УДК 519.872.1

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАЗОМКНУТЫХ МАРКОВСКИХ ФОРМ В МОДЕЛЯХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

П. Б. Абрамов*, М. А. Чурсин**

** Военный авиационный инженерный университет*
*** Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета*

Поступила в редакцию 10.11.2012 г.

Аннотация. В статье рассматриваются свойства разомкнутых марковских форм, являющихся обобщением моделей разомкнутых систем массового обслуживания. Показано, что для любой величины входящего потока и интенсивностей выходящих потоков система линейных алгебраических уравнений стационарного режима модели имеет решение, притом единственное. Доказаны фундаментальные соотношения для вероятностей состояний модели.
Ключевые слова: разомкнутая марковская форма, модель, стационарный режим, соотношения вероятностей состояний.
Annotation. The article considers properties of open Markov forms, which are a generalization of the models of open mass service systems. It is shown that, for any values of the incoming flow and the intensities of emerging flows a system of linear algebraic equations for the stationary mode of the model has a solution, besides, the unique one. Fundamental ratios are proved for the probabilities of the model states.
Keywords: open Markov form, model, stationary mode, ratios of probabilities of states.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование систем массового обслуживания в настоящее время является весьма актуальной задачей, что обусловлено стремительным совершенствованием инфокоммуникационных технологий. Одним из перспективных направлений в этой области является развитие моделей разомкнутых систем массового обслуживания. Граф потоков событий и состояний разомкнутой СМО с отказами приведен на рис. 1.

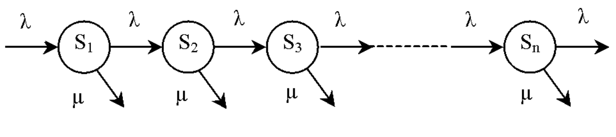

Рис. 1. Граф потоков событий и состояний разомкнутой СМО с отказами

Как показано в [1], решение систем дифференциальных уравнений для таких моделей обладают свойством устойчивости и единственности. Вместе с тем, наибольший интерес для исследования представляет стационарный режим подобных марковских форм с внешними потоками событий.

Поставленную задачу целесообразно решать для обобщенной полносвязной марковской формы. Под полносвязной марковской формой с внешними потоками событий будем понимать полносвязный ориентированный граф, в одну из вершин которого входит извне поток событий, а из каждой вершины исходит вовне графа поток событий.

Граф потоков событий и состояний для полносвязной марковской формы с внешними потоками, включающего в себя четыре состояния, приведен на рис. 2.

Очевидно, что от графа, приведенного на рис. 2, легко перейти к графу разомкнутой СМО с отказами, положив некоторые из интенсивностей переходов равными нулю. Поэтому все соотношения, доказываемые в настоящей статье для полносвязной разомкнутой марковской формы с внешними потоками, являются справедливыми и для модели разомкнутой СМО с отказами.

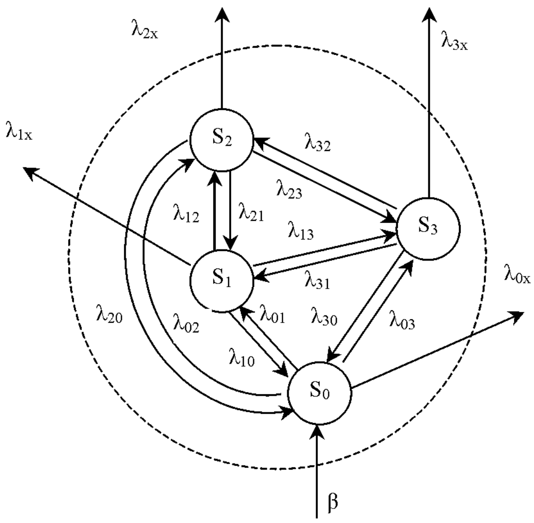

Рис. 2. Граф потоков событий и состояний для полносвязной марковской формы с внешними потоками, включающий в себя четыре состояния

УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАЗОМКНУТОЙ МАРКОВСКОЙ ФОРМЫ С ВНЕШНИМИ ПОТОКАМИ СОБЫТИЙ

В соответствии с общепринятым в марковских моделях подходом каждое из состояний будем характеризовать вероятностью данного состояния P_i. На каждом из переходов наблюдается простейший поток событий, первое же событие в котором переводит систему в новое состояние. Обозначим интенсивности этих потоков общепринятым способом, через λ_{ij}, где i – номер состояния, из которого выходит поток, а j – номер состояния, в который поток входит. Интенсивности выходящих из графа потоков запишем в виде λ_{ix}, где i – номер состояния, из которого выходит поток. Произведение $\lambda_{ij}P_i$, а также $\lambda_{ix}P_i$ будем называть величиной выходящего из i-го состояния потока. Величину входящего в форму потока обозначим через β.

Составим уравнения Колмогорова–Чепмена для полносвязного графа, включающего в свой состав k состояний. В первом уравнении введем параметр β, учитывающий величину входящего в форму потока, а в остальных уравнениях учтем интенсивности выходящих вовне графа потоков.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -(\lambda_{01} + \lambda_{02} + \ldots + \lambda_{0x})P_0 + \\ +\lambda_{10}P_1 + \lambda_{20}P_2 + \ldots + \lambda_{k0}P_k + \beta; \\ \dfrac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1x})P_1 + \\ +\lambda_{21}P_2 + \ldots + \lambda_{k1}P_k; \\ \ldots \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda_{0k}P_0 + \lambda_{1k}P_1 + \ldots + \lambda_{k-1,k}P_{k-1} - \\ -(\lambda_{k0} + \lambda_{k1} + \ldots + \lambda_{kx})P_k. \end{cases} \tag{1}$$

Для стационарного режима уравнения примут вид:

$$\begin{cases} -(\lambda_{01} + \lambda_{02} + \ldots + \lambda_{0x})P_0 + \\ +\lambda_{10}P_1 + \lambda_{20}P_2 + \ldots + \lambda_{k0}P_k = -\beta; \\ \lambda_{01}P_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1x})P_1 + \\ +\lambda_{21}P_2 + \ldots + \lambda_{k1}P_k = 0; \\ \ldots \\ \lambda_{0k}P_0 + \lambda_{1k}P_1 + \ldots + \lambda_{k-1,k}P_{k-1} - \\ -(\lambda_{k0} + \lambda_{k1} + \ldots + \lambda_{kx})P_k = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Правая часть первого уравнения всегда будет равна величине β, взятой с обратным знаком, а правые части других уравнений равны нулю.

АНАЛИЗ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ СЛАУ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАЗОМКНУТОЙ МАРКОВСКОЙ ФОРМЫ

Обозначим диагональные элементы основной матрицы СЛАУ (2) как $-\lambda_i$, где i – номер соответствующей строки. Матрица примет следующий вид:

$$A_F = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \ldots & \lambda_{k0} \\ \lambda_{01} & -\lambda_1 & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{k1} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & -\lambda_2 & \ldots & \lambda_{k2} \\ & & \ldots & & \\ \lambda_{0k} & \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \ldots & -\lambda_k \end{bmatrix}. \tag{3}$$

При этом, очевидно, выполняется равенство:

$$\lambda_i = \lambda_{ix} + \sum_j \lambda_{ij},\ i \neq j. \tag{4}$$

Иначе говоря, i-й диагональный элемент матрицы имеет отрицательный знак и равен по модулю сумме всех элементов этого же (i-го) столбца, увеличенной на значение интенсивности потока, выходящего из i-го состояния графа вовне.

