

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

М. И. Каменский, И. Н. Кутищев, Е. В. Рачинский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.11.2011 г.

Аннотация. В настоящей статье предлагается математическая модель рынка, описывающая периодические колебания объемов продаж и цены. Модель основана на нескольких простых предположениях о стратегии игрока на рынке. При этих предположениях указанные периодические режимы являются решениями хорошо известного уравнения Ван дер Поля. Для полученного уравнения изучен нелинейный резонанс, связанный с «принудительной раскачкой» рынка. Для наглядной демонстрации разработанной модели, проанализирована динамика изменения цен на акции (на торговой площадке РТС) компании ОАО «ГАЗПРОМ».

Ключевые слова: математическая модель биржи, периодические колебания, функция Малкина.
Annotation. In the present article one mathematical market model, describing periodic fluctuations of sales volumes and the prices, is offered. The model is based on several simple assumptions of the player strategy in the market. At these assumptions the specified periodic modes are the well-known solutions of the Van der Pol's equation. For the obtained equation the nonlinear resonance connecting with «a compulsory swing» market is studied. As an example of the developed model, we analyse the dynamics of change of the prices for shares of open joint stock company «GAZPROM» (on trading platforms of RTS).

Keywords: mathematical model of a stock exchange, periodic fluctuations, Malkin's function.

ВВЕДЕНИЕ

Объяснению периодических режимов колебания рынка, посвящена обширная литература, начиная с классических работ [2, 4, 6, 8], в которых рассматривается детерминистская модель функционирования рынка, описываемая системой автономных, обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанные модели никак не связаны со стратегией игроков, вырабатываемой на основе анализа состояния рынка в настоящий момент времени, учет которой, не укладывается в эти классические модели. Создатели таких моделей строят обособленную теорию, состоящую из некоторых систем уравнений, утверждая, что экономические отношения развиваются на этой основе. В последние годы был предпринят ряд попыток [9, 10] создать обратные математические модели, способные на основе анализа стратегии отдельных игроков, получить математическое объяснение периодических колебаний средних показателей объемов продаж и цены за короткий промежуток времени. Отметим, что эти модели не связаны с математической теорией игр. В них, описанные средние значения рассматриваются как функции, зависящие от времени, которые оказываются решениями обыкновенных дифференци-

альных уравнений, имеющих устойчивые периодические решения. Отход от классических моделей, смена теоретической направленности, обусловлена большой погрешностью в подобных моделях, связанной с поведенческими действиями индивидуумов. Для более четкого описания динамики экономической системы, учитывая современные технологические нововведения в области вычислительной техники, необходимо отталкиваться от элементов данной системы, поведенческие связи которых и служат отправной точкой в написании математической модели, способной отображать колебательные процессы. В настоящей статье разработана математическая модель, которая на основе постоянной, на каждом шаге, (купля-продажа части пакета) стратегии игрока на рынке, позволяет получить периодическое колебание математического ожидания объемов продаж и цены. Оказывается, что эти математические ожидания являются в нашем случае решениями уравнения Ван дер Поля. Это обстоятельство позволяет рассмотреть явление нелинейного резонанса на рынке, связанное с его раскачкой, вызванной периодическими продажами и покупками малых пакетов ценных бумаг. Проведенный при выбранных параметрах численный анализ мо-

дели, позволил вычислить бифуркационные точки Малкина схода с устойчивого цикла. В качестве приложения рассматривается динамика цен на акции (на торговой площадке РТС) компании ОАО «ГАЗПРОМ».

1.1 ПОСТАНОВКА ПРАВИЛ

Современный технический анализ фондового рынка оперирует различными правилами ведения торгов, которые жестко коррелированы между собой. Более подробно о структуре рынка можно узнать в [9]. Биржа функционирует по правилам. Многие из них остаются за гранью нашего понимания, именно ввиду этого и создается стохастическое, непредсказуемое поведение цен. Разработанная нами модель, базируется на совокупности правил, описывающих как нам кажется основные и самые важные аспекты, встречающиеся при торговле на бирже.

