УДК 517.9

АНАЛИЗ КОРРЕКТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

А. Д. Баев*, С. С. Бунеев, О. А. Савина**, Е. И. Трофимова**, В. Е. Щербатых****

* *Воронежский государственный университет*
** *Елецкий государственный университет*

Поступила в редакцию 30.10.2012 г.

Аннотация. В работе устанавливается корректность одного класса математических моделей вырождающихся процессов, определяемых краевой задачей в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения.
Ключевые слова. Математическая модель, процесс в вырождением, краевая задача, вырождающееся эллиптическое уравнение.
Annotation. We establish the correctness of a class of mathematical models of degenerating processes defined by the boundary value problem in the band for a degenerate elliptic equations..
Keywords: a mathematical model of the process of degeneration, the boundary value problem, which is degenerate elliptic equation.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы с вырождением – это модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. При этом на границе области уравнение вырождается либо в эллиптическое уравнение, либо в параболическое уравнение. Такие уравнения возникают при математическом моделировании различных физических процессов. Например, подобные уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления. Такие задачи являются актуальными задачами в системном анализе.

Вырождающиеся уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Потребность в изучении таких задач возникла в механике. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [3]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен С. З. Левендорским [4]. Отметим, что существенным условием работ [3, 4] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^{\infty}(R^1)$. В [5] были изучены общие краевые задачи в полупространстве R_+^n. При этом удалось отказаться от условия бесконечной дифференцируемости функции $\alpha(t)$.

В данной работе устанавливается корректность математической модели, описываемой общей краевой задачи в полосе

$$R_d^n = \{x \in R^{n-1}, o \le t \le d\},$$

где $d > 0$ – некоторое число, для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося в уравнение второго порядка по переменной t на границе $t = 0$. При этом весовая функция $\alpha(t)$ может не являться монотонной и бесконечно дифференцируемой. Аналогичные краевые задачи в случае постоянных по t коэффициентов уравнений были исследованы в [6].

Основная часть.

В полосе R_d^n рассматривается уравнение

$$A(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \qquad (1)$$

где $Av = L_{2m}(t, D_x, D_{\alpha,t})v - \partial_t^2 v$, $L_{2m}(D_x, D_{x,t}) =$

$$= \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau,j}(t) D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{\tau}, \quad D_x^{\tau} = i^{|\tau|}\frac{\partial^{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1}\partial x_2^{\tau_2}\ldots\partial x_n^{\tau_{n-1}}},$$

$D_{x,t}^{\tau} = i\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $a_{\tau,j}(t)$ – комплекснозначные функции. Без ограничения общности будем считать, что $a_{0,2m}(t) = 1$ при всех $t \in [0;d]$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задается граничное условие

$$\sum_{|\tau|+mj\le m_1} b_{\tau,j}(t) D_x^{\tau}\partial_t^j v(x,t)\Big|_{t=0} = G(x) \qquad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau,j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n заданы условия вида

$$v\big|_{t=d} = \partial_t v\big|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} v\big|_{t=d} = 0. \qquad (3)$$

Предположим выполнение следующих условий .

Условие 1. При всех $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1$, $t \in [0;d]$ справедлива оценка $\operatorname{Re} L_{2m}(t,\xi,\eta) \ge c(1+|\xi|^2+\eta^2)^m$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от t и (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \ge 2m + m_1$ функция $\alpha(t) \in C^{s-1}[0,d]$, причем

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \alpha(t) > 0 \text{ при } t > 0.$$

Функции $a_{\tau,j}(t)$ $(|\tau| + j \le 2m)$, $b_{\tau,j}(t)$ $(|\tau| + j \le m_1)$ не обращаются в 0 при всех $t \in [0;d]$ и принадлежат пространству $\alpha(t) \in C^{s-1}[0,d]$.

Краевая задача (1)–(3) описывает, например, процессы, происходящие между двумя параллельными пластинами $t = 0$ и $t = d$. На пластине $t = d$ задаются однородные граничные условия типа условий Дирихле, а на пластине $t = 0$ задается граничное условие общего вида. При этом на границе $t = 0$ меняется порядок уравнения по переменной t. (При $t = 0$ порядок уравнения по переменной $t = 0$ равен двум, а при $t > 0$ порядок уравнения равен $2m$). Такая модель учитывает влияние пластины $t = 0$ на процесс, происходящий между пластинами.

