

О СПОСОБЕ НАНЕСЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ТОЧЕК НА ОТРЕЗОК ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПОТОЧЕЧНОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

А. Д. Чернышов*, В. В. Горяйнов**

* Воронежский государственный университет инженерных технологий

** Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 01.11.2012 г.

Аннотация. Исследована относительная погрешность представления функции и ее производных быстрыми разложениями. Сделан анализ погрешности при различных способах нанесения расчетных точек и определен наиболее эффективный способ их нанесения.

Ключевые слова: быстрые разложения, коэффициенты Фурье, вычислительный эксперимент, погрешность, условия Дирихле.

Annotation. The relative error of representation of function and its derivatives is investigated by rapid expansions. The error analysis is made at various modes of drawing of rated points and the most effective mode of their drawing is defined.

Keywords: rapid expansions, coefficients of Fourier, computing experiment, an error, conditions of Dirichlet.

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях системного анализа используются дифференциальные уравнения с различными свойствами [1]. Одним из инструментов решения подобных уравнений являются ряды Фурье [2, 3]. Наиболее эффективным является метод быстрых разложений [4, 5], которые сходятся значительно быстрее классических рядов Фурье, допускают многократное почленное дифференцирование [6] и имеют высокую точность [7]. Для решения краевой задачи с условиями Дирихле необходимо представить искомую функцию быстрым разложением, а коэффициенты разложения определить поточечным методом [7]. Подобная ситуация возникает при рассмотрении различных нелинейных прикладных задач [8], например, при нахождении прогибов упругой балки, дифференциальное уравнение которой имеет вид [9]

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z},$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Следует отметить, что представление функции быстрым разложением обеспечивает высокую точность при последующем использовании поточечного метода вычисления коэффициентов Фурье. Незученным является вопрос о выборе оптимального способа разбиения отрезка при реализации поточечного метода.

ПОТОЧЕЧНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Быстрое синус-разложение функции $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) представляется суммой граничной функции специального вида и быстрого ряда Фурье по синусам и косинусам

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^* \sin m\pi x,$$

$$f(x) = M_{2p-1}(x) + a_0^* + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \cos m\pi x, \quad (1)$$

где a_0^* , a_m^* , b_m^* – коэффициенты Фурье, $M_{2p}(x)$ и $M_{2p-1}(x)$ – граничные функции. Из класса полиномов наименьшей степени x эти функцию можно взять в виде [4]

$$\begin{aligned}
 M_{2p}(x) &= f(0)(1-x) + f(1)x + \\
 &+ \sum_{i=1}^p f^{(2i)}(0)A_{2i}(x) + \sum_{i=1}^p f^{(2i)}(1)B_{2i}(x), \quad p \geq 0, \\
 M_{2p-1}(x) &= \sum_{i=1}^p f^{(2i-1)}(0)A_{2i-1}(x) + \\
 &+ \sum_{i=1}^p f^{(2i-1)}(1)B_{2i-1}(x), \quad p \geq 1, \\
 A_{2i}(x) &= \Phi_{2i}(x) - x\Phi_{2i}(1), \\
 \Phi_{2i}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^x A_{2i-2}(x) dx \right] dx, \\
 A_0(x) &= 1-x, \quad B_0(x) = x, \\
 B_{2i}(x) &= F_{2i}(x) - xF_{2i}(1), \\
 F_{2i}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^x B_{2i-2}(x) dx \right] dx, \\
 A_{2i-1}(x) &= \int_0^x A_{2i-2}(x) dx, \\
 B_{2i-1}(x) &= \int_0^x B_{2i-2}(x) dx.
 \end{aligned} \tag{2}$$

При вычислении коэффициентов Фурье существует проблема «неберущихся» интегралов. Для ее решения, в основном, используют квадратурные формулы, например [10, 11]. Данные формулы применяются для заранее заданных функций, наделенных некоторыми свойствами. Однако если функция заранее неизвестна и она должна быть определена из решения некоторой краевой задачи, то применение подобных формул становится затруднительным. Поэтому для решения подобной проблемы предлагается поточечный метод определения коэффициентов a_0^* , a_m^* , b_m^* [7].

