УДК 519.7

КЛАСС РАЗНОСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВХОДО-ВЫХОДНЫХ СООТВЕТСТВИЙ С СУММИРУЕМОЙ ПАМЯТЬЮ

В. Г. Курбатов*, В. К. Маршаков**

* *Финансовый университет при Правительстве РФ,*
** *Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 2012 г.

Аннотация. Рассматривается класс систем управления, описываемых разностно-интегральными входо-выходными соотношениями. Обсуждается замкнутость этого класса относительно соединений с обратной связью.
Ключевые слова: система с обратной связью, устойчивость, входо-выходные соотношения, причинный оператор, причинная обратимость.
Annotation. A class of control systems that are described by difference-integral input-output relations is considered. The closeness of this class under feedback connections is discussed.
Keywords: feedback system, stability, input-output relations, causal operator, causal invertibility.

Рассмотрим систему управления с входом u и выходом y, динамика которой описывается уравнением

$$Ly = u,$$

где L – некоторый оператор, действующий в подходящих функциональных пространствах. Очевидно, прямая зависимость выхода y от входа u может быть представлена в виде

$$y = L^{-1}u$$

при условии, что обратный оператор L^{-1} существует. Последнее соотношение называют [1] *входо-выходным соответствием* рассматриваемой системы. Принципиально, что тип оператора L^{-1} может существенно отличаться от типа оператора L. Простейший пример: если L – дифференциальный оператор, то L^{-1}, как правило, является интегральным оператором. Более сложный пример [2–6]: если L – оператор свертки с мерой, то L^{-1} может оказаться оператором свертки с обобщенной функцией.

Аналогичное усложнение типа входо-выходных соответствий может происходить при добавлении к системе обратной связи. Поэтому представляет интерес выделение классов входо-выходных соответствий, замкнутых относительно стандартных преобразований – последовательного и параллельного соединений, а также соединений с помощью обратной связи. Один такой класс – разностно-интегральные входо-выходные соответствия с суммируемой памятью – обсуждается в настоящей статье. Он состоит из разностно-интегральных операторов, мажорируемых свертками с ограниченными мерами, не имеющими непрерывной сингулярной составляющей. Несколько менее общий близкий класс обсуждался ранее в [7]. Основной результат статьи (теорема 7) утверждает, что если существует обратная связь, приводящая к входо-выходному соответствию с суммируемой памятью, то любая другая обратная связь рассматриваемого класса, стабилизирующая систему, также приводит к входо-выходному соответствию с суммируемой памятью.

1. ПРИЧИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Будем считать, что в пространстве $\mathbf{R}^l$ фиксирована некоторая норма. Обозначим через $B(\mathbf{R}^l)$ алгебру всех линейных операторов $\alpha : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^l$ с нормой, порожденной нормой в $\mathbf{R}^l$.

Символом $\mathbf{1}$ будем обозначать тождественный оператор, а символом 0 – нулевой оператор.

Обозначим через L_2 пространство [9] классов (совпадающих почти всюду) измеримых функций $x : \mathbb{R} \to \mathbf{R}^l$ с суммируемым квадратом и обычной нормой, а символом L_{2e} – *расширенное пространство* [1], состоящее из функций $x : \mathbb{R} \to \mathbf{R}^l$, каждая из которых равна нулю левее некоторого $t_0 \in \mathbf{R}$ (зависящего от x) и сужение которой на любой ограниченный промежуток $[a,b]$ суммируемо с квадратом (при приближении к $+\infty$ функция x может расти произвольным образом). Пространство L_{2e} не имеет естественной нормы (но допускает естественную локально выпуклую топологию).

Для каждого $t \in \mathbf{R}$ обозначим через $(L_2)_t$ подпространство пространства L_2, состоящее из функций, равных нулю на $(-\infty, t]$. Под $(L_2)_{-\infty}$ будем понимать само пространство L_2. Линейный оператор $T : L_2 \to L_2$ называют [1, 6, 8] *причинным* (или каузальным), если

$$T(L_2)_t \subseteq (L_2)_t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Символом $T_t : (L_2)_t \to (L_2)_t$ будем обозначать соответствующее сужение. Причинность оператора T означает, что значение сигнала Tx в любой момент времени t определяется только предысторией сигнала x и не зависит от поведения сигнала x в будущем. Очевидно, только причинные входо-выходные соответствия являются физически реализуемыми. Очевидно также, что сумма и произведение причинных операторов снова является причинным. Предел причинных операторов также является причинным оператором.

