УДК 519.81

УПРОЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АГРЕГИРОВАНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Аристова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.09.2012 г.

Аннотация. В статье рассматривается задача линейной многокритериальной оптимизации. Строятся функции агрегирования для уменьшения количества критериев в задаче оптимизации. Для этого используются линейная функция агрегирования на основе взаимозамещения переменных и функция осреднения.
Ключевые слова: задача линейной многокритериальной оптимизации, агрегирование, функция агрегирования, граф, клика, сильная кооперация, слабая кооперация, матрица кооперации.
Annotation. This article considers linear multicriteria optimization problem. Functions of aggregation for reduction of quantity of criteria in an optimization problem are constructed. For this purpose are used linear function of aggregation on a basis mutual replacement variables and averaging function.
Key words: linear multicriteria optimization problem, aggregation, aggregation function, count, clique, strong cooperation, weak cooperation, cooperation matrix.

Проблема агрегирования достаточно активно обсуждается в отечественной и зарубежной литературе, поскольку лежит в основе многих процедур принятий решений (групповой выбор, многокритериальные модели), используется в межотраслевом балансе, нейросетевых технологиях, при исследовании многоцелевых систем. В самом общем смысле под *агрерированием* будем понимать переход от векторной оценки размерности n к векторной оценке размерности m при $m < n$. Зачастую агрегирование предполагает переход от векторной оценки к скалярной, которая называется *обобщенной* (групповой, комплексной, интегральной). В основе аналитических приемов такого типа агрегирования лежит понятие оператора агрегирования [1].

Объектом исследования является многоцелевая (многокритериальная) модель математического программирования следующего вида

$$\begin{cases} f(x) \to extr \\ x \in X = \{x : g_i(x)[\leq,=,\geq]b_i(i=\overline{1,m})\} \subseteq R^n, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x) = (f_1(x),..,f_p(x))^T$ – векторный критерий, компонентами которого являются целевые функции (критерии) (без ограничения общности для всех целевых функций положим, что $extr = \max$;) $g_i(x)$ – функции, задающие левую часть ограничений; b_i – константы; X – множество допустимых решений.

К основным типам взаимодействия относятся: кооперация, конфликт и независимость. Для определения типа взаимодействия используется подход, основанный на понятии градиента целевой функции [4].

Будем считать, что все целевые функции в модели (1) удовлетворяют следующим условиям: являются непрерывно дифференцируемыми в X, и тогда в любой точке x для каждой из них определен градиент $\nabla f_i(x)$, а также для любой точки x^0 из X и произвольного ненулевого приращения $p \in R^n$ можно определить производную $\dfrac{\partial f_i(x^0)}{\partial p}$ по направлению p.

Идея подхода заключается в следующем. Пусть $f_i(x)$ и $f_j(x)$ целевые функции, e_j – направление, задаваемое вектором $\nabla f_i(x^0)$ в некоторой точке x^0, тогда $\dfrac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j}$ – производная по этому направлению функции $f_i(x)$ в точке x^0. Заметим, что направление градиента функции

© Аристова Е. М., 2012

$f_i(x)$ есть направление наиболее быстрого ее роста, следовательно, для оценки отклонения направления e_j от направления, соответствующего $\nabla f_i(x)$, можно использовать величину

$$k_j(f_i)\Big|_{x^0} = \frac{\dfrac{\partial f_i(x^0)}{\partial e_j}}{\left|\nabla f_i(x^0)\right|} = \cos\phi, \qquad (2)$$

где $\phi \in [0,\pi]$ – угол, образованный градиентами $\nabla f_i(x^0)$ и $\nabla f_j(x^0)$ в точке x^0.

В линейном случае $\forall i = \overline{1,n}$ $\left(f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_k\right)$, тогда $\nabla f_i(x) = (c_{i1},..,c_{in})^T$, и, следовательно,

$$k_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n} c_{il}^2}\sqrt{\sum_{l=1}^{n} c_{jl}^2}} \in [-1,1]. \qquad (3)$$

Для определения взаимодействия целевых функций разобьем $[0,\pi]$ на три промежутка:

$$[0,\pi] = \underbrace{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}_{k_{ij}\in\left[\frac{1}{2},1\right]} \cup \underbrace{\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}_{k_{ij}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \cup \underbrace{\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]}_{k_{ij}\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]}.$$

С учетом этого разбиения можно сформулировать следующие *правила принятия решений*:

1) если $k_{ij} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, то цели кооперируют;

2) если $k_{ij} \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то цели независимы;

3) при $k_{ij} \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ цели конкурируют.

