УДК 519.872.1

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

П. Б. Абрамов*, М. А. Чурсин**

* *Военный авиационный инженерный университет*
** *Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета*

Поступила в редакцию 01.04.2012 г.

Аннотация. В статье рассматриваются модели разомкнутых систем массового обслуживания. Сформулировано условие равенства сумм потоков для стационарного режима. Показана устойчивость решения дифференциального уравнения для одноканальной разомкнутой СМО с отказами. Для многоканальных разомкнутых СМО на основе условия Липшица и леммы Ляпунова показано существование и устойчивость решения системы дифференциальных уравнений модели. Предложены пути дальнейшего совершенствования модели.
Ключевые слова: разомкнутая система массового обслуживания, марковская модель, существование решения, устойчивость решения.
Annotation. In article models of the opened mass service systems are considered. The equality condition for sums of streams in a stationary mode is formulated. Stability of the differential equation solution is shown for the one-channel mass service system with refusals. Existence and stability of the decision of the differential equations system, describing the model, is shown for multichannel mass service systems on the basis of Lipshits's condition and Lyapunov's lemma. Ways of further improvement of model are offered.
Keywords: opened mass service system, markovian model, existence of the decision, stability of the decision.

Стремительное развитие систем и сетей передачи информации существенно усложняет анализ подобных систем, при этом в целом ряде случаев классические модели исследования операций не в полной мере отвечают постановке задачи исследования и не обеспечивают требуемой детализации предмета исследования. В частности, общеизвестные модели систем массового обслуживания (СМО) основаны на моделях «гибели и размножения», которые предопределяют некоторую изолированность рассматриваемой системы от внешней среды. Поэтому на основе классических моделей СМО не представляется возможным выполнить, например, анализ потоков обслуженных заявок на выходах отдельных каналов СМО, сравнить загруженность каналов и показатели их функционирования. Кроме того, стыковка различных систем массового обслуживания в рамках классической теории представляет собой серьезную проблему.

Альтернативным подходом к моделированию систем массового обслуживания является применение марковских форм с незамкнутыми (внешними) потоками событий.

Основой наглядного представления модели является граф потоков событий и состояний системы. Для СМО с отказами граф имеет вид, приведенный на рис. 1.

Следует особо отметить, что основой модели, в отличие от классической, являются не вероятности состояний, а потоки событий (заявок). Каждое состояние S_i соответствует одному из каналов СМО. Вероятность P_i для некоторого состояния S_i равна вероятности такого события, что i-й канал занят при условии воздействия на него потока заявок. Несмотря на то, что интенсивности потоков между состояниями λ равны между собой, величина входящего потока для состояния S_i определится как $\Lambda_{i-1,i} = \lambda \cdot P_{i-1}$, и будет уменьшаться от одного канала к другому.

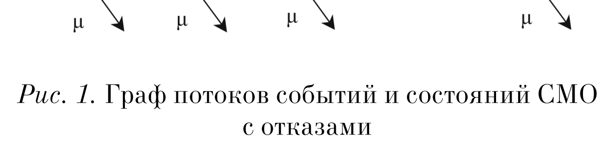

Рис. 1. Граф потоков событий и состояний СМО с отказами

На вероятности состояний не налагается условие равенства их суммы единице. Напротив, для равновесного (стационарного) состояния системы должно быть справедливо условие равенства входящего и суммы выходящих потоков. Выходящий поток заявок, получивших отказ в обслуживании, имеет величину $\Lambda_{>B} = \lambda \cdot P_n$, а обслуженных – величину:

$$\Lambda_{>1A} = \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i. \qquad (1)$$

Следовательно, условие равенства потоков имеет вид:

$$\lambda = \Lambda_{>B} + \Lambda_{>1A} = \lambda \cdot P_n + \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i. \qquad (2)$$

Вместе с тем, сам факт наличия равновесного режима требует отдельного обоснования. Для этого необходимо выполнить анализ системы дифференциальных уравнений, описывающих представленную на рис. 1 модель, и доказать существование, единственность и асимптотическую устойчивость решения данной системы уравнений. В качестве описания динамики системы примем уравнения Колмогорова-Чепмена, составляющиеся по известным правилам. Для учета входящего потока событий достаточно добавить в правой части первого из уравнений положительную постоянную λ. Выходящие из модели потоки учитываются так же, как и прочие выходящие из соответствующего состояния потоки – увеличением суммарной исходящей интенсивности.