Предположим, что некоторый инвестор обладает однородным пакетом ценных бумаг c . Положим, что часть пакета ценных бумаг, которой обладает наш инвестор, равняется $k = \frac{c}{N}$, $0 < k < 1$, где N – общее количество акций, обращаемых на бирже. Инвестору для того, чтобы начать торговлю, необходимо сделать ряд выводов по текущему состоянию дел на бирже. Для этого, он с вероятностью r продает одну акцию из своего пакета или же с вероятностью $1 - r$ покупает одну акцию, для того, чтобы определить текущую конъюнктуру на бирже. Осознав, что застоя на бирже не наблюдается и его одна акция вошла в оборот, инвестор захочет узнать настроения своих коллег, понять как поступает большинство из них, для того чтобы не идти против тенденции. Инвестор, для анализа текущей ситуации дел на бирже, опрашивает трех своих коллег-трейдеров (выбирается именно нечетное число, чтобы всегда принять четкое решение), и на основе этого опроса делает вывод о своих дальнейших действиях: продавать или покупать. Если из трех игроков двое сказали, что будут продавать, то, следовательно, инвестор делает для себя вывод, что цена уменьшится и начнет так же продавать. Если двое из них решили покупать, то цена возрастет и инвестор последует за данной тенденцией. Если все три игрока дали одинаковый ответ, то наш инвестор занимает выжидательную позицию, не решаясь вступить в игру. Данная ситуация едино-

гласного решения характерна для пика тенденции (тренда). Как правило, достигнув определенной вершины, линия тренда изменяет направленность. Для того, чтобы получить максимальную прибыль, инвестор должен уловить тренд на первоначальной стадии, увидеть его зарождение. В случае явно выраженной тенденции существует большая вероятность спонтанной смены направленности. Поэтому случай, когда двое выступают против одного, более приемлем для инвестора и благоприятен для игры. Каждый раз, перед тем как определить свои действия на бирже, инвестор всегда будет производить этот опрос.

Рассмотрим действия инвестора в более абстрактном смысле. Предположим, что у нас есть два ящика. Один ящик мы назовем (+), другой (-). В этих ящиках находятся частицы (единичные элементы). Их количество в ящиках соответственно N_+ и N_- . Общее количество частиц в двух ящиках $N = N_+ + N_-$. Число N характеризует общее количество акций на бирже. Каждая частица, находящаяся в ящике (+) – это позиция «быка», а каждая частица в ящике (-) представляет собой позицию «медведя».

Введем следующие обозначения: пусть переменная S характеризует общую цену на пакет ценных бумаг, а c – величину пакета ценных бумаг ($0 < c < N$). Под k будем понимать коэффициент, характеризующий часть пакета ценных бумаг, которым оперирует инвестор. Так же стоит отметить, что в нашей модели у каждого участника торгов в распоряжении находится однородное количество ценных бумаг. Следовательно: $k = \frac{c}{N}$, $0 < k < 1$.

Произведем манипуляции с данными частицами, которые будут описаны следующими правилами:

1) Правило, моделирующее «текучесть» на бирже: выбирается произвольно одна частица из N и перемещается с вероятностью r или не перемещается с вероятностью $1 - r$ в противоположный ящик. ($0 \leq r \leq 1$). Позиция меняется случайно. Данное правило характеризует случайный процесс, при котором инвестор произвольно покупает или продает одну акцию для определения конъюнктуры рынка. Представив N_+ и N_- как функции времени t с шагом 1 получим следующее математическое ожидание отношения приращений $N_{+(t)}$ и N_- для данного правила

$$E \left[\frac{N_{+(t+1)} - N_{+(t)}}{N} \right] = \tilde{r} \left\{ -\frac{N_{+(t)}}{N} + \frac{N_{-(t)}}{N} \right\},$$

где $\tilde{r} = \frac{r}{N}$ – малый параметр ($\tilde{r} \leq 0.1$), характеризующий отношение вероятности выбора к величине пакета.