Анализируя примеры, можно сделать вывод, что если i-я целевая функция кооперирует с j-й, а j-я с k-й, то необязательно i-я и k-я цели являются кооперирующими. Поэтому введем следующие определения.

Определение 1. Целевые функции $f_{i_1}(x), f_{i_2}(x),..,f_{i_r}(x)$ *сильно кооперируют в совокупности,* если $\min\limits_{\forall t,s\in\{1,..,r\},t\neq s}\left\{k_{i_t i_s}\right\} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Подмножество $\{f_i(x)\}$ целевых функций образует класс кооперации, если они кооперируют в совокупности и подмножество является максимальным по включению, т.е. добавление любой другой целевой функции, не входящей в это подмножество, нарушает отношение кооперации.

Рассмотрим способы агрегирования кооперирующих целей. Пусть $Agg(f_{i_1},..,f_{i_n})$ – операция агрегирования. Тогда определим условия, которым должна удовлетворять эта операция в зависимости от типа кооперации:

а) если функции $f_{i_1},..,f_{i_n}$ *сильно кооперируют,* то эффект от их совместного действия превышает эффект каждой из целевых функций, т.е.

$$Agg(f_{i_1}(x),..,f_{i_n}(x)) \geq \min_{l=\overline{1,n}} f_{i_l}(x);$$

б) если функции $f_{i_1},..,f_{i_n}$ *слабо кооперируют,* то эффект от их совместного действия превышает эффект нечеткого большинства целевых функций, т.е.

$$Agg(f_{i_1}(x),..,f_{i_n}(x)) \geq \Phi_{W_Q}(f_{i_1}(x),..,f_{i_n}(x)).$$

Здесь W_Q – вектор весовых коэффициентов, построенный с использованием функции квантификации $Q(x)$, формализующий принцип нечеткого большинства, Φ_{W_Q} – порядковый оператор взвешенного агрегирования.

Определение 2. Цели $f_{i_1}(x),..,f_{i_n}(x)$ *конкурируют в совокупности,* если

$$\min_{\forall t,s\in\{1,..,r\},t\neq s}\left\{k_{i_t i_s}\right\} \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right].$$

Определение 3. Цели $f_{i_1}(x),..,f_{i_n}(x)$ *независимы в совокупности,* если

$$\min_{\forall t,s\in\{1,..,r\},t\neq s}\left\{k_{i_t i_s}\right\} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

В отличие от сильно кооперирующих в совокупности целей *слабо кооперирующие цели* во множестве либо кооперируют, либо независимы.

В результате этого получим граф, в котором вершинам соответствуют обобщенные целевые функции, а оставшиеся связи отрицательны. В таком графе на множестве его вершин целесообразно установить приоритеты и применить метод последовательных уступок.

Определение 4. *Графом* общего вида называется упорядоченная тройка $G = (X,U,\Gamma)$, где X – конечное множество вершин, U – конечное множество ребер, а Γ – отображение множества U в совокупность упорядоченных и неупорядоченных пар элементов из X, т.е. $\Gamma: \mathrm{U} \to \mathrm{X}^2 \times \mathrm{X}^2, X^2 = \{(x,y) : x,y \in X\}$.

Если $u \in U$ и $\Gamma(u) = (x, y)$ – упорядоченная пара, то говорят, что u – дуга с началом в вершине x и концом в вершине y.

Если $\Gamma(u) = (x, y)$ – неупорядоченная пара, то ребро u называется *звеном*, соединяющим вершины x и y. Если же $\Gamma(u) = (x, x)$, то ребро u называется *петлей* при вершине x. Вершины x и y называются *смежными*, если существует соединяющее их ребро.

