УДК 681.51:007.51

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ В УСЛОВИЯХ РАСПЛЫВЧАТОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Г. Н. Лебедев*, М. Г. Матвеев, М. Е. Семенов***, О. И. Канищева*****

** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*
*** Воронежский государственный университет*
**** Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)*

Поступила в редакцию 22.09.2011 г.

Аннотация. В работе предлагаются методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределенности. Проводится сравнение полученных результатов с полным решением.
Ключевые слова: нечеткие параметры, дифференциальные уравнения, дефаззификация, α-уровень, точечные оценки.
Annotation. The methods of decision of tasks of enterprise management in the conditions of fuzzy uncertainty are offered in the article. The received results are compared with the full solution
Key words: fuzzy parameter, differential equations, defuzzification, α-level, point estimations.

ВВЕДЕНИЕ

Большинство практических задач, связанных с моделированием, поддержкой принятия решений при управлении на предприятии, приходится решать в условиях неполной определенности. При этом часто не удается свести такие задачи к условиям вероятностной неопределенности, а используются экспертные оценки, характеризующиеся нечеткостью или расплывчатой неопределенностью. Будем рассматривать задачи, в которых экспертные оценки представлены нечеткими параметрами $\tilde{A}$ различных математических объектов: уравнений и функциональных ограничений – $\varphi\ (\tilde{A}, x) \le 0$, дифференциальных уравнений – $F(y,\ dy / dx,\ \tilde{A},\ x) = 0$, критериев управления в виде функций или функционалов – $\Phi(y,\ u,\ \tilde{A},\ x)$, т.е. различных компонент математического обеспечения задач управления. Методологическую основу методов решения задач с нечеткими параметрами составляет принцип обобщения Л. Заде или его α-уровневая модификация [1].

Принцип обобщения определяется следующим образом: пусть $X_i,\ i = 1,\ldots,n$ и Y – четкие множества; $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ – прямое произведение множеств; $\tilde{X}_i,\ i = 1,\ldots,n$; и $\tilde{Y}$ – нечеткие подмножества множеств X_i и Y соответственно. Если $F : X \to Y$ – обычное (четкое) отображение, то нечеткое множество $\tilde{Y} = F(\tilde{X})$ определяется как

$$\tilde{Y} = \{(y, \mu_{\tilde{Y}}(y)) \mid y = \\ = f(x_1,\ldots,x_n), (x_1,\ldots,x_n) \in X\}, \qquad (1)$$

где $\mu_{\tilde{Y}}(y) = \sup\limits_{y=f(x_1,\ldots,x_n)} \min(\mu_{\tilde{X}_1}(x_1),\ldots,\mu_{X_n}(x_n))$.

Методы решения задач, вытекающие непосредственно из принципа обобщения основаны на переборных алгоритмах и не всегда могут использоваться в задачах управления, особенно когда последние характеризуются высокой размерностью.

Эту проблему, в значительной степени, устраняет α-уровневый принцип обобщения, обеспечивающий решения эквивалентные решениям, полученным по принципу обобщения, если нечеткие переменные описываются выпуклыми функциями принадлежности. В соответствии с ним все нечеткие переменные представляются четкими интервалами $X^\alpha = (x^L(\alpha),\ x^R(\alpha))$ на заданных значениях α-уровня; индексы L, R означают соответственно левый и правый концы интервала. α-уровневый принцип обобщения представляет решение в виде объединения α-интервалов

$$\tilde{Y} = \bigcup_\alpha \alpha \bullet (y^L(\alpha),\ y^R(\alpha)), \qquad (2)$$

где

$$y^L(\alpha) = \inf\ [f(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))], \qquad (3)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-08-00032

$$y^R(\alpha) = \sup\,[f(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))], \quad (4)$$
$$x_i(\alpha) \in [x_i^L, x_i^R],\ i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, поиск решения сводится к задачам оптимизации (3) и (4), которые удается решить лишь в некоторых частных случаях, когда решение определяется на тех же числовых множествах, что и параметры. Например, α-уровневый принцип, т.е. задачи (3) и (4), теряют смысл при решении дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами.