Применим к обеим частям уравнения (1) и условий (2),(3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$.

$$L_{2m}(t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) - \partial_t^2 u(\xi,t) = f(\xi,t), \qquad (4)$$

$$\sum_{|\tau|+mj\le m_1} b_{\tau j}(t)\xi^{\tau}\partial_t^j u(\xi,t)\Big|_{t=0} = g(\xi), \qquad (5)$$

$$u(\xi,t)\big|_{t=d} = = \partial_t u(\xi,t)\big|_{t=d} = \ldots = \partial^{m-1} u(\xi,t)\big|_{t=d} = 0. \qquad (6)$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Лемма 1. Пусть выполнено условие 1 и $f(\xi,t) \in C^s[0,d]$. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ уравнения (4) принадлежащего по переменной t пространству $C^{s+2}[0,d]$ справедлива формула

$$\partial_t^{j+2}u(\xi,0) = \mathrm{Z}_{0,j}u(\xi,0) + +\mathrm{Z}_{1,j}(\xi)\partial_t u(\xi,0) + \mathrm{Z}_{2,j}u(\xi,\lambda),$$

где функции $\mathrm{Z}_{k,j}$, $k = 0,1,2$ определяются по рекуррентным соотношениям

$$\mathrm{Z}_{i,j} = F_{i,j} + \sum_{k=0}^{j-2}\frac{j!}{(j-k)!}\times$$
$$\times(\sigma_{2m,k}\mathrm{Z}_{i,j-k-2} + \sigma_{2m-1,k}\mathrm{Z}_{i,j-k-1}) -$$
$$-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=1}^{j-k}\frac{(j-l)!}{k!(j-k-l)!}\times$$
$$\times\left[\sum_{\nu=0}^{j-k-2m+2}(l-2m+2)T_{j-k-2,\nu}^{1,2m-2}\mathrm{Z}_{i,\nu+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{p=1}^{2m-2}\sigma_{p,k}(\xi)\sum_{\nu=0}^{j-k-2m+p+1}T_{j-k-2,\nu}^{p,2m-2}\mathrm{Z}_{i,\nu+1}\right];$$
$$\mathrm{Z}_{0,0}(\xi) = L_{2m}(\xi,0),\ \mathrm{Z}_{1,0}(\xi) \equiv 0,\ \mathrm{Z}_{2,0}(\xi) = -f(\xi,0).$$

Числа $T_{s,v}^{k,2m-2}$ находятся по формулам

$$T_{s,j}^{k,e+1} = \sum_{p=j+1}^{s+k-e} T_{s,p}^{k,e} \cdot T_{p,j}^{e,e+1};$$

$$T_{s,j}^{k,k+1} = \sum_{p=1}^{j+1} \frac{(s-p)!(p+2-2m+k)}{(s-j-1)!(j+1-p)!} \partial_t^{s-j+1} \gamma(t)\Big|_{t=0},$$

$$\gamma(t) = \alpha^{\frac{m}{m-1}}(t).$$

Функции $F_{i,j}$ $i = 0,1,2$ определяются по рекуррентным соотношениям

$$F_{0,j} = j!\sigma_{2m,j}(\xi) - j!\sigma_{2m-1,j-1}(\xi)\sigma_{2m,0}(\xi);$$

$$F_{1,j} = j!\sigma_{2m-1,j}(\xi) -$$

$$-j!(\sigma_{2m-1,j-1}(\xi)\sigma_{2m-1,0}(\xi) - \sigma_{2m,j-1}(\xi));$$

$$F_{2,j} = j!\tilde{\lambda}_j + j!\tilde{\lambda}_0\sigma_{2m-1,j-1}(\xi),$$

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{f^{(j)}(\xi,0)}{j!},$$

где

$$\sigma_{0,j} = -\frac{1}{j!}\partial_t^{j+2} \gamma(t)\Big|_{t=0};$$

$$\sigma_{\mu,j} = -\frac{1}{j!}\partial_t^{j+1} b_\mu(\xi,t)\Big|_{t=0}, \ \mu = 1,2,...2m-2;$$

$$b_{2m-k}(\xi,t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau|\le 2m-j} (i)^{2m-j} a_{\tau j}(t)\xi^\tau \times$$

$$\times\psi_{j,k}(t)\gamma^{\frac{2m-k}{m}}(t),\ k = 1;\ k = 3,4,...2m-1;$$

$$b_{2m-2}(\xi,t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau|\le 2m-j} (i)^{2m-j} a_{\tau j}(t)\xi^\tau \times$$

$$\times\psi_{j,2}(t)\gamma^{\frac{2(m-1)}{m}}(t) - 1,$$

$$b_{2m}(\xi,t) = \sum_{j=0}^{2m} \sum_{|\tau|\le 2m-j} (i)^{2m-j} a_{\tau j}(t)\xi^\tau\psi_{j,0}(t);$$