Определение 5. *Полный граф* – граф $G(V, E)$, в котором для всех $u \neq v \in V$, выполняется $\{u, v\} \in E$, т.е. любые две его вершины смежны. Полный подграф произвольного графа G называется *кликой*. Клика максимальна, если она не содержится в большей клике [2].

Будем говорить, что подмножество $\{f_i(x)\}$ целевых функций образует *класс кооперации*, если они кооперируют в совокупности и подмножество является максимальным по включению, т.е. добавление любой другой целевой функции, не входящей в это подмножество, нарушает отношение кооперации. Очевидно, что для целевых функций, принадлежащих одному и тому же классу кооперации, целесообразно ввести некоторую целевую функцию, заменив ее весь класс.

Для построения класса кооперации используется понятия графа кооперации. Пусть $\left(\left(f_1(x), .., f_p(x)\right)^T\right)$ – вектор целевых функций, $K = \left\{k_{ij}\right\}_{p \times p}$ – матрица коэффициентов взаимодействия целевых функций, $K^{\text{кооп}} = \{k_{ij}^{\text{кооп}}\}_{p\times p}$ – матрица с элементами $k_{ij}^{\text{кооп}} = \begin{cases} 1, k_{ij} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$

Графом кооперации называется граф, у которого множество вершин совпадает с множеством целевых функций, а матрица смежности – с матрицей $K^{\text{кооп}}$.

Другой подход для структуризации множества целей связан с использованием знаковых графов. Пусть $\left(f_1(x), .., f_p(x)\right)$ – вектор целевых функций, $K = \{k_{ij}\}_{p\times p}$ – матрица коэффициентов взаимодействия. Тогда знаковый граф $G^{\text{взаим}}$ взаимодействия целевых функций определяется правилом:

а) каждой вершине i ставится в соответствие целевая функция $f_i(x)$;

б) вершины i и j соединяются ребром, если соответствующие целевые функции не независимы, причем ребро (i, j) помечается знаком «+», если $k_{i,j} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и знаком «–», если $k_{i,j} \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Знак графа $G^{\text{взаим}}$ позволяет ввести понятие сбалансированности на множестве целей. Согласно теореме Харари о структуре, если множество вершин знакового графа можно разбить на два подмножества так, что связи в каждом из подмножеств положительны, а для вершин из разных подмножеств – отрицательны, то граф является сбалансированным в том смысле, что во множестве вершин отсутствует напряжение, а, следовательно, множество целей можно считать в некотором смысле согласованным.

Может оказаться, что разбиение содержит не два, а больше подмножеств вершин. В этом случае граф является группирруемым.

Будем говорить, что знаковый граф является *группируемым*, если множество его вершин можно разбить на классы таким образом, что все ребра, соединяющие вершины одного класса положительны, а все ребра, соединяющие вершины разных классов отрицательны. Группирруемый граф позволяет выделить подмножество кооперирующих целей, которые между собой либо независимы, либо конфликтуют.

Знаковый граф группируем тогда и только тогда, когда в нем нет циклов с единственным отрицательным ребром. Заметим, что граф может быть не сбалансированным, но группируемым [2, 3].

В нашем случае группируемость означает, что множество целевых функций может быть разбито на классы таким образом, что цели, принадлежащие одному классу, кооперируют между собой, в то время как сами классы являются конкурирующими, причем между такими классами может наблюдаться напряжение, и поэтому граф в целом не является сбалансированным. Для оценки сбалансированности существует ряд количественных характеристик.

Например, для определения сбалансированности графа можно ввести понятие цикла (пути, в котором первая и последняя вершины совпадают), как знака произведения входящих в цикл дуг. Дуга, имеющая знак «+» в этом произведении рассматривается как дуга с «весом», равным 1. Соответственно, если знак дуги отрицателен, то эта дуга учитывается в произведении в виде сомножителя, равного –1.

Группирруемый граф позволяет выделить подмножество кооперирующих целей, которые имеет смысл агрегировать.

Для упрощения задачи линейной многокритериальной оптимизации предлагается следующий алгоритм:

1. Для каждой целевой функции $f_i(x), i = \overline{1,n}$ решить задачу $\begin{cases} f_i(x) \to \max, \\ x \in X, \end{cases}$ получив оптимальное решение x_i^*, и соответствующее значение целевой функции $f_i(x_i^*)$.