В рядах (1) обычно ограничиваются конечным числом слагаемых, которое обозначается через n , т.е.

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^n b_m^* \sin m\pi x, \\
 f(x) &\approx M_{2p-1}(x) + a_0^* + \sum_{m=1}^n a_m^* \cos m\pi x.
 \end{aligned} \tag{3}$$

По аналогии с выражениями (3) функцию $f(x)$ приближенно представим в виде

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^n b_m \sin m\pi x, \\
 f(x) &\approx M_{2p-1}(x) + a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos m\pi x.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Отличие выражений (4) от (3) заключается в определении коэффициентов a_0^* , a_m^* , b_m^* и a_0 ,

a_m , b_m : коэффициенты a_0^* , a_m^* , b_m^* определяются интегралами, тогда как a_0 , a_m , b_m будем определять поточечным способом.

В случае быстрого синус-разложения, область $x \in [0, 1]$ разбивается равномерно на $n+1$ промежутков n внутренними расчетными точками, а для косинус-разложения область разбивается на $n+2$ промежутка. Затем записываются равенства (4) в каждой расчетной точке и получаются линейные системы алгебраических уравнений относительно a_0 , a_m , b_m :

$$\begin{aligned}
 f(x_r) &= M_{2p}(x_r) + \sum_{m=1}^n b_m \sin m\pi x_r, \\
 x_r &= rh, \quad h = \frac{1}{n+1}, \quad r = 1 \dots n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_r) &= M_{2p-1}(x_r) + a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos m\pi x_r, \\
 x_r &= rh, \quad h = \frac{1}{n+2}, \\
 r &= 1 \dots n+1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

где n – количество неизвестных коэффициентов a_m или b_m . Значения $x=0$ и $x=1$ не используются, т.к. на концах отрезка уравнения (5) и (6) обращаются в тождества.

При решении краевой задачи с условиями Дирихле производные искомой функции, входящие в $M_{2p}(x)$ и $M_{2p-1}(x)$, неизвестны, поэтому для их нахождения требуются $2p$ дополнительных расчетных точек. При этом возникает вопрос о том, как лучше расположить дополнительные расчетные точки внутри отрезка $[0, 1]$ для достижения наилучшей точности вычислений. Исследуем два варианта распределения расчетных точек: равномерный и специальный. При равномерном способе все расчетные точки (включая и дополнительные) будут разбивать отрезок $[0, 1]$ на $(n+1+2p)$ промежутков, в случае синус-разложения и на $(n+2+2p)$ промежутков для косинус-разложения. Если использовать специальное разбиение, то будем поступать следующим образом. Отрезок $[0, 1]$ разбивается равномерно на $(n+1)$ промежутков n расчетными точками, а дополнительные $2p$ точек с некоторыми координатами x_i^* ($i = 1 \div 2p$) расположим на крайних (первом и последнем) промежутках. Алгоритм их расположения следующий: при использовании M_2 по одной дополнительной расчетной точке возьмем в серединах первого и последнего промежутков с координатами

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/(2(n+1)), \\ x_2^* &= (2n+1)/(2(n+1)). \end{aligned} \quad (7)$$

При использовании M_4 к точкам (7) необходимо добавить еще две точки, расположенные в серединах двух крайних промежутков длиной $h/2$:

$$\begin{aligned} x_3^* &= 1/(4(n+1)), \\ x_4^* &= (4n+3)/(4(n+1)). \end{aligned}$$

В общем случае при использовании граничной функции $M_{2p}(x)$ координаты дополнительных расчетных точек определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_j^* &= 1/(2^j(n+1)), \\ x_{j+p}^* &= 1 - 1/(2^j(n+1)), \quad j = 1 \div p. \end{aligned}$$

Если используется косинус-разложение, то отрезок $[0,1]$ разбивается равномерно на $n+2$ промежутка, а принцип расположения дополнительных $2p$ точек остается неизменным. Координаты дополнительных расчетных точек можно определить по формулам

$$\begin{aligned} x_j^* &= 1/(2^j(n+2)), \\ x_{j+p}^* &= 1 - 1/(2^j(n+2)), \quad j = 1 \div p. \end{aligned}$$

С целью выяснения эффективности расположения расчетных точек для указанных двух вариантов был проведен вычислительный эксперимент с различными функциями $f(x)$, имеющими участки с большой кривизной и множеством точек перегиба. Оба фактора создают вычислительные трудности, что подтверждается ниже, а также следует из примеров, приведенных в [12].