а функции $\psi_{j,k}$ $(j \ge k)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений, содержащих функцию $\alpha(t)$ и ее производные.

Это позволяет записать граничное условие (5) в виде

$$\theta_0(\xi)u(\xi,0) + \theta_1(\xi)\partial_t(\xi,0) + \theta_2(\xi,\tilde{\lambda}) = g(\xi),$$

где

$$\theta_k(\xi) = \sum_{j=0}^{r-2} \Lambda_{j+2}(\xi)Z_{k,j}(\xi) + \Lambda_k(\xi),\ k = 0,1,$$

$$\theta_2(\xi,\tilde{\lambda}) = \sum_{j=0}^{r-2} \Lambda_{j+2}(\xi)Z_{2,j}(\xi,\tilde{\lambda}),$$

$$\Lambda_j(\xi) = \sum_{|\tau|\le m_1-mj} b_{\tau j}(0)\xi^\tau.$$

Условие 3. При всех $\xi \in R^{n-1}$ выполняется одно из следующих двух условий:

$$\left|\theta_1(\xi) - \theta_1(\xi)\right|^2 > \left|\theta_1(\xi)\right|^2 + \left|\theta_0(\xi)\right|^2$$

или

$$\theta_1(\xi)\overline{\theta_0(\xi)} \equiv 0,\ \left|\theta_1(\xi)\right|^2 + \left|\theta_0(\xi)\right|^2 > 0.$$

Заметим, что степень многочлена $\theta_0(\xi)$ не превосходит m_1, а степень $\theta_1(\xi)$ не превосходит $m_1 - m$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u](\eta) = \int_o^d u(t)\exp(i\eta\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(0,d)$. В [5] показано, что это преобразование может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функциях и, кроме того, было построено обратное преобразование F_α^{-1}.

Задача (1)–(3) изучается в весовых пространствах типа С. Л. Соболева.

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x,t)$ принадлежит пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s \ge 0$ – действительное число), если для неё конечно норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \left\{ \sum_{j=0}^{[\frac{s}{m}]} \left\| F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(s-mj)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^j v]] \right\|_{L_2(R_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\left[\frac{s}{m}\right]$ – целая часть числа $\frac{s}{m}$, $F_{x\to\xi}(F_{x\to\xi}^1)$ – прямое (обратное) преобразование Фурье.

Определение 2. Будем говорить, что функция $g(x)$ принадлежит пространству $H_s(R^{n-1})$ (s – действительное число), если для неё конечна норма $\|g\|_s = \left\| F_{\xi\to x}^{-1}[(1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}} F_{x\to\xi}[g]] \right\|_{L_2(R_d^{n-1})}$.

Основными результатами этой работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \ge 2m + m_1$ – действительное число, $m \ge 2$, $m_1 > 0$ – целые числа. Пусть выполнены условия 1–3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m_1-\frac{m}{2}}(R^{n-1})$. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m} \le c(\|F\|_{s-2m,\alpha,m} + \|G\|_{s-m_1-\frac{m}{2}}).$$

Теорема 2. Пусть $s \geq 2m + m_1$ – действительное число, $m \geq 2$, $m_1 > 0$ – целые числа. Пусть выполнены условия 1–3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m_1-\frac{m}{2}}(R^{n-1})$. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$

Изложим схему доказательства теоремы 1.