Теорема 1. Ранг основной матрицы разомкнутой марковской формы с внешними потоками событий всегда равен количеству ее строк.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Сначала рассмотрим множество случаев, когда отсутствует выходящий из формы поток, порождаемый состоянием S_0, то есть $\lambda_{0x} = 0$. Тогда для получения нулевого значения в крайнем левом элементе линейной комбинации достаточно просто сложить все строки матрицы A_F. Легко убедиться, что по крайней мере один из элементов полученной линейной комбинации будет иметь ненулевое значение, так как в каждом столбце матрицы элемент, находящийся на главной диагонали, по крайней мере не меньше, чем сумма всех других элементов данного столбца.

2. Во всех остальных случаях поток, порождаемый состоянием S_0, имеет интенсивность λ_{0x}. Тогда, согласно (4), модуль λ_0 больше суммы всех других элементов данного столбца.

Для получения нуля в крайней левой позиции линейной комбинации (при сложении всех строк) потребуется хотя бы одну строку умножить на коэффициент $\alpha > 1$. В общем случае таких строк может быть несколько.

Пусть на коэффициент $\alpha > 1$ была умножена некоторая i-я строка. Тогда модуль диагонального элемента $-\lambda_i$ также возрастет в α раз. Однако, в i-м столбце это самый большой по модулю элемент, причем единственный отрицательный. Поэтому после умножения i-й строки на коэффициент $\alpha > 1$ сумма всех элементов i-го столбца никогда не будет равна нулю.

Теперь предположим, что на коэффициенты $\alpha > 1$ и $\gamma > 1$ были умножены i-я и j-я строка, соответственно. При этом пусть $\gamma > \alpha$, так что в результате i-й элемент полученной линейной комбинации может обратиться в ноль, одновременно с крайним левым ее элементом. Но тогда достаточно повторить приведенные выше рассуждения для j-й строки, что приведет нас уже к ненулевому j-му элементу.

Итак, верхнюю строку матрицы A_F невозможно получить как линейную комбинацию других строк. Аналогично, ни одну иную строку матрицы (3) нельзя получить как линейную комбинацию других строк.

Следовательно, ранг матрицы A_F системы линейных алгебраических уравнений, отвечающих стационарному режиму разомкнутой марковской формы, равен количеству входящих в нее строк. **Теорема доказана.**

Следствием изложенного выше является то, что главный определитель системы линейных алгебраических уравнений, отвечающих стационарному режиму разомкнутой марковской формы, всегда отличен от нуля.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАУ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАЗОМКНУТОЙ МАРКОВСКОЙ ФОРМЫ

Теорема 2. Система линейных алгебраических уравнений, отвечающих стационарному разомкнутой марковской формы, всегда совместна и имеет единственное решение при любых значениях входящих в ее состав коэффициентов и свободных членов.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Кронекера–Капелли о том, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы СЛАУ была совместной, является равенство рангов основной матрицы и расширенной матрицы системы.

Запишем расширенную матрицу:

$$B_F = \left[\begin{array}{ccccc|c} -\lambda_0 & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \ldots & \lambda_{k0} & -\beta \\ \lambda_{01} & -\lambda_1 & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{k1} & 0 \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & -\lambda_2 & & \lambda_{k2} & 0 \\ & & \ldots & & & \\ \lambda_{0k} & \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \ldots & -\lambda_k & 0 \end{array}\right]. \quad (5)$$

Рассмотрим минор максимального порядка, составленный начиная от крайнего правого верхнего элемента матрицы B_F. Он имеет следующий вид:

$$M_F = \begin{vmatrix} \lambda_{10} & \lambda_{20} & \ldots & \lambda_{k0} & -\beta \\ -\lambda_1 & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{k1} & 0 \\ \lambda_{12} & -\lambda_2 & \ldots & \lambda_{k2} & 0 \\ & & \ldots & & \\ \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \ldots & -\lambda_k & 0 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Применяя разложение минора (6) по элементам правого столбца, получим:

$$M_F = -\beta \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{k1} \\ \lambda_{12} & -\lambda_2 & \ldots & \lambda_{k2} \\ & \ldots & & \\ \lambda_{1k} & \lambda_{2k} & \ldots & -\lambda_k \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0. \quad (7)$$

Оставшийся в правой части выражения (7) определитель по своей структуре полностью соответствует основной матрице СЛАУ стационарного режима разомкнутой марковской формы для некоторого графа, включающего на одно состояние меньше исходного. Пример структуры подобного графа, для исходного варианта с четырьмя состояниями (рис. 2), приведен на рис. 3.