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

В качестве исследуемых функций с большим количеством точек перегиба были выбраны

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(k + 0.2)\pi x, \quad x \in [0;1], \\ k &= 0.25, 0.45, 1, 2, \dots, 10. \end{aligned} \quad (8)$$

Зависимости (8) на отрезке $[0,1]$ имеют k точек перегиба, а число 0.2 выбрано для того, чтобы при $x = 1$ значения аргумента не были кратными π , что создает дополнительные вычислительные трудности и увеличивает погрешность.

Во внутренних точках отрезка $[0,1]$ относительная погрешность функции и ее производных до $(2p+1)$ порядка включительно исследовалась по формуле

$$\delta = |\Delta|/N \cdot 100\%,$$

где Δ – абсолютная погрешность функции (производной), N – максимальное значение функции (производной). Результаты экспериментов покажем на примере функции $\sin 5.2\pi x$, имеющей пять точек перегиба. Сначала рассмотрим быстрое синус-разложение. Графики зависимости относительной погрешности $\delta(x)$ при $p = 1$ и десяти расчетных точках для $f(x)$ и $f'(x)$ приведены на рис. 1.

В дальнейшем, будем обозначать относительную погрешность функции и ее производных, как $\delta(f)$ и $\delta(f^{(i)})$ соответственно, а зависимость $\delta(x)$ для функции и ее производных обозначим через $\delta(f, x)$ и $\delta(f^{(i)}, x)$.

Установлено, что при равномерном разбиении качественный вид зависимостей $\delta(f, x)$ и

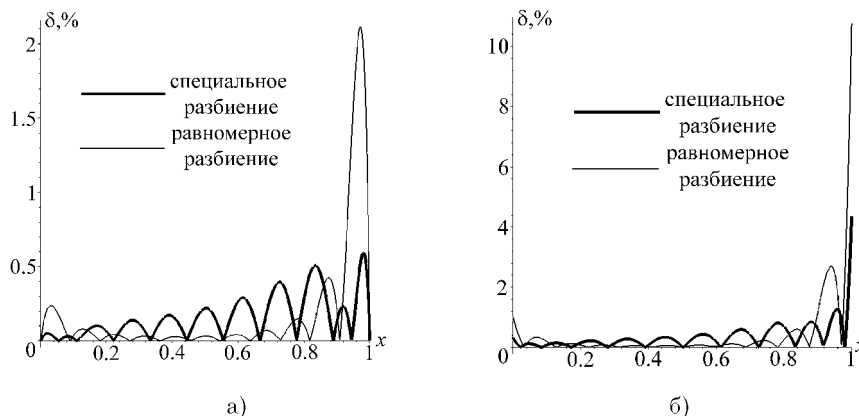


Рис. 1. Относительная погрешность быстрого синус-разложения:
а) – функции $f(x)$, б) – первой производной $f'(x)$

$\delta(f^{(i)}, x)$ при любом i не зависит от выбора параметра p граничной функции, причем качественно этот график для всех производных одинаков (как на рис. 1,б) и отличается от вида графика $\delta(f, x)$. Следует отметить, что зависимость $\delta(x)$ для четных производных при равномерном разбиении в краевой задаче с условиями Дирихле качественно отличается от подобной зависимости для случая, когда известны производные функции на границах [7]. При равномерном разбиении максимальная погрешность $\delta_{\max}(f^{(i)})$ для любого i находится на правой границе отрезка $[0, 1]$ (см. рис. 1,б), а $\delta_{\max}(f)$ находится вблизи $x = 1$ (хотя и вблизи границы $x = 0$ $\delta_{\max}(f)$ больше, чем во внутренних точках) (см. рис. 1,а).