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,m}(0;d)$ ($s \geq 0$ – действительное число), если для неё конечна норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$

$$\|u\|_{s,\alpha,m,|\xi|} = \left\{ \sum_{j=0}^{[\frac{s}{m}]} \left\| {}_{\alpha}^{-1} F_{\xi \to x}^{-1} [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}(s-mj)} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times F F_{\alpha} [\partial_t^j u(\xi,t)]] \right\|_{L_2(0,d)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть $s \geq 2m + m_1$ – действительное число, $m \geq 2$, $m_1 > 0$ – целые числа. Пусть выполнены условия 1–3. Пусть $f(\xi,t) \in H_{s-2m,\alpha,m}(0,d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ задачи (4)–(6), принадлежащего пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,m}(0,d)$ справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s,\alpha,m,|\xi|}^2 \leq c(\|f\|_{s-2m,\alpha,m,|\xi|}^2 +$$
$$+ (1 + |\xi|^2)^{(s-m_1-\frac{m}{2})} |g(\xi)|^2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u, f, ξ.

Изложим схему доказательства теоремы 3. Утверждение теоремы 3 следует из совокупности следующих утверждений.

Обозначим $\|u\| = \|u\|_{L_2(0,d)}$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,m}(0,d)$ задачи (4)–(6) справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m} (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq$$
$$\leq c(\|f\|^2 - (1 + |\xi|^2)^m \operatorname{Re} \partial_t u(0)\overline{u(0)}) \qquad (7)$$

с константой $c > 0$, не зависящей u, f, ξ.

Лемма 4. Пусть выполнены условия 1, 2; $m \geq 2$. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,m}(0,d)$ задачи (4)–(6) справедлива оценка

$$\|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\|^2 + \|\partial_t^2 u\|^2 \leq \varepsilon(\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 +$$
$$+ (1 + |\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2) + c(\varepsilon)(\|f\|^2 + \qquad (8)$$
$$+ (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2),$$

где константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от u, f, g, ξ.

Лемма 5. При выполнении условий леммы 4 справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m} (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 +$$
$$+ (1 + |\xi|^2)^m \|\partial_t u\|^2 + \|D_{\alpha,t}^m \partial_t u\|^2 + \qquad (9)$$
$$+ \|\partial_t^2 u\|^2 \leq c(\|f\|^2 - (1 + |\xi|^2)^m \operatorname{Re} \partial_t u(0)\overline{u(0)}).$$

Из (7)–(9) и леммы 1 с использованием условия 3 получаем справедливость априорной оценки при $s = 2m$.

Доказательство априорной оценки при $s > 2m$ проводится методом, аналогичным методу работы [6].

Изложим схему доказательства теоремы 2. Существование решения задачи (1)–(3) следует из существования решения задачи (4)–(6). Запишем уравнение (4) в виде

$$\sum_{l=2}^{2m} b_{2m-l}(\xi,t)\gamma^{l-2}(t)\partial_t^l u + b_{2m-2}(\xi,t)\partial_t^2 u +$$
$$+ b_{2m-1}(\xi,t)\partial_t u + b_{2m}(\xi,t)u = f(\xi,t), \qquad (10)$$

где $b_0(\xi,t) \equiv 1$, а функции $b_{2m-l}(\xi,t)$ определены выше.

Обозначим

$$w_{2m-j}(\xi,t) = \partial_t^j u(\xi,t),\ j = 0,1,2;$$
$$w_{2m-j}(\xi,t) = \gamma^{j-2}\partial_t^j u(t),\ 3 \leq j \leq 2m-1.$$

Используя эти обозначения, получим, что уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt} + B_{11}(\xi,t)\overline{u}_1 + B_{12}(\xi,t)\overline{u}_2 = \overline{f}(\xi,t) \\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt} + B_{22}\overline{u}_2 + B_{21}\overline{u}_1 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь $\overline{u}_1$ – вектор-функция размерности $(2m-2)$, компонентами которой служат функции $w_j(\xi,t)$, $j = 1,2,\ldots 2m-2$, а $\overline{u}_2$ – вектор функция размерности 2, компонентами которой служат функции $w_j(\xi,t)$, $j = 2m-1,\ 2m$. $B_{11}(\xi,t)$ – матрица размером $(2m-2) \times (2m-2)$, все элементы которой равны нулю, кроме $b_{11} = b_1 - (2m-3)\gamma'(t)$, $b_{1,j} = b_j$, $j = 2,3,\ldots 2m-2$; $b_{j,j-1} = -1$, $j = 2,3,\ldots 2m-2$.