2. Для каждой пары f_i и f_j целевых функций определить коэффициент взаимодействия k_{ij} по формуле (3). Составить матрицу $K = \left\{k_{ij}\right\}_{n \times n}$ коэффициентов взаимодействия целевых функций.

3. От матрицы K коэффициентов взаимодействия перейти к матрице $K^{\text{кооп}} = \{k_{ij}\}^{\text{кооп}}_{N \times N}$ с элементами $\{k_{ij}\}^{\text{кооп}} = \begin{cases} 1, k_{ij} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$

4. Выделить в графе кооперации клики, которые представляют собой максимальные полные подграфы. В кликах все вершины попарно связаны между собой, причем коэффициенты взаимодействия связей $k_{ij} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

5. Выбрав функцию агрегирования целей, составить новую цель по правилам агрегирования при выполнении условий на параметры в формулах.

Таким образом, в многоцелевой задаче линейной оптимизации уменьшится число целевых функций.

Функцией агрегирования называется функция $\mu_x : R^n \to R$, которая является положительнозначной, непрерывной, а также возрастающей по каждой переменной и вогнутой.

В качестве базовых функций агрегирования в статье рассматриваются две – линейная на основе взаимозамещения переменных и функция осреднения, аналитический вид которых имеет вид:

линейная на основе взаимозамещения переменных:

$$\mu_X(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,n},$$

функция осреднения:

$$\mu_X(x) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, 0 < \alpha < 1, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$$

Для иллюстрации описанного выше алгоритма рассмотрим следующую многокритериальную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x_1 + 2x_2 \to \max, \\ f_2(x) &= 2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ f_3(x) &= 3x_1 + 9x_2 \to \max, \\ f_4(x) &= 8x_1 + 2x_2 \to \max, \\ f_5(x) &= 4x_1 - x_2 \to \max, \\ f_6(x) &= 3x_1 - 2x_2 \to \max, \\ f_7(x) &= -2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ f_8(x) &= -3x_1 + x_2 \to \max, \\ f_9(x) &= -4x_1 - 3x_2 \to \max \end{aligned} \tag{4}$$

при условиях

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 8, \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Матрица кооперации для задачи (4)–(5) имеет вид:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
f_1	V	1	1	1	0	0	0	0	0
f_2	1	V	1	1	0	0	1	0	0
f_3	1	1	V	1	0	0	1	0	0
f_4	1	1	1	V	1	1	0	0	0
f_5	0	0	0	1	V	1	0	0	0
f_6	0	0	0	1	1	V	0	0	0
f_7	0	1	1	0	0	0	V	0	0
f_8	0	0	0	0	0	0	0	V	1
f_9	0	0	0	0	0	0	0	1	V

При построении графа матрицы кооперации, видим, что в нем можно выделить три клики, содержащие целевые функции с сильной кооперацией. Соответствующие множества вершин (целевые функции): а) 1, 2, 3, 4; б) 4, 5, 6; в) 2, 3, 7.

Т.о. имеем три клики: $f_1 f_2 f_3 f_4, f_4 f_5 f_6, f_2 f_3 f_7$, первые две из которых имеют общий элемент

f_4, а первая и третья – элементы f_2 и f_3. Поэтому в качестве оператора агрегирования можно взять либо один, построенный на основе первой клики, либо два – на основе второй и третьей клик.

Вариант 1. *Линейная функция на основе взаимозамещения переменных* для задачи имеет вид:

1) $\mu_1(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i$,

2) $\mu_1(f) = \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 + \lambda_6 f_6 = \sum_{i=4}^{6} \lambda_i f_i$, $\mu_2(f) = = \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_7 f_7$.

1) для первой линейной функции исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{gathered}\lambda_1(4x_1 + 2x_2) + \lambda_2(2x_1 + 4x_2) + \\ +\lambda_3(3x_1 + 9x_2) + \lambda_4(8x_1 + 2x_2) \to \max,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}4x_1 - x_2 \to \max, \\ 3x_1 - 2x_2 \to \max, \\ -2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ -3x_1 + x_2 \to \max, \\ -4x_1 - 3x_2 \to \max\end{gathered} \tag{6}$$

при условиях (5).