Рассмотрим модель одноканальной СМО с отказами. Граф потоков событий и состояний системы приведен на рис. 2.

Динамика этой системы описывается линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dP_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot P_1 + \lambda. \qquad (3)$$

Известно аналитическое решение линейного дифференциального уравнения, к классу которых относится (3), приведенное в литературе [1]. В случае постоянных коэффициентов в правой части оно имеет вид:

$$P_1(t) = C \cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \qquad (4)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования, определяемая из условия $P_1(0) = a$, для рассматриваемой модели $|a| \le 1$.

Доказано, что для любых начальных условий данное решение асимптотически устойчиво, и все решения (4) стремятся к величине

$$\lim_{t \to \infty} P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \qquad (5)$$

что также достаточно просто получить из выражения (3), положив левую часть равной нулю для равновесного состояния.

В выражении (5) мы получили вероятность отказа в обслуживании заявки для одноканальной СМО, с учетом того факта, что отказ происходит в случае, когда канал занят. Отсюда можно получить прочие параметры СМО:

$$P_{>B} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$$
$$q = P_{>1A} = 1 - P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \qquad (6)$$
$$Q = q \cdot \lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Итак, параметры разомкнутой одноканальной СМО с отказами полностью совпадают с результатами классической теории для систем массового обслуживания. Перейдем к рассмотрению многоканальных СМО.

Для многоканальной разомкнутой СМО с отказами (рис. 1) аналитическое описание представляется в виде системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P) + g(t), \qquad (7)$$

где $g(t) = (\lambda \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$, а вектор-функция *f(t,P)* имеет вид:

$$f(t,P) = \begin{bmatrix} -(\lambda+\mu)P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda P_1 & -(\lambda+\mu)P_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda P_2 & -(\lambda+\mu)P_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+\mu)P_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda P_{n-1} & -(\lambda+\mu)P_n \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

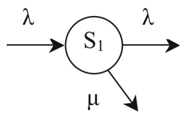

Рис. 2. Граф потоков событий и состояний системы одноканальной СМО с отказами

Из общей теории систем дифференциальных уравнений известно, что если функция $f(t,x)$ непрерывна на некотором открытом множестве G пространства переменных (t,x) и удовлетворяет условию Липшица по x на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в множестве G, то, какова бы ни была точка $(x_0, y_0) \in G$, существует решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (7), определенное в некоторой окрестности точки t_0 и удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Покажем, что для вектор-функции (8) это условие выполняется. Рассмотрим модули частных производных

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial P_k}\right|, \text{ где } i,\ k = 1, 2,\ldots,n.$$

Легко установить, что

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial P_k}\right| \le \lambda + \mu = L. \qquad (9)$$

Тогда, как показано в [2], для случая ограниченных сверху частных производных, имеют место соотношения:

$$\left|f_i(t,P') - f_i(t,P'')\right| \le n \cdot L \cdot |P' - P''| \qquad (10)$$

и

$$\left|f(t,P') - f(t,P'')\right| \le n^{3/2} \cdot L \cdot |P' - P''|. \qquad (11)$$

С учетом (9) получим:

$$\left|f(t,P') - f(t,P'')\right| \le n^{3/2} \cdot (\lambda + \mu) \cdot |P' - P''|. \qquad (12)$$

Полагая постоянную Липшица $K = n^{3/2} \cdot (\lambda + \mu)$, приходим к неравенству:

$$\frac{\left|f(t,P') - f(t,P'')\right|}{|P' - P''|} \le K. \qquad (13)$$

Следовательно, условие Липшица выполнено, и решение рассматриваемой системы уравнений существует. Более того, при условии непрерывности функции $f(t,P)$ на некотором открытом множестве G пространства переменных (t,P) и выполненном условии Липшица на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в множестве G, как известно, решение системы (7) не только существует, но и является единственным.