$B_{12}(\xi,t)$ – матрица размером $(2m-2)\times 2$, элементы которой равны нулю, кроме элементов первой строки, которые имеют вид $b_{1,j}=b_{2m-2+j}(\xi,t)$, $j=1,2$. B_{22} – матрица размера 2×2, все элементы которой равны нулю, кроме $b_{21}=-1$. B_{21} – матрица размера $2\times(2m-2)$, все элементы которой равны нулю, кроме $b_{1,2m-2}=-1$.

С помощью метода продолжения по параметру (см. [6]) и априорной оценки получим, что для доказательства существования решения системы (11), достаточно доказать существование решения следующей системы

$$\begin{cases}\gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt}+(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I)\overline{u}_1+\\+B_{12}(\xi,0)\overline{u}_2=f(\xi,t),\\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{21}\overline{u}_1=0.\end{cases}\tag{12}$$

Из вида матрицы $B_{11}(\xi,0)$ следует, что все собственные числа этой матрицы различны, причём нет собственных чисел, лежащих на мнимой оси. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m-1}$ – собственные числа, лежащие в левой полуплоскости. Пусть $E_-(E_+)$ инвариантные пространства оператора $B_{11}(\xi,0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой (правой) полуплоскости. Обозначим через $P_-(P_+)$ проекторы на $E_-(E_+)$. Обозначим через P_k $k=1,2,\dots 2m-2$ операторы, действующие по формулам $P_k\ \overline{u}_1=w_k$, $k=1,2,\dots 2m-2$, $P_k\ \overline{u}_2=w_k$, $k=2m-1,2m$.

Используя методы работы [6] получим равенство

$$\begin{gathered}P_\nu\overline{u}_1(\xi,t)=P_\nu U_1^-(t,d)q^- -\\ -\int_0^d P_\nu R(t,\tau)f(\tau)d\tau+b_{2m}(\xi,0)\times\\ \times\int_0^d P_\nu R(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-2}(s)dsd\tau d\tau_1,\\ \nu=1,2,\dots 2m-2,\end{gathered}\tag{13}$$

где $U_1^{\pm}(t,s)=\dfrac{\gamma(s)}{\gamma(t)}\exp\left(P_{\pm}B_{11}(\xi,0)\displaystyle\int_t^s\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- – произвольный вектор размерности $(m-1)$,

$$R(t,\tau)=\begin{cases}-U_1^+(t,\tau)P_+\overline{e}_1\cdot\dfrac{1}{\gamma(\tau)}\text{ при } 0<\tau<t\\ U_1^-(t,\tau)P_-\overline{e}_1\cdot\dfrac{1}{\gamma(\tau)}\text{ при } t<\tau<d.\end{cases}$$

$\overline{e}_1$ – вектор размерности $(m-1)$, первая координата которого равна 1, а остальные равны 0.

Пусть ω_j, $j=1,\dots,m-1$ – собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi,0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости.

Тогда $q^-=\sum\limits_{\sigma=1}^{m-1}\mu_\sigma\overline{\omega}_\sigma$, где μ_σ – некоторые комплексные числа. Пусть $\omega_{\sigma,\nu}-\nu$ – координата вектора $\overline{\omega}_\sigma$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered}\sum_{\sigma=1}^{m-1}(\lambda_{\sigma-1})^{2m-2-\nu}(\mu_\sigma\omega_{\sigma,2m-2})=\\ =(-1)^{2m-2-\nu}(d_\nu+b_{2m}(\xi,0)M_\nu w_{2m-2}),\\ \nu=m+1,\dots 2m-2;\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}\theta_1(\xi)\sum_{\sigma=1}^{m-1}(\mu_\sigma\omega_{\sigma,2m-2})\cdot\frac{1}{\gamma_{\sigma-1}}+\\ +\theta_0(\xi)\sum_{\sigma=1}^{m-1}\frac{1}{\gamma_{\sigma-1}}(1-J_{\sigma-1})\cdot(\mu_\sigma\omega_{\sigma,2m-2})=\\ =d_m+b_{2m}(\xi,0)M_m w_{2m-2},\end{gathered}\tag{15}$$