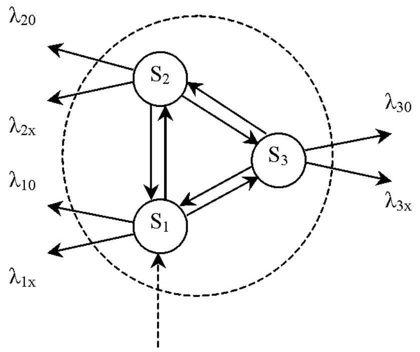

Рис. 3. Граф состояний, отвечающий определителю, полученному при разложении расширенной матрицы СЛАУ полносвязной марковской формы четвертого порядка

Воспользовавшись доказанным выше свойством отличия от нуля главных детерминантов рассматриваемых систем уравнений, приходим к выводу о том, что правая часть выражения (7) ни при каких условиях не будет равна нулю. Приведенные рассуждения справедливы также для минора любого меньшего порядка, полученного из матрицы (5) аналогично минору M_F (6). Таким образом, ранг матрицы B_F любого порядка равен количеству ее строк и равен рангу матрицы A_F. Следовательно, согласно теореме Кронекера–Капелли, СЛАУ стационарного режима разомкнутой марковской формы, имеющей входящий извне поток и произвольное количество выходящих вовне графа состояний потоков, всегда совместна и имеет единственное решение. **Теорема доказана.**

Следует отметить, что не для любых значений входящего потока решение системы уравнений приведет к значениям неизвестных P_i, меньших единицы, что необходимо для вероятностей состояний. В этом случае результаты можно трактовать в соответствии с классическими моделями динамики средних [2]. «Населенность» некоторых состояний в среднем будет составлять более одного события (заявки), в то время, как для P_i, меньших единицы, соответствующее состояние будет в среднем в течение некоторого времени «ненаселенным».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАЗОМКНУТОЙ МАРКОВСКОЙ ФОРМЫ

Для стационарного режима разомкнутой марковской формы с внешними потоками событий имеют место некоторые фундаментальные соотношения. Они будут доказаны ниже.

Теорема 3. В стационарном режиме модели всегда выполняется соотношение:

$$\sum_i P_i \lambda_{ix} = \beta, \tag{8}$$

то есть, сумма величин выходящих потоков равна величине входящего потока β.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2). Сложим все строки системы, получив таким образом их простейшую линейную комбинацию:

$$\begin{gathered} -\lambda_{0x}P_0 - \lambda_{1x}P_1 - \\ -\lambda_{2x}P_2 - \ldots - \lambda_{kx}P_k = -\beta. \end{gathered} \tag{9}$$

Меняя знак в обеих частях равенства (9), непосредственно приходим к выражению:

$$\sum_i P_i \lambda_{ix} = \beta. \tag{10}$$

Теорема доказана.

Очевидно, что полученное равенство справедливо для модели любого порядка k.

Следствие. Основная матрица СЛАУ стационарного режима разомкнутой марковской формы может быть преобразована так, что одной из ее строк будет являться вектор, элементы которого равны интенсивностям выходящих из состояний модели потоков.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно рассмотреть линейную комбинацию (9). Так как она получена из строк матрицы, то может быть подставлена вместо одного из уравнений системы. В этом случае величины λ_{ix}, являющиеся коэффициентами при неизвестных P_i, составят одну из строк основной матрицы A_F. В правой части соответствующей строки расширенной матрицы B_F должен быть подставлен параметр β.