В настоящей работе предлагается подход к решению задач с нечеткими параметрами, заключающийся в переходе от α-интервалов параметров к точечным оценкам этих интервалов, полученных на основе известных функций принадлежности нечетких параметров. В этом случае на каждом α-уровне рассматривается дефаззифицированная, детерминированная задача управления, что определяет простоту реализации и возможности применения предлагаемого подхода для любого типа задач управления. Разумеется, за упрощение и унификацию приходится «платить» в определенном смысле неполным решением. В дальнейшем будем называть нечеткое решение полным, если оно получено по принципу обобщения Заде. Предлагаемое неполное или модифицированное решение представляет собой нечеткий показатель степени ассиметричности полного решения. Другими словами, если рассматривать полное решение как характеристику надежности принятия решения при управлении, то модифицированное решение характеризует степень пессимизма или оптимизма принимаемого решения. В процессах поддержки принятия решений эти показатели играют определяющую роль, что позволяет заменять полное решение неполным или модифицированным.

1. МЕТОДИКА ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ НЕЧЕТКИХ ПАРАМЕТРОВ И НЕЧЕТКИХ ЗАДАЧ

Различные типы задач управления разрешимы только для случая задания параметра как элемента числового множества. Поэтому предлагаемая методика основана на дефаззификации нечетких параметров, т.е. переходе от нечетких чисел к обычным четким, так чтобы максимально сохранить исходную экспертную информацию. Пусть $\tilde{A}$ – нечеткий числовой параметр с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(a) \in [0; 1]$. Для описания нечетких параметров будем использовать функции принадлежностей (L-R)-типа, а также их удобные частные случаи – треугольные и трапециевидные числа [2]. При решении задач с нечеткими параметрами известным приемом является переход к интервальной неопределенности [1, 2], при котором нечеткому параметру $\tilde{A}$ ставится в соответствие множество четких интервалов $\{A^\alpha\}$. Здесь число α задает α-уровень (α-срез) нечеткого числа, который определяется как четкое множество: $A^\alpha \equiv \{a : \mu_{\tilde{A}}(a) \ge \alpha\}$.

Переход к полной определенности может быть осуществлен путем выбора, каким-либо образом, точки $\bar{a}(\alpha) \in A^\alpha$ [3–6]. В этом случае на каждом α-уровне можно записать исходную задачу в четком виде, заменяя нечеткие параметры на соответствующие значения $\bar{a}(\alpha)$.

Обозначим процесс решения произвольной задачи как некоторую функцию выбора F на множестве альтернатив X с нечеткими параметрами $\tilde{A}$. Тогда решение исходной нечеткой задачи представляется как совокупность решений четких, детерминированных задач на каждом α-уровне:

$$\{x(\alpha) \in X \mid F^\alpha(X, A^\alpha)\},\ \alpha \in [0;\,]. \quad (5)$$

Значения α рассматриваются как показатели надежности соответствующих решений.

Наиболее простым способом вычисления $\bar{a}(\alpha)$ является определение среднего значения

$$\bar{a}(\alpha) = (a^L(\alpha) + a^R(\alpha))/2, \quad (6)$$

где $a^L(\alpha)$ и $a^R(\alpha)$ – соответственно левый и правый концы интервала A^α, которые определяются как функции обратные к функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(a)$.

Полученное выражение $\bar{a}(\alpha)$ подставляется в исходную задачу, заменяя соответствующий нечеткий параметр. В результате получается детерминированная задача управления с дополнительным параметром α. Теперь, если задача имеет аналитическое решение, то оно будет зависеть от α. Функция обратная к этой зависимости и будет функцией принадлежности нечеткого решения – $\mu_{\tilde{R}}(r)$, которое, в отличие от полного решения по Заде, будем называть модифицированным решением $\tilde{R}$. Если исходная задача может быть решена численным методом, то дискретное множество решений $\tilde{R}$ получается при заданной дискретизации α на отрезке [0, 1].

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ПРЕДЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКЕ

Рассмотрим предложенную методику на ряде простых задач управления. Простые задачи позволяют не только компактно проиллюстрировать процесс решения, но и сравнить полученные результаты с полным решением по Заде.

Многие задачи анализа и управления предприятием сводятся к решению алгебраических уравнений. Например, определение точки безубыточности, расчет равновесной цены, балансовые расчеты и т.п. Параметры таких уравнений часто определяются экспертным путем и их удобно представлять в виде нечетких чисел $\tilde{A}$.