Аналогично определяется причинность оператора $T : L_{2e} \to L_{2e}$. Нетрудно показать [6], что каждый причинный оператор $T : L_2 \to L_2$ порождает однозначно определенный причинный оператор $T : L_{2e} \to L_{2e}$, но обратное не верно.

Оператор T называют [6, 8] *причинно обратимым,* если T^{-1} существует и является причинным.

Предложение 1 [6, следствие 2.15]. *Для того чтобы причинный оператор $T : L_2 \to L_2$ был причинно обратим, необходимо и достаточно, чтобы операторы $T_t : (L_2)_t \to (L_2)_t$ были обратимы (в обычном смысле) при всех $t \in [-\infty, +\infty)$.*

Пусть $T : L_2 \to L_2$ – причинный оператор. Для каждого $t \in \mathbf{R}$ определим оператор

$$T_{\tilde t} = (\mathbf{1} - P_t)\mathbf{1} + P_t T,$$

где

$$(P_t x)(s) = \begin{cases} 0, \text{ если } s < t, \\ x(s), \text{ если } s \geq t. \end{cases}$$

Положим $T_{-\tilde\infty} = T$. В отличие от T_t оператор $T_{\tilde t}$ действует из L_2 в L_2.

Следствие 2. *Для того чтобы причинный оператор $T : L_2 \to L_2$ был причинно обратим, необходимо и достаточно, чтобы операторы $T_{\tilde t} : L_2 \to L_2$ были обратимы (в обычном смысле) при всех $t \in [-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Заметим, что $(T_{\tilde t})_t = T_t$, в то время как (в обозначениях [6]) $(T_{\tilde t})_{/t} = \mathbf{1}_{/t}$. Оператор $(T_{\tilde t})_{/t} = \mathbf{1}_{/t}$ заведомо обратим. Поэтому в силу [6] операторы $T_{\tilde t}$ и $(T_{\tilde t})_t = T_t$ обратимы одновременно. Остается сослаться на предложение 1. □

Обозначим через $\mathbf{S}$ множество операторов D вида

$$(Dx)(t) = a_0(t)x(t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t)x(t - h_m), \tag{1}$$

где $h_m \in \mathbf{R}$, $a_m : \mathbb{R} \to B(\mathbf{R}^l)$ – измеримые ограниченные функции, причем

$$\operatorname{ess\,sup} \|a_0(t)\| + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{ess\,sup} \|a_m(t)\| < \infty. \tag{2}$$

Очевидно, операторы $D \in \mathbf{S}$ переводят пространство L_2 в себя и являются ограниченными, причем норма оператора (1) не превосходит величины (2).

Через $\mathbf{S}_e$ обозначим множество операторов D вида (1), где $h_m \in \mathbb{R}$, $a_m : \mathbb{R} \to B(\mathbf{R}^l)$ – измеримые ограниченные функции, причем для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ (зависящего от D) выполняется оценка

$$\operatorname{ess\,sup} \|a_0(t)\| + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\gamma h_m} \operatorname{ess\,sup} \|a_m(t)\| < \infty.$$

Операторы $D \in S_e$ можно применять по крайней мере к функциям $x \in L_2$, имеющим компактный носитель. Очевидно, $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_e$.

Предложение 3. *Для того чтобы оператор $D \in \mathbf{S}_e$ был причинным, необходимо и достаточно, чтобы $h_m > 0$ при всех m.*

Доказательство. Предположим сначала, что $D \in \mathbf{S}$. Представим оператор (1) в виде

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} B_m, \tag{3}$$

где

$$(B_m x)(t) = a_m(t)x(t - h_m) \tag{4}$$

(подразумевается, что $h_0 = 0$). Подчеркнем, что ряд (3) сходится абсолютно по норме операторов, действующих из L_2 в L_2.

Обозначим через $\mathbb{X}_b = \mathbb{X}_b(\mathbb{X}^l)$ пространство всех (в том числе разрывных) характеров группы $\mathbb{R}^l$. Для каждого $\chi \in \mathbb{X}_b$ рассмотрим оператор

$$D_\chi = \sum_{m=0}^{\infty} \langle h_m, \chi \rangle B_m,$$

где $\langle h_m, \chi \rangle$ означает результат применения характера χ к элементу $h_m \in \mathbb{R}^l$. Отметим, что D_χ непрерывно по норме зависит от $\chi \in \mathbb{X}_b$.