2) Произвольно выбирается 3 частицы из N . Если 2 частицы были взяты из ящика (+), и 1 из ящика (–), то 1 частицу из ящика (–) перемещаем в ящик (+). При этом значение S увеличивается на 1. Это означает, что двое из трех игроков, взятых наугад, решили играть на повышение. Мы полагаем, что цена увеличится. Поэтому перемещаем одну частицу в противоположный ящик, по следующей причине. Сделав заключение, о том, что большинство (двое против одного) имеет доминирующую позицию, игрок, решивший играть на понижение, несомненно, сменит свою позицию, опасаясь бросить вызов «толпе». Если 2 частицы были взяты из ящика (–) и 1 из ящика (+), то 1 частицу из ящика (+) перемещаем в ящик (–). При этом, по аналогии с вышесказанным, значение S уменьшается на 1. Если 3 частицы были взяты из ящика (+), то с частицами ничего не происходит, а значение S увеличивается на 3. Данная ситуация, характеризует возможность существования устойчивой линии тренда. Трое из трех игроков дали одинаковый ответ, следовательно, на рынке наблюдается тенденция к повышению и предпосылки к смене данной тенденции отсутствуют. Из-за этого с частицами ничего не происходит. Аналогично, если 3 частицы были взяты из ящика (–), то с частицами ничего не происходит, а значение S уменьшается на 3. Спрашивать о действии игрока и получать ответ – означает моделировать дальнейшее изменение цены. В дальнейшем мы рассматриваем тот случай, где для первоначальной цены имеет место следующее равенство $S_0 = 0$. Наша выборка с частицами носит случайный характер. Если брать реальные примеры, то далеко не всегда, на бирже будет наблюдаться рост, даже в том случае, если вы наугад спросили триста трейдеров и все из них сказали, что будут играть на повышение. Поэтому, для адекватности модели, мы берем среднее значение от всего опроса. Представив N_+ и N_- как функции времени t с шагом 1 получим следующее математическое ожидание отношения приращений $N_{+(t)}$ и N_- для данного правила

$$E \left[\frac{N_{+(t+1)} - N_{+(t)}}{N} \right] = 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)} (N_{+(t)} - 1) N_{-(t)}}{N (N - 1) (N - 2)} - 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)} (N_{-(t)} - 1) N_{-(t)}}{N (N - 1) (N - 2)},$$

3) Правило, моделирующее изменение цены в зависимости от объемов продаж (покупки): мы изменяем количество частиц N_+ в ящике (+) (такие же действия могут быть применены к частицам N_- из ящика (–) с вероятностью, которая пропорциональна переменной S , т.е. если S положительное число, то количество N_+ уменьшается на 1 с вероятностью $\frac{S}{N}$, если S отрицательное, количество N_+ увеличивается на 1 с вероятностью $-\frac{S}{N}$. Это правило описывает трансформацию на рынке. Когда цена идет вверх, зачастую игроки с длинными позициями, вынуждены отступить перед сильной восходящей тенденцией и вместо того чтобы продавать, начинают покупать. Аналогично поступают игроки с короткими позициями, когда цена демонстрирует нисходящую тенденцию. В зависимости от позиции игрока на бирже происходят колебания цены. Представив N_+ и N_- как функции времени t с шагом 1 получим следующее математическое ожидание отношения приращений $N_{+(t)}$ и N_- для данного правила получим следующее отношение $\frac{S_{(t)}}{N}$.

1.2 СТРУКТУРА МОДЕЛИ

Теперь, согласно теории вероятностей, опишем нашу модель в совокупности с тремя правилами.

Снова представляя N_+ и S как функции времени t с шагом 1, подсчитаем математическое ожидание отношения приращений $N_{+(t)}$ и $S_{(t)}$ в соответствии с правилами 1)–3). Таким образом, получаем следующее выражение:

$$E \left[\frac{N_{+(t+1)} - N_{+(t)}}{N} \right] = \tilde{r} \left\{ -\frac{N_{+(t)}}{N} + \frac{N_{-(t)}}{N} \right\} + 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)} (N_{+(t)} - 1) N_{-(t)}}{N (N - 1) (N - 2)} - 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)} (N_{-(t)} - 1) N_{-(t)}}{N (N - 1) (N - 2)} - \lambda E \left[\frac{S_{(t)}}{N} \right], \quad (1)$$

где λ – экономический параметр, характеризующийся отношением трейдеров к общему настроению на бирже. Первое выражение описывает правило 1), следующие два – характеризуют правило 2), а последнее свидетельствует об изменении спроса на ценные бумаги в зависимости от текущей цены на них. При помощи формулы (1) подсчитывается среднее значение от результатов опроса.

$$\begin{aligned}
 & E \left[\frac{S_{(t+1)} - S_{(t)}}{N} \right] = \\
 & = 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)}(N_{+(t)} - 1)(N_{+(t)} - 2)}{N(N-1)(N-2)} + \\
 & + 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)}(N_{+(t)} - 1)N_{-(t)}}{N(N-1)(N-2)} - \\
 & - 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{-(t)}(N_{-(t)} - 1)(N_{-(t)} - 2)}{N(N-1)(N-2)} - \\
 & - 3 \frac{c}{N} \cdot \frac{N_{+(t)}(N_{-(t)} - 1)N_{-(t)}}{N(N-1)(N-2)},
 \end{aligned} \tag{2}$$

Формула (2) описывает изменение цены.