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что для предложенной модели СМО всегда существует единственное решение задачи Коши, и факт его существования не зависит от начальных условий и количества каналов n в рассматриваемой модели системы массового обслуживания.

Теперь покажем, что решение $f(t,P)$ системы уравнений (7) обладает свойством устойчивости.

Устойчивость решения системы линейных дифференциальных уравнений по Ляпунову (асимптотическая) достигается тогда и только тогда [3], когда является устойчивым по Ляпунову (асимптотически) тривиальное решение $P \equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dP}{dt} = f(t,P). \qquad (14)$$

Для доказательства устойчивости решения воспользуемся леммой Ляпунова для однородных систем. Согласно условиям леммы, правая часть системы (14) должна быть определена и непрерывна, кроме того, модуль вектора переменных P должен быть ограничен сверху $|P| \le r$, где r – некоторая произвольная постоянная. Все эти свойства вектора переменных следуют из физического существа задачи и метода построения модели. Действительно, каждое из состояний, рассматриваемое по отдельности, подчиняется выражениям (3)–(5). Из выражения (4) следует непрерывность и монотонность функций P_i, а выражение (5) определяет, что каждая из переменных P_i асимптотически стремится к величине, строго меньшей единицы. Таким образом, при начальных условиях $P_i = 0$, вполне отвечающих начальному моменту функционирования СМО, условия леммы Ляпунова являются выполненными.

Условия теорем существования и единственности, как показано выше, также выполнены. Тогда, если найдется такая неотрицательная функция $V(P)$ класса C^1, обращающаяся в нуль только при $P = 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(P)}{\partial P_i} f_i(P) \le 0, \qquad (15)$$

то решение $P \equiv 0$ системы уравнений (14) устойчиво по Ляпунову. Если, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(P)}{\partial P_i} f_i(P) \le -W(P), \qquad (16)$$

где $W(P) \geq 0$ — некоторая непрерывная функция, обращающаяся в нуль только при $P = 0$, то решение $P \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Вновь обращаясь к выражениям (4) и (5), приходим к выводу о том, что при начальных условиях $P_i = 0$ и положительной асимптотике каждая из переменных P_i является положительной величиной на всей области определения. Об этом же свидетельствует анализ динамики поведения этих величин. Действительно, допустим, что в некоторый момент t_1 переменная $P_i(t_1)$ примет значение $P_i(t_1) = 0$. Тогда величина всех исходящих из состояния S_i потоков $\lambda \cdot P_i(t_1) = \mu \cdot P_i(t_1) = 0$. Это приведет к тому, что в последующие моменты $t > t_1$ уменьшение величины P_i в сторону отрицательных значений невозможно.

Данные предпосылки позволяют определить функцию $V(P)$ в виде:

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} P_i. \tag{17}$$

Функция $V(P)$ является при этом непрерывной, дифференцируемой и неотрицательной на всей области определения.

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial V(P)}{\partial P_i} = 1 \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(P)}{\partial P_i} f_i(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P). \tag{18}$$

Следовательно, для вычисления критериальной функции в левой части выражений (15) и (16) достаточно просуммировать элементы матрицы вектор-функции (8). Легко видеть, что при суммировании каждого из столбцов матрицы члены $\lambda \cdot P_i$ встречаются как с положительным, так и с отрицательным знаком, то есть, взаимно уничтожаются. Окончательно получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(P)}{\partial P_i} f_i(P) = -\mu \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i. \tag{19}$$

Теперь в выражении (16) функция $W(P)$ может быть определена как

$$W(P) = \mu \cdot P_{i\max} - \varepsilon, \tag{20}$$

где $P_{i\max} = \max_{\forall i \in \overline{1,n}} P_i$, для любого t; ε – сколь угодно малая величина, $0 \leq \varepsilon \leq P_{i\max}$, которая в общем случае может зависеть от времени и равная нулю в момент времени $t = 0$.

