$ и $\Delta C_{(ij)_\kappa}^{\text{ост}}$.

При этом требуется определить новые параметры операций множеств $Q^{(f)}$ и H соответственно:

– $\Delta t_{(ij)_q}$ и $\Delta t_{(ij)_\kappa}$ – время выполнения некритической и критической операции соответственно;

– $\Delta t_{\Sigma(ij)_q}$ и $\Delta t_{\Sigma(ij)_\kappa}$ – суммарное время выполнения некритической и критической операции соответственно;

– $t_{(ij)_q}^{\text{ув}}$ и $t_{(ij)_\kappa}^{\text{ум}}$ – уменьшенное и увеличенное время некритической и критической операции соответственно.

Рассчитав параметры операций, необходимо выбрать критерий оптимальности перераспределения специалистов, в соответствии с которым требуется определить оптимальный вариант, обеспечивающий максимальное приращение целевой функции (1). Для этого в каждый момент времени рассчитать сумму увеличенного и уменьшенного времени некритической и критической операции соответственно при снятии и назначении специалистов на операции $\xi = t^{\text{ув}}_{(ij)_q} + t^{\text{ум}}_{(ij)_q}$. Для получения оптимальной по структуре сетевой модели необходимо, чтобы разница из полученной суммы ξ и полного резерва времени этой операции $R^{\text{полн}}_{(ij)}$ была равна нулю, $\xi - R^{\text{полн}}_{(ij)} = 0$. Если разница $\xi - R^{\text{полн}}_{(ij)} < 0$ (т.е. резерв времени операции остается), то критический путь сетевой модели изменится, если $\xi - R^{\text{полн}}_{(ij)} > 0$ – то нет.

Рассмотрев все варианты перераспределения специалистов различных квалификаций и выбрав оптимальный, необходимо определить новые параметры сетевой модели. При этом операции, на которых осуществляется перераспределение ресурсов, разбиваются на две части (до и после перераспределения ресурсов). Итерационный процесс будет завершен, как только все резервы времени некритических операций станут равны нулю, т.е. все пути сетевой модели будут критическими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение задачи оптимального распределения ресурсов по зависимым операциям с помощью предложенного метода оптимизации структуры детерминированной сетевой модели. Полученные результаты направлены на совершенствование моделей и алгоритмов выбора оптимальной стратегии элементов в условиях конфликта и разрушений топологических ациклических структур систем технологических систем.

Изложенный подход распределения ресурсов может быть применен для планирования и организации оперативного развертывания, подготовки к функционированию сложных технических систем, технического (сервисного) обслуживания, транспортирования и решения других задачах управления в организационно-технических и технологических системах [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В. Н.* Модели и методы мультипроектного управления / В. Н. Бурков, О. Ф. Квон, Л. А. Цитович. – М.: ИПУ РАН, 1997. – 62 с.

2. *Зырянов Ю. Т.* Система управления рациональным распределением ресурсов на основе модернизированного метода последовательных назначений / Ю. Т. Зырянов, О. А. Коновалов // Проблемы управления. – 2011. – №1. – С. 55–62.

3. *Зырянов Ю. Т.* Алгоритм распределения ресурсов по множеству зависимых операций / Ю. Т. Зырянов, О. А. Коновалов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2009. – № 10. – С. 10–16.

4. *Арутюнов А. В.* Задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций / А. В. Арутюнов, В. Н. Бурков, А. Ю. Заложнев // Автоматика и телемеханика. 2002. – №5. – С. 108–119.

5. *Зырянов Ю. Т.* Управление профилактикой в организационно-технических системах / Ю. Т. Зырянов, К. А. Малыков. – М.: АСТ-Пресс книга, 2005. – 160 с.

Коновалов Олег Анатольевич – преподаватель Военного учебно-научного центра ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж), кандидат технических наук. Тел.: 89081327068. E-mail: Oleg-070707@yandex.ru

Коновальчук Евгений Викторович – начальник факультета Военного учебно-научного центра ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж), кандидат технических наук, доцент. Тел.: 89102426919.

Konovalov Oleg – teacher of Military Educational Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin» (Voronezh), Candidate of Science. Tel.: 89081327068. E-mail: Oleg-070707@yandex.ru

Konovalchuk Evgeniy – the chief of faculty of Military Educational Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin» (Voronezh), Candidate of Science, assistant professor. Tel.: 89102426919.

Малыков Константин Анатольевич – заместитель начальника кафедры Военного учебно-научного центра ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж), кандидат технических наук, доцент. Тел.: 89107581310. E-mail: mka310565@mail.ru

Сербулов Юрий Стефанович – профессор кафедры Воронежской государственной лесотехнической академии, доктор технических наук. Тел.: 89102407133. E-mail: userbulov@vivt.ru

Malykov Konstantin – deputy head of department of of Military Educational Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin» (Voronezh), Candidate of Science, assistant professor. Tel.: 89107581310. E-mail: mka310565@mail.ru

Serbulov Yurii – Professor of the Department of the Voronezh State Technical Academy, Doctor of Science. Tel.: 89102407133. E-mail: userbulov@vivt.ru