2) для второй линейной функции исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{gathered}\lambda_4(8x_1 + 2x_2) + \lambda_5(4x_1 - x_2) + \\ +\lambda_6(3x_1 - 2x_2) \to \max, \\ \lambda_2(2x_1 + 4x_2) + \lambda_3(3x_1 + 9x_2) + \\ +\lambda_7(-2x_1 + 4x_2) \to \max,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}4x_1 + 2x_2 \to \max, \\ -3x_1 + x_2 \to \max, \\ -4x_1 - 3x_2 \to \max\end{gathered} \tag{7}$$

при условиях (5).

Вариант 2. *Функция осреднения* для задачи имеет вид:

1) $\mu_1(f) = (\lambda_1 f_1^\alpha + \lambda_2 f_2^\alpha + \lambda_3 f_3^\alpha + \lambda_4 f_4^\alpha)^{1/\alpha} = = \sum_{i=1}^{4} (\lambda_i f_i^\alpha)^{1/\alpha}$,

2) $\mu_1(f) = (\lambda_4 f_4^\alpha + \lambda_5 f_5^\alpha + \lambda_6 f_6^\alpha)^{1/\alpha} = \sum_{i=4}^{6} (\lambda_i f_i^\alpha)^{1/\alpha}$, $\mu_2(f) = (\lambda_2 f_2^\alpha + \lambda_3 f_3^\alpha + \lambda_7 f_7^\alpha)^{1/\alpha}$.

1) для первой функции осреднения исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{gathered}(\lambda_1(4x_1 + 2x_2)^\alpha + \lambda_2(2x_1 + 4x_2)^\alpha + \\ +\lambda_3(3x_1 + 9x_2)^\alpha + \lambda_4(8x_1 + 2x_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to \max,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}4x_1 - x_2 \to \max, \\ 3x_1 - 2x_2 \to \max, \\ -2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ -3x_1 + x_2 \to \max, \\ -4x_1 - 3x_2 \to \max\end{gathered} \tag{8}$$

при условиях (5).

2) для второй функции осреднения исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{gathered}(\lambda_4(8x_1 + 2x_2)^\alpha + \lambda_5(4x_1 - x_2)^\alpha + \\ +\lambda_6(3x_1 - 2x_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to \max, \\ (\lambda_2(2x_1 + 4x_2)^\alpha + \lambda_3(3x_1 + 9x_2)^\alpha + \\ +\lambda_7(-2x_1 + 4x_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to \max,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}4x_1 + 2x_2 \to \max, \\ -3x_1 + x_2 \to \max, \\ -4x_1 - 3x_2 \to \max\end{gathered} \tag{9}$$

при условиях (5).

Видно, что для второй линейной функции, как и для второй функции осреднения получилось лучше упростить задачу (4)–(5), т.к. в этом случае использовались два оператора агрегирования.

Также в графе кооперации можно выделить шесть слабых коопераций:

а) f_1, f_2, f_3, f_4, f_5; б) f_1, f_2, f_3, f_4, f_6; в) f_1, f_2, f_3, f_4, f_7; г) $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$; д) f_1, f_2, f_3, f_7; е) f_2, f_3, f_7, f_8.

Первая и вторая кооперации имеют общие элементы f_1, f_2, f_3, f_4, первая и третья – f_1, f_2, f_3, f_4, первая и четвертая – f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, первая и пятая – f_1, f_2, f_3, первая и шестая – f_2, f_3, вторая и третья – f_1, f_2, f_3, f_4, вторая и четвертая – f_1, f_2, f_3, f_4, f_6, вторая и пятая – f_1, f_2, f_3, вторая и шестая – f_2, f_3, третья и четвертая – f_1, f_2, f_3, f_4, третья и пятая – f_1, f_2, f_3, третья и шестая – f_2, f_3, f_7 четвертая и пятая – f_1, f_2, f_3, четвертая и шестая – f_2, f_3, пятая и шестая – f_2, f_3, f_7.