Для непрерывных характеров $\chi \in \mathbb{X}_b$ имеем

$$D_\chi = \mathbf{\Psi}_\chi D \mathbf{\Psi}_\chi^{-1},$$

где

$$(\mathbf{\Psi}_\chi x)(t) = \langle t, \chi \rangle x(t).$$

Из этого представления и причинности операторов D, $\mathbf{\Psi}_\chi$ и $\mathbf{\Psi}_\chi^{-1}$ видно, что операторы D_χ являются причинными. Но поскольку зависимость D_χ от $\chi \in \mathbb{X}_b$ является непрерывной по норме, а множество непрерывных характеров всюду плотно в $\mathbb{X}_b$ (см., например, [6]), отсюда следует, что операторы D_χ являются причинными при всех $\chi \in \mathbb{X}_b$.

Поскольку $|\langle h_m, \chi \rangle| = 1$, нормы операторов D_χ, $\chi \in \mathbb{X}_b$, не превосходят величины (2). Очевидно [6], что для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\int_{\mathbb{X}_b} \langle -h_k, \chi \rangle D_\chi \, d\chi = B_k,$$

где интегрирование производится по мере Хаара группы $\mathbb{X}_b$. Поскольку операторы D_χ являются причинными, из последнего представления следует, что оператор B_k также является причинным. Но для оператора вида (4) очевидно, что он может быть причинным только при условии, что $h_m \geq 0$.

Чтобы перейти к случаю произвольного $D \in \mathbf{S}_e$, достаточно заменить D на оператор $D_\gamma \in \mathbf{S}$, определяемый по формуле

$$D_\gamma = \mathbf{\Phi}_\gamma D \mathbf{\Phi}_\gamma^{-1},$$

где

$$(\mathbf{\Phi}_\gamma x)(t) = e^{\gamma t} x(t). \; \square$$

Обозначим через $\mathbf{N}$ множество операторов N вида

$$(Nx)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t,s) x(s) ds, \tag{5}$$

где $n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbf{B}(\mathbb{R}^l)$ – измеримая функция, удовлетворяющая для некоторой суммируемой функции $\beta : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ оценке

$$\| n(t,s) \| \leq \beta(t - s).$$

Нетрудно показать [6], что операторы $N \in \mathbf{N}$ переводят пространство L_2 в себя и являются ограниченными, причем норма оператора (5) не превосходит величины $\|\beta\|_{L_1}$.

Через $\mathbf{N}_e$ обозначим множество операторов N вида (5), где $n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbf{B}(\mathbb{R}^l)$ – измеримая функция, удовлетворяющая при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ (зависящем от N) и суммируемой функции $\beta : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ оценке

$$\| n(t,s) \| \leq e^{-\gamma(t-s)} \beta(t - s). \tag{6}$$

Операторы $N \in \mathbf{N}_e$ можно применять по крайней мере к функциям $x \in L_2$, имеющим компактный носитель. Очевидно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_e$.

Предложение 4. *Для того чтобы оператор $N \in \mathbf{N}_e$ был причинным, необходимо и достаточно, чтобы $n(t,s) = 0$ при почти всех (t,s) из полуплоскости $s < t$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $l = 1$.

Возьмем произвольные $-\infty < a < b < c < +\infty$. По оператору N построим оператор $\hat{N} : L_2[b,c] \to L_2[a,b]$ по правилу

$$(\hat{N} x)(t) = \int_b^c n(t,s) x(s) ds, \; t \in [a,b].$$

Так как оператор N является причинным, оператор $\hat{N}$ является нулевым.

Для простоты обозначений будем (без ограничения общности) считать, что $b - a = c - b = 2\pi$. Поскольку оператор $\hat{N}$ является нулевым, для любых целых k и m имеем

$$\int_a^b e^{imt} \int_b^c n(t,s) e^{iks} ds dt = 0.$$

(Как следствие, аналогичное равенство справедливо с заменой экспоненты на косинусы и/или синусы.) Отсюда для любого тригонометрического многочлена p от двух переменных имеем

$$\int_a^b \int_b^c n(t,s) p(t,s) ds dt = 0. \tag{7}$$

Заметим, что в силу оценки (6) ограничение $\tilde{n}$ функции n на множество $[a,b] \times [c,d]$ принадлежит $L_1[a,b] \times [c,d]$. Очевидно, для любой непрерывной функции q двух переменных справедлива оценка

$$\left| \int_a^b \int_b^c \tilde{n}(t,s) q(t,s) ds dt \right| \leq \|\tilde{n}\|_{L_1} \|q\|_{L_\infty}.$$

Отсюда в силу теоремы Стоуна–Вейерштрасса [10] следует, что равенство (7) справедливо для всех непрерывных функций p.