Пусть теперь переменная t – непрерывна.

Положим, что

$$\frac{N_{+(t)} - \frac{N}{2}}{N} = x(t) \Rightarrow E \left[\frac{S_{(t)}}{N} \right] = v(t)$$

Мы будем считать, что $x'(t)$ аппроксимирует $E \left[\frac{N_{+(t+1)} - N_{+(t)}}{N} \right]$. Такое предположение правомерно, если считать что общее количество N достаточно велико, что позволяет применить закон больших чисел Чебышева.

Таким образом, сделав замену, $\frac{c}{N} = k$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dt} x = -2\tilde{r}x + 6kx \left(\frac{1}{2} + x \right) \left(\frac{1}{2} - x \right) - \lambda v \\
 \frac{d}{dt} v = k \left(3 \left(\frac{1}{2} + x \right)^3 + 3 \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 \left(\frac{1}{2} - x \right) - \right. \\
 \left. - 3 \left(\frac{1}{2} + x \right) \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{2} - x \right)^3 \right) = 6kx,
 \end{cases} \tag{3}$$

где $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Из (3) легко получить уравнение Ван дер Поля:

$$\frac{d^2}{dt^2} x - 6k \left(\frac{3 - 4\tilde{r}}{12} - 3x^2 \right) \frac{d}{dt} x + 6\lambda kx = 0 \tag{4}$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ

Используя стохастическую структуру, мы построили детерминированную модель. Получилось так, что модель выходит на устойчивый цикл при определенных значениях параметров, что характеризуется периодическим решением, которое имеет дифференциальное уравнение (4). Таким образом, нам удалось смоделировать биржевой гомеостаз, в котором происходит активная торговля пакетом ценных бумаг одного эмитента (см. рис. 1).

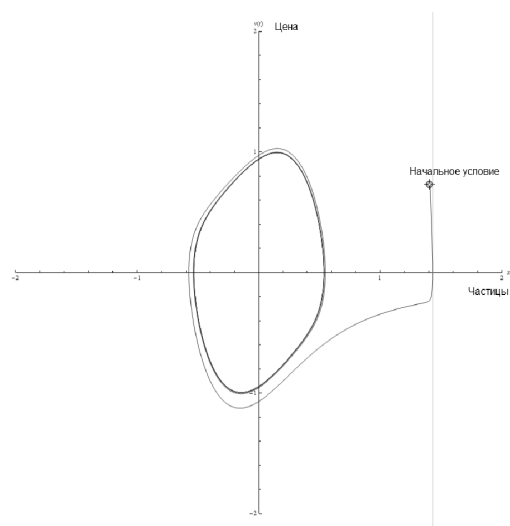


Рис. 1. Графическая реализация решений уравнения (4) при $\tilde{r} = 0.01$, $k = 0.5$, $\lambda = 1$

2.1 ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассмотренная выше модель написана для одного пакета ценных бумаг, на который не оказывается стороннее воздействие, вследствие чего образуется цикл. При рассмотрении случая, более приближенного к реальному, на обособленный пакет ценных бумаг действуют некоторые факторы, к которым в большей степени относятся общая отраслевая взаимосвязь группы пакетов ценных бумаг. Такая корреляция обусловлена тем, что пакеты ценных бумаг имеют переплетения между собой. Мы показали, рассмотрев случай с одним пакетом, что ценовые колебания носят периодический характер. В случае внешнего воздействия данные периодические колебания станут почти-периодическими. Сегодня на бирже огромное коли-

чество ценных бумаг, и большинство из них взаимосвязано, поэтому биржа колеблется почти-периодически. Таким образом, рассмотрим случай, когда на один пакет ценных бумаг оказывается внешнее воздействие. В дифференциальном виде мы получим:

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t)) + \mu\psi(t, x(t)) \quad (5)$$

где μ – малый параметр, $\psi(t, x(t))$ есть внешнее воздействие, оказываемое на автономное уравнение

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t)) \quad (6)$$

которое имеет периодическое решение $x_0(t)$ периода T .