Так как каждая из слабых коопераций имеет хотя бы один общий элемент с любой другой слабой кооперацией, то возможно использование только одного оператора агрегирования, но при этом возможны шесть вариантов данного оператора. А поскольку четвертая кооперация включает первую и вторую, третья включает пятую, остается лишь три возможных оператора агрегирования:

$$\begin{gathered}\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_7),\\ \Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6),\\ \Phi_{W_Q}(f_2, f_3, f_7, f_8).\end{gathered} \quad (10)$$

Построим их.

1. $\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_7)$:

$$\begin{gathered}f_1(x) = 4x_1 + 2x_2;\\ f_2(x) = 2x_1 + 4x_2;\\ f_3(x) = 3x_1 + 9x_2;\\ f_4(x) = 8x_1 + 2x_2;\\ f_7(x) = -2x_1 + 4x_2.\end{gathered}$$

Для нахождения весовых коэффициентов воспользуемся формулой

$$\omega_i^\alpha = \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha - \left(\frac{i-1}{n}\right)^\alpha : \quad (11)$$

$$\omega_1^\alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{0}{5}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha,$$

$$\omega_2^\alpha = \left(\frac{2}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha,$$

$$\omega_3^\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{5}\right)^\alpha,$$

$$\omega_4^\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{5}\right)^\alpha,$$

$$\omega_7^\alpha = \left(\frac{7}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{5}\right)^\alpha.$$

Пусть $\alpha = 1$, тогда получаем, что:

$$\begin{gathered}\omega_1 = \frac{1}{5}, \omega_2 = \frac{1}{5}, \omega_3 = \frac{1}{5},\\ \omega_4 = \frac{1}{5}, \omega_7 = \frac{1}{5}.\end{gathered} \quad (12)$$

В таком случае оператор агрегирования имеет вид:

$$\begin{gathered}\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_7) =\\ = \frac{1}{5}(4x_1 + 2x_2) + \frac{1}{5}(2x_1 + 4x_2) +\\ + \frac{1}{5}(3x_1 + 9x_2) + \frac{1}{5}(8x_1 + 2x_2) +\\ + \frac{1}{5}(-2x_1 + 4x_2).\end{gathered} \quad (13)$$

Открывая скобки и приведя подобные, получим:

$$\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_7) = 3x_1 + 4{,}2x_2. \quad (14)$$

Получаем, что исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{gathered}3x_1 + 4.2x_2 \to \max,\\ 4x_1 - x_2 \to \max,\\ 3x_1 - 2x_2 \to \max,\\ -3x_1 + x_2 \to \max,\\ -4x_1 - 3x_2 \to \max\end{gathered} \quad (15)$$

при условиях (5).

2. $\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$:

$$\begin{gathered}f_1(x) = 4x_1 + 2x_2;\\ f_2(x) = 2x_1 + 4x_2;\\ f_3(x) = 3x_1 + 9x_2;\\ f_4(x) = 8x_1 + 2x_2;\\ f_5(x) = 4x_1 - x_2;\\ f_6(x) = 3x_1 - 2x_2.\end{gathered}$$

Для нахождения весовых коэффициентов воспользуемся формулой (11), тогда:

$$\omega_1^\alpha = \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{0}{6}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha,$$

$$\omega_2^\alpha = \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{6}\right)^\alpha,$$

$$\omega_3^\alpha = \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha,$$

$$\omega_4^\alpha = \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{6}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha,$$

$$\omega_5^\alpha = \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{4}{6}\right)^\alpha = \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha,$$

$$\omega_6^\alpha = \left(\frac{6}{6}\right)^\alpha - \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^\alpha.$$

Для $\alpha = 1$ имеем:

$$\begin{gathered}\omega_1 = \frac{1}{6}, \omega_2 = \frac{1}{6}, \omega_3 = \frac{1}{6},\\ \omega_4 = \frac{1}{6}, \omega_5 = \frac{1}{6}, \omega_6 = \frac{1}{6}.\end{gathered} \quad (16)$$