Напомним (см., например, [6]), что пространство $C[a,b] \times [c,d]$ является $*$-слабо плотным в $L_\infty[a,b] \times [c,d]$. Поэтому из справедливости (7) для всех $p \in C[a,b] \times [c,d]$ вытекает, что (7) справедливо для всех $p \in L_\infty[a,b] \times [c,d]$. Но последнее можно интерпретировать как равенство нулю на функции $\tilde{n} \in L_1[a,b] \times [c,d]$ всех линейных ограниченных функционалов на пространстве $L_1[a,b]\times[c,d]$. Следовательно, ограничение $\tilde{n}$ функции n на множество $[a,b]\times[c,d]$ есть нулевой элемент L_1 и, следовательно, почти всюду совпадает с нулем.

Итак, n равно нулю почти всюду на множестве $[a,b]\times[c,d]$ при любых $-\infty<a<b<c<+\infty$. Отсюда следует, что $n(t,s)=0$ при почти всех (t,s) из полуплоскости $s<t$.

Переход к произвольному l не представляет труда. □

Множества причинных операторов соответствующих классов будем обозначать символами $\mathbf{S}_e^+$, $\mathbf{N}_e^+$, $\mathbf{S}^+$ и $\mathbf{N}^+$.

Нетрудно показать, что операторы $D\in\mathbf{S}_e^+$ и $N\in\mathbf{N}_e^+$ переводят расширенное пространство L_{2e} в себя. Очевидно также, что сумма и произведение операторов классов $\mathbf{S}_e^+$, $\mathbf{N}_e^+$, $\mathbf{S}^+$ и $\mathbf{N}^+$ принадлежат тому же классу. Тем самым последовательное и параллельное соединения звеньев, описываемых операторами рассматриваемых классов, также приводит к системе того же класса. Отметим также, что произведение оператора класса $\mathbf{S}_e^+$ (класса $\mathbf{S}^+$) на оператор класса $\mathbf{N}_e^+$ (класса $\mathbf{N}^+$) попадает в $\mathbf{N}_e^+$ (в $\mathbf{N}^+$).

Нас будут интересовать системы управления, описываемые входо-выходными соответствиями класса $\mathbf{S}_e^+ + \mathbf{N}_e^+$. Мы называем такие соответствия преобразованиями с *суммируемой памятью*.

2. ВХОДО-ВЫХОДНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Будем интерпретировать сигналы, принадлежащие L_2, как ограниченные. Поэтому систему с входом u и выходом y будем называть *устойчивой* (в смысле ограниченный вход – ограниченный выход), если каждому входу $u\in L_2$ соответствует однозначно определенный выход $y\in L_2$, причем зависимость выхода y от входа u является причинной. Например, устойчивой является система, осуществляющая преобразование $y=(D+N)u$, где $D\in\mathbf{S}^+$ и $N\in\mathbf{N}^+$.

Пример 1. *Пусть* $l=1$. *(a) Система, динамика которой подчиняется дифференциальному уравнению* $\dot{y}(t)-ay(t)=u(t)$, *описывается входо-выходным соответствием* $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{a(t-s)}u(s)ds$ *класса* $\mathbf{N}_e^+$. *Она устойчива, если* $a<0$; *в этом случае входно-выходное соответствие попадает в класс* $\mathbf{N}^+$. *(b) Система, динамика которой подчиняется разностному уравнению* $y(t)-ay(t-h)=u(t)$, $h>0$, *описывается входо-выходным соответствием* $y(t)=u(t)+\sum_{m=1}^{\infty}a^m u(t-mh)$ *класса* $\mathbf{D}_e^+$. *Она устойчива, если* $|a|<1$; *в этом случае входно-выходное соответствие попадает в класс* $\mathbf{D}^+$. *(c) Система, динамика которой подчиняется дифференциально-разностному уравнению* $\dot{y}(t)-ay(t-h)=u(t)$, $h>0$, *описывается входо-выходным соответствием* $y(t)=\int_{-\infty}^{t}n(t-s)u(s)ds$ *класса* $\mathbf{N}_e^+$, *где* $n(t)=$ $=\Theta(t)+\sum_{m=1}^{\infty}a^m\dfrac{(t-h)^m}{m!}\Theta(t-h)$, *а* Θ *– функция Хевисайда. Она устойчива, если* $-\pi/2<ah<0$; *в этом случае входно-выходное соответствие попадает в класс* $\mathbf{N}^+$.