Поведение погрешности при специальном разбиении характеризуется положительной особенностью по сравнению с равномерным разбиением: за счет расположения дополнительных расчетных точек вблизи границ отрезка $[0, 1]$ уменьшаются $\delta_{\max}(f)$ и $\delta_{\max}(f^{(i)})$ при любом i (см. рис. 1). При этом (в случае $\delta_{\max}(f) \leq 1\%$ и $\delta_{\max}(f^{(i)}) \leq 1\%$) с ростом параметра p ($p \geq 3$) погрешность на границах отрезка становится меньше, чем во внутренних точках, т.е. меняется качественный вид зависимостей $\delta(f, x)$ и $\delta(f^{(i)}, x)$. Наиболее это выражено становится при использовании граничной функции M_{10} . График зависимостей $\delta(f, x)$ и $\delta(f', x)$ при $p = 5$ и пятнадцати расчетных точках приведены на рис. 2. Зависимость $\delta(x)$ производных четного порядка качественно похожа на график $\delta(f, x)$, а нечетного порядка – на график $\delta(f^{(i)}, x)$. С увеличением количества расчетных точек значения $\delta_{\max}(f)$ и $\delta_{\max}(f^{(i)})$ смещаются к границе $x = 1$.

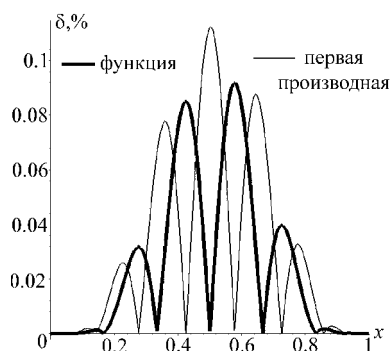


Рис. 2. Относительная погрешность быстрого синус-разложения для специального разбиения при $p = 5$ для $n + 2p = 15$

На рис. 3 представлена зависимость $\delta(f, x)$, характерная для быстрого косинус-разложения, полученная при использовании M_3 и пятнадцати расчетных точек.

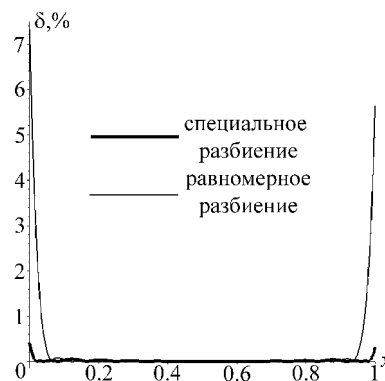


Рис. 3. Относительная погрешность быстрого косинус-разложения функции

При равномерном разбиении отрезка качественный вид зависимостей $\delta(f, x)$ и $\delta(f^{(i)}, x)$ при любом i одинаков (что не наблюдалось при быстром синус-разложении) и не зависит от порядка граничной функции (см. рис. 3). Значения $\delta_{\max}(f)$ и $\delta_{\max}(f^{(i)})$ всегда достигаются при $x = 0$. Для специального разбиения отрезка значения $\delta_{\max}(f)$ и $\delta_{\max}(f^{(i)})$ также находятся в точке $x = 0$ и качественный вид графиков зависимостей $\delta(f, x)$ и $\delta(f^{(i)}, x)$ будет одинаков и похож на рис. 3. Но в отличие от равномерного разбиения вид графика $\delta(x)$ будет зависеть от выбора граничной функции, также как и при быстром синус-разложении (для косинус-разложения при $p \geq 4$ значения $\delta_{\max}(f)$ и $\delta_{\max}(f^{(i)})$ будут находиться не в точке $x = 0$, а внутри отрезка).

Более подробная информация о значениях $\delta_{\max}(f)$, $\delta_{\max}(f')$ и $\delta_{\max}(f'')$ в зависимости от выбора граничной функции и от количества расчетных точек на примере синус-разложения для функции $\sin 5.2\pi x$ представлена в таблице.