А, следовательно, оператор агрегирования имеет вид:

$$\begin{gathered}\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) = \frac{1}{6}(4x_1 + 2x_2) +\\ + \frac{1}{6}(2x_1 + 4x_2) + \frac{1}{6}(3x_1 + 9x_2) + \frac{1}{6}(8x_1 +\\ + 2x_2) + \frac{1}{6}(4x_1 - x_2) + \frac{1}{6}(3x_1 - 2x_2).\end{gathered} \quad (17)$$

Открывая скобки и приведя подобные:

$$\Phi_{W_Q}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) = 4x_1 + \frac{7}{3}x_2. \quad (18)$$

Исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{aligned} &4x_1 + \frac{7}{3}x_2 \to \max, \\ &-2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ &-3x_1 + x_2 \to \max, \\ &-4x_1 - 3x_2 \to \max \end{aligned} \quad (19)$$

при условиях (5).

3. $\Phi_{W_Q}(f_2, f_3, f_7, f_8)$:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x_1 + 4x_2; \\ f_3(x) &= 3x_1 + 9x_2; \\ f_7(x) &= -2x_1 + 4x_2; \\ f_8(x) &= -3x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Для нахождения весовых коэффициентов воспользуемся формулой (11), тогда:

$$\omega_2^\alpha = \left(\frac{2}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha,$$

$$\omega_3^\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{2}{4}\right)^\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha,$$

$$\omega_7^\alpha = \left(\frac{7}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{6}{4}\right)^\alpha = \left(\frac{7}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha,$$

$$\omega_8^\alpha = \left(\frac{8}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{7}{4}\right)^\alpha = 2^\alpha - \left(\frac{7}{4}\right)^\alpha.$$

Пусть $\alpha = 1$, тогда:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{4}, \omega_3 = \frac{1}{4}, \\ \omega_7 &= \frac{1}{4}, \omega_8 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (20)$$

В этом случае оператор агрегирования имеет вид:

$$\begin{aligned} &\Phi_{W_Q}(f_2, f_3, f_7, f_8) = \\ &= \frac{1}{4}(2x_1 + 4x_2) + \frac{1}{4}(3x_1 + 9x_2) + \\ &+ \frac{1}{4}(-2x_1 + 4x_2) + \frac{1}{4}(-3x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Открывая скобки и приведя подобные:

$$\Phi_{W_Q}(f_2, f_3, f_7, f_8) = 4,5x_2. \quad (22)$$

Исходная задача (4)–(5) преобразуется в задачу линейного программирования вида:

$$\begin{aligned} &4.5x_2 \to \max, \\ &4x_1 + 2x_2 \to \max, \\ &8x_1 + 2x_2 \to \max, \\ &4x_1 - x_2 \to \max, \\ &3x_1 - 2x_2 \to \max, \\ &-4x_1 - 3x_2 \to \max \end{aligned} \quad (23)$$

при условиях (5).

В статье на основе коэффициентов взаимодействия между целевыми функциями в задаче многокритериальной оптимизации определяются типы взаимодействия между ними, а затем задача линейного программирования упрощается путем уменьшения числа целевых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леденева Т. М.* Обработка нечеткой информации / Т. М. Леденева. – Воронеж : ВГУ, 2006. – 233 с.

2. *Оре О.* Теория графов / О. Оре. – М. : Наука, 1968. – 336 с.

3. *Орлов В. А.* Теория графов и комбинаторика / В. А. Орлов. – Томск : Томский политехнический институт им. С. М. Кирова, 1988. – 95 с.

4. *Мелькумова Е. М.* Многокритериальная оптимизация на основе меры зависимости целевых функций / Е. М. Мелькумова // Известия Тульского госуниверситета, серия Естественные науки, выпуск № 1. – Тула : ТулГУ, 2011. – С. 177–187.

Аристова Екатерина Михайловна – преподаватель факультета ПММ, каф. Вычислительной математики и Прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет. Тел. (473) 2208-316. E-mail: pmim@yandex.ru.

Aristova Ekaterina Michailovna – the teacher at the faculty of Applied Mathematics, informatics and mechanics of the dept. of the Calculus mathematics and Applied information technology, Voronezh State University. Tel. (473) 2208-316. E-mail: pmim@yandex.ru.