Решение линейного уравнения $\tilde{A}x = \tilde{C}$. Модифицированное решение будет иметь вид

$$x(\alpha) = \frac{\bar{c}(\alpha)}{\bar{a}(\alpha)}, \tag{7}$$

где $\bar{c}(\alpha)$ и $\bar{a}(\alpha)$ определяются выражениями (6).

Например, для треугольных чисел $\tilde{A}$ = (2, 3, 5); $\tilde{C}$ = (0, 4, 5) с функциями принадлежности:

$$\mu^L_{\tilde{A}}(a) = -2 + a\,;\ \mu^R_{\tilde{A}}(a) = 2{,}5 - 0{,}5a\,;$$

$$\mu^L_{\tilde{C}}(c) = 0{,}25c\,;\ \mu^R_{\tilde{C}}(c) = 5 - c\,;$$

левые и правые края α-интервалов суть обратные функции:

$$a^L(\alpha) = \alpha + 2\,;\ a^R(\alpha) = 5 - 2\alpha\,;$$

$$c^L(\alpha) = 4\alpha\,;\ c^R(\alpha) = 5 - \alpha\,.$$

Оценки средних значений интервалов, полученные по формуле (6):

$$\bar{a}(\alpha) = \frac{7-\alpha}{2}\,;\ \bar{c}(\alpha) = \frac{3\alpha+5}{2}\,.$$

Модифицированное решение имеет вид

$$x(\alpha) = \frac{\bar{c}(\alpha)}{\bar{a}(\alpha)} = \frac{3\alpha+5}{7-\alpha}\,. \tag{8}$$

Функция принадлежности модифицированного решения определяется как обратная к (8) – $\mu_{x(\alpha)}(x) = \dfrac{7x-5}{3+x}$.

Носитель модифицированного решения $S(x) = (5/7;\ 4/3)$.

Сравним модифицированное решение с решением, полученным на основе α-уровневого принципа обобщения и представляющего собой полное решение нечеткого уравнения. Нетрудно проверить, что полное решение хорошо аппроксимируется треугольным нечетким числом (0, 4/3, 5/2). На рисунке 1 решения показаны в графическом виде: сплошной линией – полное решение; пунктирной линией – модифицированное решение, аппроксимированное прямой линией. Доля пессимизма у полного решения несколько больше чем доля оптимизма, центр тяжести полного решения смещен влево. Характеристика этого отношения отображается модифицированным решением, которое отклоняется от моды влево. Моды полного и модифицированного решений совпадают.

При управлении предприятием широкое применение находят задачи оптимизации. Оптимальный выбор формулируется, как правило, в виде задач математического программирования. Простейшей задачей является безусловная оптимизация функции одной переменной.

Безусловная оптимизация функции $\tilde{f} = x^2 + \tilde{A}x - \tilde{B}$, где $\tilde{A} = (1, 3, 4)$, $\tilde{B} = (2, 4, 5)$ – нечеткие треугольные числа. Функция принадлежности числа $\tilde{A}$ определяется в виде: $\mu^L_{\tilde{A}}(a) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}a$, $\mu^R_{\tilde{A}}(a) = 4 - a$. Среднее значение по оценке (6) равно $\bar{a}(\alpha) = \dfrac{\alpha+5}{2}$. Подставим это значение в исходную функцию, найдем первую производную по x и приравняем ее к нулю, $2x + \dfrac{\alpha+5}{2} = 0$. Критическая точка $x^*(\alpha) = -\dfrac{\alpha+5}{4}$.

Вторая производная, в данном случае константа равная двум, больше нуля, т.е. критическая точка – минимум. Ее функция принадлежности $\mu_{x^*}(x) = -5 - 4x$.

Носитель модифицированного решения: $S(x^*) = (-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{4})$. Полное и модифицированное решения показаны на рис. 2.