Прочерки вместо значений $\delta_{\max}(f)$, $\delta_{\max}(f')$ и $\delta_{\max}(f'')$ в табл. стоят в тех случаях, когда быстрый ряд Фурье расходится или отсутствует. Это происходит при значениях параметра $p \geq 3$, так как при использовании небольшого количества расчетных точек (например $n + 2p = 10$), в быстром разложении содержится мало членов быстрого ряда Фурье, а в случае граничной функции M_{10} ряд отсутствует. Как видно из табл., рис. 1 и рис. 3 специальное разбиение

Таблица

Значения $\delta_{\max}$

Погрешность	Разбиение	$n + 2p$	Граничная функция				
			M_2	M_4	M_6	M_8	M_{10}
$\delta_{\max}(\sin 5.2\pi x)$	Равномерное	10	2.12 %	2.14 %	-----	-----	-----
		20	$9.66 \cdot 10^{-2}$ %	$1.07 \cdot 10^{-2}$ %	$1.62 \cdot 10^{-3}$ %	$3.31 \cdot 10^{-4}$ %	$9.77 \cdot 10^{-5}$ %
		40	$5.93 \cdot 10^{-3}$ %	$1.47 \cdot 10^{-4}$ %	$4.43 \cdot 10^{-6}$ %	$1.52 \cdot 10^{-7}$ %	$5.82 \cdot 10^{-9}$ %
		60	$1.19 \cdot 10^{-3}$ %	$1.28 \cdot 10^{-5}$ %	$1.67 \cdot 10^{-7}$ %	$2.41 \cdot 10^{-9}$ %	$3.74 \cdot 10^{-11}$ %
	Специальное	10	0.59 %	0.67 %	-----	-----	-----
		20	$2.18 \cdot 10^{-2}$ %	$1.02 \cdot 10^{-3}$ %	$1.45 \cdot 10^{-4}$ %	$4.27 \cdot 10^{-5}$ %	$2.91 \cdot 10^{-5}$ %
		40	$1.14 \cdot 10^{-3}$ %	$8.20 \cdot 10^{-6}$ %	$1.32 \cdot 10^{-7}$ %	$2.76 \cdot 10^{-9}$ %	$7.58 \cdot 10^{-11}$ %
		60	$2.18 \cdot 10^{-4}$ %	$5.97 \cdot 10^{-7}$ %	$3.43 \cdot 10^{-9}$ %	$2.32 \cdot 10^{-11}$ %	$1.87 \cdot 10^{-13}$ %
$\delta_{\max}((\sin 5.2\pi x)')$	Равномерное	10	10.77 %	11.89 %	-----	-----	-----
		20	0.99 %	0.12 %	$1.97 \cdot 10^{-2}$ %	$4.21 \cdot 10^{-3}$ %	$1.28 \cdot 10^{-3}$ %
		40	0.12 %	$3.34 \cdot 10^{-3}$ %	$1.08 \cdot 10^{-4}$ %	$3.91 \cdot 10^{-6}$ %	$1.56 \cdot 10^{-7}$ %
		60	$3.58 \cdot 10^{-2}$ %	$4.38 \cdot 10^{-4}$ %	$6.11 \cdot 10^{-6}$ %	$9.28 \cdot 10^{-8}$ %	$1.50 \cdot 10^{-9}$ %
	Специальное	10	4.36 %	1.04 %	-----	-----	-----
		20	0.35 %	$5.76 \cdot 10^{-3}$ %	$4.21 \cdot 10^{-4}$ %	$1.07 \cdot 10^{-4}$ %	$6.12 \cdot 10^{-5}$ %
		40	$3.80 \cdot 10^{-2}$ %	$1.07 \cdot 10^{-4}$ %	$8.85 \cdot 10^{-7}$ %	$1.73 \cdot 10^{-8}$ %	$4.63 \cdot 10^{-10}$ %
		60	$1.09 \cdot 10^{-2}$ %	$1.22 \cdot 10^{-5}$ %	$3.62 \cdot 10^{-8}$ %	$2.29 \cdot 10^{-10}$ %	$1.80 \cdot 10^{-12}$ %
$\delta_{\max}((\sin 5.2\pi x)'')$	Равномерное	10	35.33 %	43.85 %	-----	-----	-----
		20	6.64 %	0.94 %	0.16 %	$3.68 \cdot 10^{-2}$ %	$1.15 \cdot 10^{-2}$ %
		40	1.60 %	$5.11 \cdot 10^{-2}$ %	$1.80 \cdot 10^{-3}$ %	$6.92 \cdot 10^{-5}$ %	$2.89 \cdot 10^{-6}$ %
		60	0.71 %	$1.00 \cdot 10^{-2}$ %	$1.52 \cdot 10^{-4}$ %	$2.46 \cdot 10^{-6}$ %	$4.19 \cdot 10^{-7}$ %
	Специальное	10	20.24 %	7.53 %	-----	-----	-----
		20	3.52 %	0.10 %	$1.91 \cdot 10^{-3}$ %	$2.72 \cdot 10^{-4}$ %	$1.32 \cdot 10^{-4}$ %
		40	0.80 %	$4.22 \cdot 10^{-3}$ %	$1.02 \cdot 10^{-5}$ %	$1.13 \cdot 10^{-7}$ %	$2.80 \cdot 10^{-9}$ %
		60	0.35 %	$7.39 \cdot 10^{-4}$ %	$6.65 \cdot 10^{-7}$ %	$2.45 \cdot 10^{-9}$ %	$1.82 \cdot 10^{-11}$ %