где

$$d_\nu=\int_0^d P_\nu R(d,\tau)f\tau d\tau;$$

$$M_\nu w_{2m-2}=\int_0^d\left[\int_\tau^d\int_{\tau_1}^d P_\nu R(d,\tau)w(s)dsd\tau_1\right]d\tau,$$
$$m+1\le\nu\le 2m-2;$$

$$\begin{gathered}d_m=q(\xi)-\theta_1(\xi)\int_0^d\int_0^d P_{2m-2}R(t,\tau)f(\tau)d\tau dt+\\ +\theta_0(\xi)\int_0^d\int_{t_1}^d\int_0^d P_{2m-2}R(t,\tau)f(\tau)dtdt_1;\\ M_m w=\theta_1(\xi)\times\\ \times\int_0^d\int_0^d\left[\int_\tau^d\int_{t_1}^d P_{2m-2}R(t,\tau)w_{2m-2}(s)dsdt_1\right]d\tau dt-\\ -\theta_0(\xi)\int_0^d\int_{t_2}^d\int_0^d\int_\tau^d\int_{t_1}^d P_{2m-2}R(t,\tau)w_{2m-2}(s)dsdt_1d\tau dtdt_2.\end{gathered}$$

Таким образом, для нахождения чисел μ_σ, $\sigma=1,\dots m-1$ получаем систему уравнений (14)–(15). Из условия 3 выводим, что определитель этой системы отличен от нуля при достаточно малых $d>0$. То есть система (14)–(15) имеет единственное решение

$$\mu_\sigma=\sum_{\nu=m}^{2m-2}\beta_{\sigma,\nu}(d_\nu+b_{2m}(\xi,0)M_\nu w_{2m-2})\frac{1}{\omega_{\sigma,2m-2}}.$$

Отсюда получаем, что функция w_{2m-2} удовлетворяет уравнению

$$w_{2m-2}(\xi,t) = \tilde{F}(\xi,t) + b_{2m}(\xi,0)\tilde{M}w_{2m-2}(\xi,t), \quad (16)$$

где

$$\tilde{F}(\xi,t) = -\int_0^d P_{2m-2}R(t,\tau)f(\tau)d\tau +$$
$$+\sum_{\gamma=m}^{2m-2}\sum_{\sigma=1}^{m-1}\beta_{\sigma,\nu}\frac{\gamma(d)}{\lambda(t)}\exp(\lambda_{\sigma-1}\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)})\cdot d_\nu;$$
$$\tilde{M}w_{2m-2} = -\int_0^d\int_\tau^d\int_{t_1}^d P_{2m-2}R(t,\tau)w_{2m-2}(s)dsdt_1d\tau +$$
$$+\sum_{\nu=m}^{2m-2}\sum_{\sigma=1}^{m-1}\beta_{\sigma,\nu}M_\nu w_{2m-2}\frac{\gamma(d)}{\lambda(t)}\exp(\lambda_{\sigma-1}\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}).$$

Далее доказывается, что при $|\xi| \le \delta$ где $\delta > 0$ – достаточно малое число, существует единственное решение уравнения (16). Затем, используя априорные оценки и метод продолжения по параметру, доказывается существование и единственность решения задачи (4)–(6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, №2, С. 181–183.

2. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, №6, С. 885–887.

3. *Вишик М. И. , Грушин В. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Матем. сб., 1969, т. 80 (112), вып. 4, С. 455–491.

4. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе. Матем. сб., 1980, т. 111 (153), вып. 4, С. 483–501.

5. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, С. 727–728.

6. *Баев А. Д.* Корректность некоторых краевых задач, моделирующих процессы с вырождением. Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политехнического университета. Физико-математические науки, №4 (88), 2009, С. 50–56.

Баев А. Д. – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, декан математического факультета Воронежского госуниверситета. Тел. (473) 2208-533.

Бунеев С. С. – аспирант Елецкого госуниверситета им. И.А. Бунина

Савина О. А. – д.п.н., профессор кафедры математического анализа Елецкого госуниверситета им. И.А. Бунина

Трофимова Е. И. – д.п.н, профессор кафедры физики Елецкого госуниверситета им. И. А. Бунина

Щербатых В. Е. – доцент кафедры математического анализа Елецкого госуниверситета им. И.А. Бунина.

Baev A. D. – Doctor of phys.-math. sciences, head of the chair of mathematical analysis, the dean of mathematical faculty of the Voronezh state university. Tel. (473) 2208-533

Buneev S. S. – Elez state university

Savina O. A. –Doctor of Education, Prof. of Department of mathematical analysis Elez state university

Trofimova E. I. – Doktor of Education, Prof. of Department of Physics of Elez state university

Scherbatih V. E. – Associate Professor, Department of Mathematical Analysis of Elez state university