Внешнее воздействие, может быть обусловлено как взаимодействием нескольких пакетов ценных бумаг, так и осознанными действиями игроков. То есть, получаем систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(x(t)) + \mu\psi(t, y(t)); \\ \dot{y}(t) &= \varphi(z(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Первостепенной задачей в нашей модели остается определение особых точек, в которые необходимо будет направить внешнее воздействие заданной частоты. Именно разработка алгоритма нахождения таких точек, и определение нужной частоты, позволит инвестору понять: когда нужно добавить (продать) или изъять (купить) определенное количество ценных бумаг, и при этом сохранить наблюдающиеся на рынке колебания.

2.2 ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ МАЛКИНА

Разработанный нами алгоритм базируется на теории почти-периодических функций, основоположником которой является И. Г. Малкин [3].

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5). При условии, что автономное уравнение (6) имеет периодическое решение $x_0(t)$ периода T , единица является простым мультипликатором оператора сдвига из 0 в T по траекториям линеаризованной системы

$$\dot{x}(t) = \varphi'(x_0(\theta)(t))x. \quad (8)$$

Один из основных результатов исследования настоящей статьи представлен в следующем обобщении теоремы Малкина.

Теорема 1 Пусть $\varphi \in C^1(R^n, R^n)$, и $\psi \in C^1(R \times R^n, R^n)$ является T -периодической по первой переменной интегрально дифференцируемой функцией. Определим функцию $M \in C^1(R, R)$ как

$$M(\theta) = \int_0^T \langle (V_0^T(\theta)(s))^{-1} \psi(s, x_0(s + \theta)), z_0(\theta) \rangle ds, \quad (9)$$

где $V_0^T(\theta)$ – оператор сдвига из 0 в T по траекториям уравнения (8), и $z_0(\theta)$ – нетривиальное T -периодическое решение сопряженного уравнения для уравнения (8), удовлетворяющее условию $\langle z_0(0), \dot{x}_0(0) \rangle > 0$. Предположим, что функция M дифференцируема в точке θ . Если существует $\theta_0 \in [0, T]$, такое что $M(\theta_0) = 0$ и $M'(\theta_0) < 0$ то при всех достаточно малых значениях параметра μ существует асимптотически устойчивое T -периодическое решение уравнения (5), сходящееся при $\mu \rightarrow 0$ к решению $x_\mu(t) \mapsto x_0(t + \theta_0)$.

3. АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА

Для практического нахождения решения, существование которого гарантируется утверждением теоремы 1, используются численные методы (использовалась система Mathematica 8). Для исследования мы рассмотрели уравнение Ван дер Поля (4), записанное в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt} x_2 = -Bx_1 + \varepsilon(\tau - bx_2^2)x_2, \end{cases} \quad (10)$$

где $B = 6\lambda k$, $\varepsilon = 6k$, $\tau = \frac{3 - 4r}{12}$, $b = 3$,

$x_1(0) = A$, $x_2(0) = S$. Значения A и S выбираются так, чтобы начальные точки находились на цикле. Для определения периода устойчивого цикла, а также для вычисления его точного значения была выработана оригинальная методика. Эти вычисления производятся с точностью до десятого знака.

Мы осуществляем на биржу внешнее частотное воздействие, которое представляется в виде $t \mapsto \mu \sin(\frac{2\pi}{T}t)$, где μ – малый параметр, а T – период системы (10), играющий, как видно из теоремы 1, непосредственную роль в нахождении устойчивого состояния на бирже. Наша методика позволяет численно находить устойчивое периодическое решение на основании, предоставляемой теоремой 1, ключевой информации. Однако, решение этой задачи не является тривиальным. К примеру, в ситуациях общего положения не удастся вычислить обратную к матрице $V_0^T(\theta)$, фигурирующую в фор-

муле (5) для функции Малкина $M(\theta)$, ввиду малого числового значения одного из собственных векторов линеаризованной системы (8). Нами был накоплен значительный опыт решения данных задач в конкретных ситуациях. В данной статье мы представляем общую методику. Данный единый вычислительный алгоритм был разработан в ходе решения описанной задачи, и функция $M(\theta)$ в теореме 1 в этом случае вычисляется в следующем виде:

$$M(\theta) = \int_0^T \langle \psi(s, x_0(s + \theta)), g(\theta) \rangle ds, \quad (11)$$

где под $g(\theta)$ понимается числовой массив, соответствующий функции $z_0(\theta)$.