Теорема 4. Отношения вероятностей состояний, отвечающих стационарному режиму разамкнутой марковской формы с внешними потоками событий, не зависят от величины входящего потока β.

Доказательство. Рассмотрим решение СЛАУ стационарного режима модели динамики средних с внешними потоками событий согласно правилу Крамера. Запишем выражения для математических ожиданий, например, P_0 и P_1:

$$P_0 = \frac{\det A_{F0}}{\det A_F},$$
$$P_1 = \frac{\det A_{F1}}{\det A_F}, \tag{11}$$

где

$$\det A_{F0} = \begin{vmatrix} -\beta & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{30} \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ 0 & \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}; \tag{12}$$

$$\det A_{F1} = \begin{vmatrix} -\lambda_0 & -\beta & \lambda_{20} & \lambda_{30} \\ \lambda_{01} & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & 0 & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & 0 & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}; \tag{13}$$

$$\det A_F = \begin{vmatrix} -\lambda_0 & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{30} \\ \lambda_{01} & -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Разложим частные детерминанты (12) и (13) по элементам столбцов, содержащих параметр β.

$$\det A_{F0} = -\beta \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}; \tag{15}$$

$$\det A_{F1} = \beta \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{01} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Обозначим отношение P_1 к P_0 как Rel_{10} и запишем его с учетом выражений (11), (15) и (16):

$$Rel_{10} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{\det A_{F1}}{\det A_{F0}} = \frac{-\beta \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{01} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}}{\beta \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ -\lambda_{02} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ -\lambda_{03} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -\lambda_2 & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_3 \end{vmatrix}}. \tag{17}$$

В выражении (17) величина отношения Rel_{10} не зависит от значения параметра β. **Теорема доказана.**

Очевидно, что этот вывод справедлив как для любой пары вероятностей состояний, так и для модели любого порядка k.

Теорема 5. Отношение суммы любых вероятностей состояний к сумме любых других вероятностей состояний этой же модели не зависит от величины входящего потока.

Доказательство. Доказательство данной теоремы легко провести аналогично предыдущей (выражения (11)–(17)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Инвариантность множества отношений вероятностей состояний $\{Rel_{ij}\}$ от величины входящего потока β позволяет утверждать, что данное множество представляет собой описание модели в общем виде.

На этой основе не представляет затруднений многократный расчет абсолютных значений вероятностей состояний для конкретных значений величин входящего потока β, без решения сложной в общем случае системы алгебраических уравнений. Достаточно воспользоваться соотношением, получаемым непосредственно из (10):

$$P_0 = \frac{\beta}{\lambda_{0x} + \sum_{i=1}^{I} Rel_{i0}\lambda_{ix}}.$$

После этого

$$P_i = P_0 Rel_{i0} .$$

Очевидно, что здесь вместо P_0 может выступать любая другая опорная вероятность P_j. Таким образом, однократный предварительный расчет множества отношений вероятностей состояний $\{Rel_{ij}\}$ для некоторого произвольного значения величины входящего потока β действительно имеет характер общего решения марковской формы в стационарном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов П. Б.* Анализ существования и устойчивости решения для марковских моделей разомкнутых систем массового обслуживания / П. Б. Абрамов, М. А. Чурсин // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – №1. – С. 56–61.

2. *Вентцель Е. С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.

Абрамов Петр Борисович – кандидат технических наук, доцент. Военный авиационный инженерный университет, преподаватель. Тел. 8-903-650-16-20. E-mail: abpostbox58@mail.ru.

Чурсин Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент. Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета, доцент.

Abramov Petr Borisovitch – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Military aviation engineering university, teacher. Tel: 8-903-650-16-20. E-mail: abpostbox58@mail.ru.

Chursin Mickail Aleksandrovitch – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Voronezh branch of Russian State trade and economic University