отрезка предпочтительнее равномерного, причем это становится наиболее ощутимым при увеличении параметра p и количества расчетных точек.

Заключение. Для решения краевой задачи механики с условиями Дирихле эффективно использование быстрых разложений. Вычисление коэффициентов разложения становится проблематичным, если краевая задача содержит иррациональные выражения. В подобных случаях можно применять поточечный метод. При этом для определения коэффициентов разложения следует использовать специальное разбиение на концах отрезка, что позволяет повысить точность вычислений с незначительными временными затратами на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катрахов В. В. Асимптотический анализ СМО с бесконечным накопителем / В. В. Катрахов, Д. Е. Рыжков, Н. И. Головки // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии – 2007 – №1 – С. 139–148.

2. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1979. – 560 с.

3. Казаков А. Л. Построение модели неравномерного транспортного потока на примере железнодорожной грузовой станции / А. Л. Казаков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. – №3. – С. 27–32.

4. Чернышов А. Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ, 2009 г., Ч. 2. – С. 236–238.

5. Чернышов А. Д. Быстрые ряды Фурье / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сб. тр. междунар. конф. – Воронеж : ВГУ, 2010 г. С. 388–394.

6. Чернышов А. Д. Улучшение дифференцируемых решений краевых задач механики в форме обобщенных рядов Фурье с помощью граничных функций / А. Д. Чернышов // Изв. РАН. МТТ. – № 1. – 2010. – С. 174–192.

7. Чернышов А. Д. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом / А. Д. Чернышов, В. В. Горайнов, А. О. Соловьев //

Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 6. – № 2. – 2010. – С. 49–53.

8. *Шашкин А. И.* Квазистатическое деформирование упругого стержня при продольном изгибе / А. И. Шашкин, Н. В. Минаева, А. В. Гриценко // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2008. № 12. С. 21–25.

9. *Работнов Ю. Н.* Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 456 с.

10. *Темиргалиев Н.* Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию

коэффициентов Фурье и в задачах восстановления / Н. Темиргалиев, С.С. Кудайбергенов, А.А. Шоманова // Известия Вузов. Математика. – № 3. – 2010. – С. 52–71.

11. *Bojanov B.* Quadrature formulas for Fourier coefficients / B. Bojanov, G. Petrova // J. Comput. and Appl. Math. – Vol. 231. – No 1. – 2009. – pp. 378–391.

12. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

Чернышов Александр Данилович – доктор физико-математических наук, профессор. ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» Кафедра высшей математики. Тел.: (4732) 55-35-54. E-mail: chernyshovad@mail.ru

Chernyshov Alexandr Danilovich – the doctor of physical and mathematical sciences, the professor The Voronezh State University of Engineering Technologies. Chair of higher mathematics, Tel.: (4732) 55-35-54. E-mail: chernyshovad@mail.ru

Горайнов Виталий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет». Кафедра высшей математики, Тел.: (4732) 71-53-62. E-mail: gorvit77@mail.ru

Gorjajnov Vitalij Valerevich – the candidate of physical and mathematical sciences, the docent The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Chair of higher mathematics, Tel.: (4732) 71-53-62. E-mail: gorvit77@mail.ru