Как видно, в этом примере модифицированное решение, так же как и в предыдущем при-

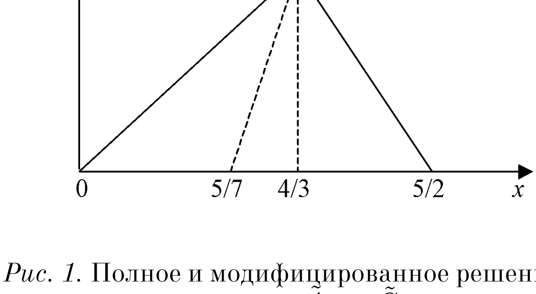

Рис. 1. Полное и модифицированное решения уравнения $\tilde{A}x = \tilde{C}$

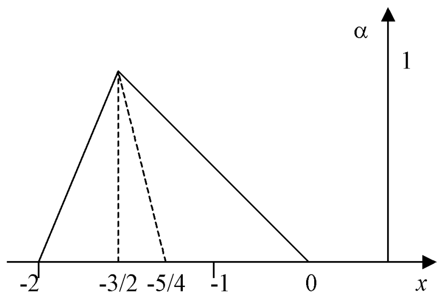

Рис. 2. Полное и модифицированное решения задачи оптимизации функции $\tilde{f} = x^2 + \tilde{A}x - \tilde{B}$

мере с решением уравнения, отображает ассиметричность полного решения.

Задачи математического программирования рассмотрим на простом примере задачи линейного программирования вида

$$\begin{gathered}\tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 = d,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.\end{gathered} \qquad 9)$$

Пусть нечеткие параметры в (9) представлены нечеткими треугольными числами: $\tilde{A}_1 = (0, 4, 5)$ и $\tilde{A}_2 = (2, 3, 5)$, а параметр $d = 10$. В соответствии с предложенной методикой вычислим средние оценки по (6):

$$\overline{a}_1(\alpha) = \frac{4\alpha + 5 - \alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2};$$

$$\overline{a}_2(\alpha) = \frac{\alpha + 2 + 5 - 2\alpha}{2} = \frac{7}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Задача (10) решается численно, на каждом заданном α-уровне. Например, для трех уровней решение будет выглядеть следующим образом.

При $\alpha = 0$; $\overline{a}_1(0) = \frac{5}{2}$, $\overline{a}_2(0) = \frac{7}{2}$. В нашем простом случае решение очевидно $x_1 = 0$, $x_2 = 10$.

При $\alpha = 0{,}5$; $\overline{a}_1(0,5) = \frac{13}{4}$, $\overline{a}_2(0,5) = \frac{13}{4}$. Будем рассматривать два решения $x_1 = 0,\ x_2 = 10$ и $x_1 = 10,\ x_2 = 0$.

При $\alpha = 1$; $\overline{a}_1(1) = 4$, $\overline{a}_2(1) = 3$. Оптимальное решение $x_1 = 10,\ x_2 = 0$.

Основываясь на принципе обобщения Заде выберем решения с максимальными значениями функции принадлежности:

$\{(x_1 = 0, x_2 = 10) \mid 0{,}5\}$ и $\{(x_1 = 10, x_2 = 0) \mid 1\}$. (10)

Решение (10) является модифицированным решением. Нетрудно найти полное решение по принципу обобщения, которое в данной задаче полностью совпадает с модифицированным.

Решение дифференциального уравнения $\dot{y} = \tilde{A}y,\ y(0) = \tilde{C}$. Пусть параметр и начальное условие представлены нечеткими треугольными числами $\tilde{A} = (0, 2, 3)$, $\tilde{C} = (0, 1, 1)$ с функциями принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}^{L}(a) = \frac{1}{2}a; \quad \mu_{\tilde{A}}^{R}(a) = 3 - a;\ \mu_{\tilde{1}}^{L}(x) = x.$$

В соответствии с (6)

$$\overline{a}(\alpha) = \frac{1}{2}(2\alpha + 3 - \alpha) = \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2};\ \overline{c}(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Модифицированное частное решение дифференциального уравнения $\dot{y} = \overline{a}(\alpha)y,\ y(0) = \overline{c}(\alpha)$ будет иметь вид

$$y(\alpha) = \overline{c}(\alpha)\exp(\overline{a}(\alpha)t). \qquad (12)$$

Следует обратить внимание на то, что решение уже не является числовым множеством как в предыдущих примерах, а представляет собой нечеткое множество $\tilde{F}_m$ функций вида (10), формируемое изменением параметра $\alpha \in [0; 1]$.