Рассмотрим предложенную технику подробнее. На первом шаге записывается линеаризованная на предельном цикле порождающая система. Уравнение (10) решается одновременно с нахождением матрицы $V_0(\theta)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt} x_2 = -Bx_1 + \varepsilon(\tau - bx_2^2)x_2 \\ \frac{d}{dt} y_{11} = y_{12} \\ \frac{d}{dt} x_{12} = -By_{11} + \varepsilon(-3x_{22}^2b + \tau)y_{12} \\ \frac{d}{dt} y_{21} = y_{22} \\ \frac{d}{dt} x_{21} = -By_{11} + \varepsilon(-3x_{22}^2b + \tau)y_{22}, \end{array} \right. \quad (12)$$

где $x_1(0) = A$, $x_2(0) = S$, $y_{11}(0) = 0$, $y_{12}(0) = 1$, $y_{21}(0) = 0$, $y_{22}(0) = 1$. Одно собственное значение матрицы решений уравнения (12)

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

равно 1, что полностью согласуется с теорией. Однако второе собственное значение близко к 0, что, фактически, делает невозможным дальнейшие вычисления при нахождении обратной матрицы. Преодоление этого затруднения возможно благодаря тому, что удастся точно вычислить собственный вектор (D, C) , отвечающий этому собственному значению. Для нахождения массива $g(\theta)$ из формулы (11) решается на отрезке $[-T, 0]$ с начальными условиями $x_1(0) = A$, $x_2(0) = S$, $y_1(0) = D$, $y_2(0) = C$ система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt} x_2 = -Bx_1 + \varepsilon(\tau - bx_2^2)x_2 \\ \frac{d}{dt} g_1 = Bg_2 \\ \frac{d}{dt} g_2 = -g_1 - \varepsilon(-3x_2^2b + \tau)g_2. \end{array} \right. \quad (13)$$

Теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра гарантирует, в определенном смысле, близость решения системы (13) на промежутке $[-T, 0]$ к периодическому решению по $(x_{01}, x_{02}, g_1(\theta), g_2(\theta))$. В процессе численного решения мы получаем числовой массив $g(\theta)$, нумерация значений которого ведется с конца. Интересен тот факт, что для достаточно малого шага в численном методе Рунге–Кутты, уравнение Ван дер Поля (10) сохраняет вычислительную устойчивость периодического решения на отрезке $[-T, 0]$. Эксперименты показали, что устойчивость обуславливается теоремой о непрерывной зависимости от параметра, и чем точнее численно определен период периодического решения первоначального уравнения, тем больше периодических “витков” совершит решение влево этого уравнения. Именно благодаря данному обстоятельству, мы можем численно отыскать $g(\theta)$, воспользовавшись знанием фундаментальной матрицы линеаризованного на периодическом решении уравнения. Таким образом, удается преодолеть трудности, связанные с плохой обусловленностью матрицы оператора сдвига по траекториям решений вправо линеаризованного уравнения. Теперь, нам осталось лишь применить соотношение (11), рассмотрев в качестве $\psi(s, x_0(s + \theta))$ внешнее воздействие

$$F(z) = \int_0^T \langle \sin(s + \theta), g(\theta) \rangle ds. \quad (14)$$

Не вызывает большого труда вычислить те значения θ , при которых интеграл в правой части соотношения (9) обратится в 0. При значениях $B = 4$, $\varepsilon = 5$, $\tau = 0.5$, $b = 1$ вычисления показывают, что в точках $[0.420593, 0.325693]$ и $[-0.420593, -0.325693]$ уравнение (10) при воздействии на него периодического колебания $\mu \sin(\frac{2\pi}{T})$, где T – собственный период системы, сохраняет периодический режим.

4. РЫНОЧНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Разработанный алгоритм, позволяет определять особые точки на цикле, в которые следует оказывать внешнее воздействие, а так же частоту этого воздействия. Кроме того, при помощи разработанного алгоритма, можно будет определять отклонения от цикла. Таким образом, удалось построить единую математическую модель биржи, описывающую стохастическую структуру взаимодействия всех игроков и способную высчитывать благоприятные условия для торговли в текущий момент времени.

Для наглядной демонстрации модели возьмем котировки цен на акции компании ОАО “ГАЗПРОМ” за период 02.08.2010 по 29.10.2010 (данные торгов на бирже РТС). В рассмотренной модели ведется оперирование лишь одним пакетом ценных бумаг, то есть влияние других пакетов не учитывается. Колебания цен на акции компании “ГАЗПРОМ” испытывают некоторые стохастические отклонения по причине воздействия на них внешних факторов. Посмотрим, будет ли устойчивым колебание цен из сложившейся ситуации на торговой площадке РТС. Для очистки ценовых колебаний от так называемого белого шума воспользуемся стандартным методом и возьмем логарифмы от частного ежедневных цен. После чего получим числовой ряд, от которого подсчитаем скользящее среднее (за пятидневный промежуток). Исходный числовой ряд, имеет следующую графическую реализацию (рис. 2).

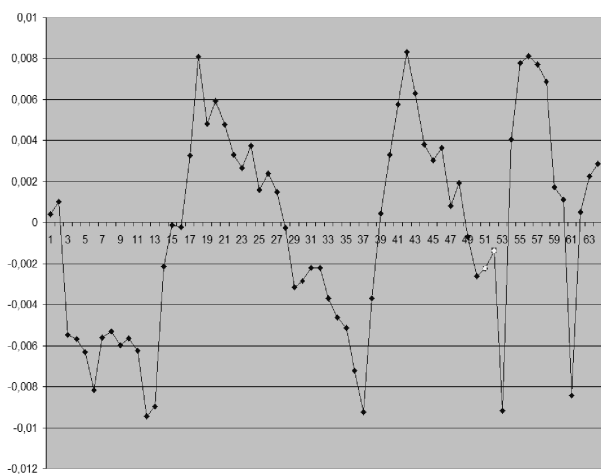


Рис. 2. Графическая реализация обработанного числового ряда цен на акции компании ОАО “ГАЗПРОМ”

Исходя из результатов, видно, что при отсутствии внешнего воздействия, просматривается периодичность. Данную периодичность можно спроецировать и в нашей модели (см. рис. 3) при определенных параметрах. Мы выяснили, что торговля обособленным пакетом ценных бумаг (в нашем случае “ГАЗПРОМ”) описывается дифференциальным уравнением, имеющем периодические решения. Теперь наша основная цель – определить особые точки, на которые нужно будет воздействовать, для того чтобы найденная периодичность сохранилась. Если мы окажем произвольное воздействие в любую точку, то цикличность будет нарушена и периодические колебания станут почти периодическими, то есть картина видоизменится. Мы же хотим сохранить устойчивый цикл, благодаря которому сохранится периодичность на бирже. Для этого применим разработанный алгоритм к этому случаю, приняв за внешнее воздействие функцию $t \mapsto \mu \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, где T – период системы описывающей периодические колебания акций “ГАЗПРОМА”.

Синусоидальное внешнее воздействие, характеризуется периодическими продажами и покупками инвестора. Нам удалось выяснить особые точки в которых нужно оказывать определенное воздействие (см. рис. 4) Это позволит сохранить устойчивое состояние на бирже и при этом заработать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная нами модель, позволяет определять устойчивые циклы в том случае, когда

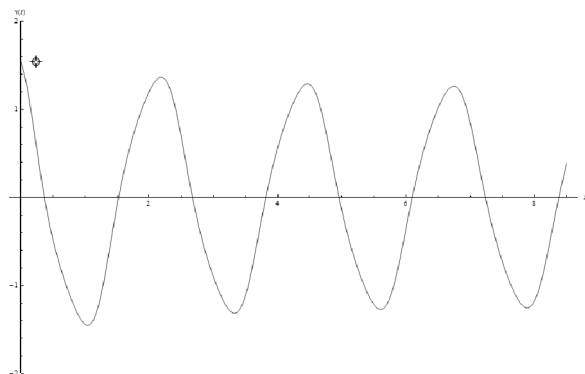


Рис. 3. Графическая реализация решений уравнения модели при $\tilde{r} = 0.0303$, $k = 0.02897$, $\lambda = 4.1$