Теорема 5. *Пусть система управления с входом* u *и выходом* y, *динамика которой описывается уравнением*

$$(D+N)y=u,$$

где $D\in\mathbf{S}^+$ и $N\in\mathbf{N}^+$, *устойчива. Тогда зависимость выхода* y *от входа* u *можно представить в виде*

$$y=(D_1+N_1)u,$$

где $D_1\in\mathbf{S}^+$ *и* $N_1\in\mathbf{N}^+$, *причем* $D_1=D^{-1}$.

Доказательство. Согласно определению устойчивость рассматриваемой системы означает причинную обратимость оператора $D+N: L_2\to L_2$. В силу следствия 2 это равносильно тому, что обратимы операторы $(D+N)_{\tilde{t}}$ при всех $t\in[-\infty,+\infty)$.

Заметим, что оператор $(D+N)_{\tilde{t}}$ можно представить в виде $D_{\tilde{t}}+N_{0\tilde{t}}$, где

$$N_{0\tilde{t}}=(\mathbf{1}-P_t)0+P_tN=P_tN.$$

Очевидно, $D_{\tilde{t}}\in S^+$, а $N_{0\tilde{t}}\in N^+$.

В силу [6] из обратимости оператора $D_{\tilde{t}}+N_{0\tilde{t}}$ в L_2 вытекает обратимость оператора $D_{\tilde{t}}$ в L_2. В силу следствия 2 отсюда следует, что D причинно обратим.

Представим оператор $D+N$ в виде $D(\mathbf{1}+D^{-1}N)$. Из представления $\mathbf{1}+D^{-1}N=D^{-1}(D+N)$ видно, что оператор $\mathbf{1}+D^{-1}N$ причинно обратим в L_2. Очевидно, $D^{-1}N\in\mathbf{N}^+$. В силу [6] (с учетом причинности оператора $(\mathbf{1}+D^{-1}N)^{-1}$) имеем, что обратный к оператору $\mathbf{1}+D^{-1}N$ имеет вид $\mathbf{1}+M$, где $M\in\mathbf{N}^+$.

Осталось использовать представление $(D+N)^{-1}=(\mathbf{1}+D^{-1}N)^{-1}D^{-1}=(\mathbf{1}+M)D^{-1}=$ $=D^{-1}+MD^{-1}$ и заметить, что $MD^{-1}\in\mathbf{N}^+$. □

Перейдем к рассмотрению систем с обратной связью.

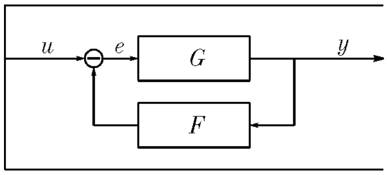

Рис. 1. Соединение (8)

Теорема 6. *Пусть система с входом u и выходом y, динамика которой описывается уравнениями (см. рис. 1)*

$$e = u - Fy, y = Ge, \tag{8}$$

где $F, G \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$, устойчива. Тогда зависимость выхода y от входа u можно представить в виде

$$y = Tu,$$

где $T \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$.

Доказательство. Возьмем произвольное $t \in [-\infty, +\infty)$. Рассмотрим вход $u \in (L_2)_t$. Поскольку по определению устойчивости зависимость выхода от входа является причинной, такому входу соответствует выход $y \in (L_2)_t$. Таким образом, уравнения (8) при любом $u \in (L_2)_t$ имеют единственное решение $y \in (L_2)_t$. Утверждается, что в этом случае оператор $\mathbf{1}_t + F_t G_t = (\mathbf{1} + FG)_t : (L_2)_t \to (L_2)_t$ обязательно обратим. Доказательство последнего факта дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения из [7] с заменой L_2 на $(L_2)_t$.

Из обратимости оператора $(\mathbf{1} + FG)_t$ при всех $t \in [-\infty, +\infty)$ в силу предложения 1 вытекает его причинная обратимость.

Остается заметить, что решение системы уравнений (8) имеет вид

$$y = G(\mathbf{1} + FG)^{-1} u$$

и сослаться на теорему 5. □

Перейдем к рассмотрению наиболее интересного случая, когда прямая ветвь системы неустойчива, а добавление обратной связи делает ее устойчивой.