Полное частное решение по Заде представляет собой более мощное нечеткое множество $\tilde{F}_n$ аналогичных функций, формируемое элементами прямого произведения носителей $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$. При этом $\tilde{F}_m \subset \tilde{F}_n$, а моды этих нечетких множеств совпадают. Подмножество $\tilde{F}_m$, как и в предыдущих примерах, характеризует ассиметрию множества $\tilde{F}_n$ относительно его моды. Таким образом, модифицированное решение дифференциального уравнения позволяет оценивать уровень пессимизма или оптимизма результата и поддерживать принятие решений при управлении.

В таблице 1 приведены элементы множества $\tilde{F}_m$ для двух вариантов значений нечеткого параметра $\tilde{A}$.

Решения из таблицы 1 показывают, что направление отклонения модифицированного решения соответствует направлению ассиметрии параметра $\tilde{A}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Простота приведенных примеров нисколько не ограничивает универсальности применения предлагаемой методики получения модифицированного решения, так как суть методики сводится к дефаззификации задачи на α-уровнях и дальнейшего решения уже вполне детерминированной задачи. Подходы к решению определяются не наличием расплывчатой неопределенности, а сложностью детерминированной задачи.

Таблица 1

Дискретные значения модифицированного решения для двух вариантов модифицированного решения

α	$\tilde{A} = (0, 2, 3)$; $\tilde{C} = (0, 1, 1)$	$\tilde{A} = (0, 1, 3)$; $\tilde{C} = (0, 1, 1)$
	Модифицированное решение	Модифицированное решение
0	$y = 0$	$y = 0$
0,5	$y = 0{,}5e^{1{,}75t}$	$y = 0{,}5e^{1{,}25t}$
1,0	$y = e^{2t}$	$y = e^{t}$

В то же время примеры показывают, что модифицированное решение вполне адекватно полному нечеткому решению, получаемому по принципу обобщения Заде. Информация, необходимая для поддержки принятия решений, в модифицированном решении практически не отличается от информации, имеющейся в полном решении.

Действительно, рассматривая информационную энтропию Шеннона для двух случайных событий говорят о максимуме неопределенности при равной вероятности наступления этих событий. Проводя аналогию с функцией принадлежности можно говорить об отсутствии полезной информации о пессимистических и оптимистических возможностях при симметричной функции принадлежности решения задачи управления. Продолжая энтропийный анализ, мы говорим, что энтропия как мера неопределенности уменьшается при условии разных значений вероятности. Отражение этого утверждения мы можем наблюдать получая ассиметричные функции принадлежности решения задач управления, что характерно для полного решения по Заде. Наконец минимум энтропии достигается при вероятности одного из событий равной единице. Именно такой ситуации адекватно модифицированное решение, что дает основание для его использования в системах поддержки принятия решений при управлении производством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: МИР, 1976. – 147 с.

2. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта* / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 311 с.

Лебедев Георгий Николаевич – д.т.н., профессор, кафедра «Системы автоматического и интеллектуального управления», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).

Матвеев Михаил Григорьевич – д.т.н., профессор кафедры программирования и информационных технологий, Воронежский государственный университет. Тел. (473) 220-84-70. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Семенов Михаил Евгеньевич – д.ф-м.н., профессор кафедры теоретической гидрометеорологии, Воронежский военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж). Тел. (473) 226-13-66. E-mail: mk150@mail.ru

Канищева Олеся Ивановна – к.ф-м.н. , доцент кафедры математики, Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)

Lebedev Georgy N. – doctor of technical Sciences, Professor, Department of “System auto-political and intellectual control”, Moscow aviation Institute (national research University).

Matveev Mikhail G. – doctor of technical sciences, professor department of programming and information technologies, Voronezh State University. Tel. (473) 220-84-70. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Semenov Mikhail E. – doctor of physics-math. sciences, professor department of theoretical hydrometeorology, Voronesh military aviation engineering university. Tel. (473) 226-13-66. E-mail: mk150@mail.ru

Kanicheva Olesya I. – Cand. of Phys. and math. , associate Professor, Department of mathematics, Military-to-aviation engineering University (the city of Voronezh).