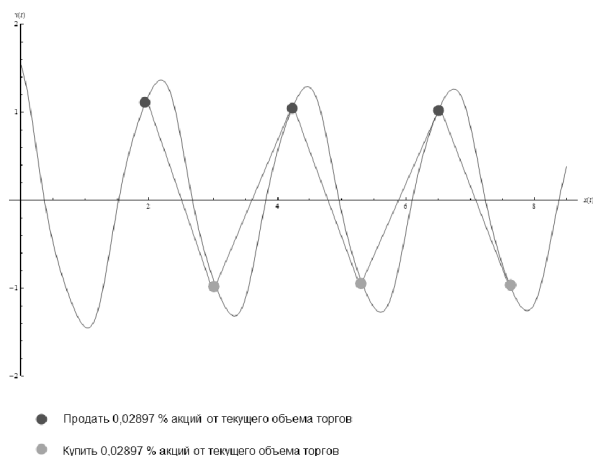


Рис. 4. Точки воздействия и сила воздействия

рассматривается один пакет ценных бумаг. Нам удалось выработать алгоритм подсчета, который позволяет оказывать контролируемое воздействие на устойчивый цикл. При этом воздействие цикличность сохранится. Кроме того, разработанный алгоритм, позволяет находить почти-периодические решения для систем, состоящих из нескольких дифференциальных уравнений имеющих между собой перехлесты. В этом случае модель в плотную приближается к реальной картине существующей на бирже. Исследования в данном направлении ведутся и новые результаты мы намерены опубликовать в следующей статье.

Из текущих результатов видно, что в случае рассмотрения нескольких пакетов ценных бумаг вероятность выхода на периодичность уменьшается прямо пропорционально увеличению количества пакетов. В случае рассмотрения приближенного к реальности количества таких пакетов, по-видимому, существование

Каменский Михаил Игоревич – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет Тел.: (4732)208771. E-mail: Mikhailkamenski@mail.ru

Кутищев Илья Николаевич – аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет Тел.: (4732)208771. E-mail: iliakou@rambler.ru

устойчивого цикла будет считаться аномалией и редким событием. Вообще говоря, в таком случае будет два выбора для дальнейшего ценового движения. Либо увеличиваться, либо уменьшаться. Наша модель, базирующаяся на теории почти-периодических функций может предсказывать точки смены таких трендов (тенденций), а значит, в разы увеличит доходы инвесторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем // Мир, 1966, С. 102–114.
2. *Кейнс Д. М.* Общая теория занятости, процента и денег // ЭКМО, 2007 г., 153 с.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. // Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1956, С. 424–435.
4. *Cont R., Bouchaud J. P.* Macroeconomic Dynamics, // 2000, p. 170–196.
5. *Elder A.* How to play and win at a stock exchange, 2003., p. 553.
6. *Freeman C.* The ‘National System of Innovation’ in historical perspective // Cambridge Journal of Economics. – 2003. – vol. 19. – N.1. – p. 5–24.
7. *Kahneman D., Tversky A.*, Prospect theory: An analysis of decision under risk // Econometrica, 1997, p. 313–327.
8. *Nelson R.* National Innovation Systems: A Comparative Study. – N.Y.: Oxford University Press, 1993. – 524 p.
9. *Takahashi H., Ito Y.* Majority Orienting Model for the Oscillation of Market Price, // Tokyo, Japan, 2004.
10. *Zhi-Qiang Jianga., Wei-Xing Zhoua., Didier Sornette, Ryan Woodardb, Ken Bastiaensen., Peter Cauwels,* Bubble Diagnosis and Prediction of the 2005–2007 and 2008–2009 Chinese stock market bubbles.

Kamenskii Mikhail Igorevich – Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chair of the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University Tel.: (4732) 208771. E-mail: Mikhailkamenski@mail.ru

Kytischev Ilya Nikolaevich – Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University Tel.: (4732)208771. E-mail:iliakou@rambler.ru

Рачинский Евгений Владимирович – студент математического факультета, кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет Тел.: (4732)208771. E-mail: RachinskyEV@mail.ru

Rachinskiy Evgeniy Vladimirovich – student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University Tel.: (4732)208771. E-mail: RachinskyEV@mail.ru