Систему, описываемую входо-выходным соответствием $y = Gu$, где $G \in \mathbf{S}_e^+ + \mathbf{N}_e^+$, назовем *стабилизируемой* (в классе $\mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$), если существует такая обратная связь $F \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$, что система (8) описывается входо-выходным соотношением класса $\mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$ (и, в частности, устойчива).

Пример 2. *Покажем, что все системы из примера 1 стабилизируемы. Действительно, все они описываются уравнениями вида $Ly = u$. Поэтому для них уравнения (8) можно переписать в виде*

$$e = u - Fy, Ly = e.$$

После исключения e эти уравнения принимают вид

$$(L + F)y = u.$$

Для систем из примера 1 ограничимся обратными связями вида, соответственно: (a) $(Fy)(t) = by(t)$, (b) $(Fy)(t) = by(t - h)$, (c) $(Fy)(t) = by(t - h)$. Применение таких обратных связей, очевидно, позволяет произвольным образом изменить параметр a в описании оператора L. Поскольку при некоторых a рассматриваемые системы устойчивы, причем входо-выходное соответствие попадает в соответствующий класс, при произвольном a они стабилизируемы.

Теорема 7. *Пусть система с входом u и выходом y, динамика которой описывается уравнениями (8), где $G \in \mathbf{S}_e^+ + \mathbf{N}_e^+$, $F \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$, устойчива, причем прямая ветвь системы (описываемая входо-выходным соответствием $y = Gu$) стабилизируема. Тогда зависимость выхода y от входа u можно представить в виде*

$$y = Tu,$$

где $T \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$.

Доказательство. Предположим, что прямая ветвь G системы может быть стабилизирована с помощью обратной связи $H \in S^+ + N^+$, т. е. система с обратной связью

$$e = u - Hy, y = Ge$$

устойчива и описывается входо-выходным соответствием $y = G_1 u$, где $G_1 \in \mathbf{S}^+ + \mathbf{N}^+$.

Перепишем уравнения (8) в виде (что соответствует соединению, показанному на рис. 2)

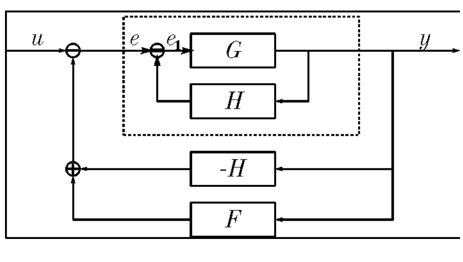

Рис. 2. Соединение из доказательства теоремы 7

$$e_1 = e - Hy,\ y = Ge_1,$$
$$e = u - (F - H)y.$$

По предположению первые два уравнения эквивалентны соотношению $y = G_1 e$. Тем самым мы оказываемся в условиях теоремы 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дезоер Ч., Видьясагар М.* Системы с обратной связью: входо-выходные соотношения. М.: Наука, 1983. – 280 с.

2. *Wiener N., Pitt H. R.* On absolutely convergent Fourier–Stieltjes transforms. Duke Math. J. 1938. Vol. 4, 2. P. 420–436.

3. *Williamson J. H.* A theorem on algebras of measures on topological groups. Proc. Edinburg Math. Soc. 1959. Vol. 11, part 4. P. 195–206.

4. *Williamson J. H.* The Wiener-Pitt phenomenon on the half-line. Proc. Edinburg Math. Soc. 1962. Vol. 13 (Ser. II), part 1. P. 37–38.

5. *Курбатов В. Г.* Один пример в теории устойчивости уравнений с запаздыванием. Математические заметки. 1986. Т. 39, 2. С. 253–258.

6. *Kurbatov V. G.* Functional differential operators and equations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers. 1999. – 454 p.

7. *Курбатов В. Г.* Об одном классе входо-выходных соответствий для линейных систем с бесконечной памятью. Автоматика и телемеханика. 1991. 4. С. 183–185.

8. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69, 3. С. 3–54.

9. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М.: Мир, 1977. – 600 с.

10. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. – 320 с.

Курбатов Виталий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Тел.: (4742) 27-09-62, e-mail: kv51@inbox.ru

Маршаков Владимир Кириллович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. Тел.: (473) 2208-916, e-mail: mvk@phys.vsu.ru

Kurbatov Vitalii Gennad'evich – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Department of higher mathematics, Finance University the Goverment of the Russian Federation. Phone: (4742) 27-09-62, e-mail: kv51@inbox.ru

Marshakov Vladimir Kirillovich – Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, associate professor of the Department of radio physics, Voronezh State University. Tel.: (473) 2208-916. e-mail: mvk@phys.vsu.ru