Поскольку справедливы утверждения $(P_i(t) \geq 0 \mid \ \forall P_i \in P)$ и $(P_i(0) = 0 \mid \ \forall P_i \in P)$, постольку справедливы и утверждения $(W(P)\big|_{t\neq 0} \geq 0)$ и $(W(P)\big|_{t=0} = 0)$.

Таким образом, введенная согласно (20) функция $W(P)$ вполне отвечает требованиям, предъявляемым к ней условиями леммы Ляпунова.

На основании анализа (19) и (20) можно сделать вывод о том, что выполняются соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(P)}{\partial P_i} f_i(P) = \\ = -\mu \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i \leq -\mu \cdot P_{i\max} + \varepsilon = -W(P). \tag{21}$$

Более того, сравнение условия (16) и неравенства (21) позволяет утверждать, что величина ε может быть принята даже тождественно равной нулю $\varepsilon \equiv 0$, что также обеспечит выполнение условия (16), при этом для некоторых интервалов времени – по признаку равенства.

Итак, можно сделать вывод об асимптотической устойчивости решения однородной системы уравнений (14), и, как следствие, об асимптотической устойчивости решения линейной системы дифференциальных уравнений (7) для многоканальной СМО с отказами.

С учетом выражений (4) и (5) для одного из каналов СМО, определяющих асимптотическое стремление процесса к равновесному состоянию, и принимая во внимание отсутствие в графе потоков событий и состояний системы обратных связей, которые могли бы определять влияние последующих каналов системы на предыдущие, окончательно приходим к выводу об асимптотической сходимости решения системы (7) к некоторому равновесному состоянию, не зависящему от времени. Для нахождения равновесного состояния достаточно решить систему алгебраических уравнений, положив в выражении (7) левую часть равной нулю.

Подводя итог выше изложенному, отметим несколько направлений дальнейшего развития рассмотренной модели.

1. В отличие от классической модели СМО, рассмотренная модель позволяет учесть несколько потоков заявок, воздействующих на входы различных каналов. Для этого требуется лишь изменить соответствующим образом вид вектор-функции $g(t)$, что не влияет на существование и устойчивость решения.

2. В рамках рассмотренного подхода легко учесть различную производительность каналов

обслуживания. Достаточно присвоить различные значения величинам μ_i для разных каналов. Более того, в случае дисциплины обслуживания заявок, отличной от марковской, для каждого канала с интенсивностью обслуживания μ_i возможно определение соответствующей интенсивности простейшего потока $\mu_i{}' \approx K_{\text{м}} \cdot \mu_i$, на основе метода расширения пространства состояний, с учетом порядка аппроксимирующего потока Эрланга $K_{\text{м}}$.

3. Вполне очевидно представление многофазных систем массового обслуживания на основе рассмотренной модели. Для этой цели потоки обслуженных заявок с интенсивностями μ_i необходимо объединить и подать поток суммарной интенсивности $\lambda' = \sum_i \mu_i$ на вход аналогичной модели, отображающей вторую фазу обслуживания СМО. Равновесное состояние для каждой фазы СМО может быть определено по отдельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, – 589 с.

2. *Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб: Изд-во СПбГУ, 1992, – 239 с.

3. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, – 288 с.

Абрамов Петр Борисович – кандидат технических наук, доцент. Военный авиационный инженерный университет, Воронеж. Тел. 8-903-650-16-20. E-mail: abpostbox58@mail.ru

Чурсин Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент, Воронежский филиал Российского Государственного торгово-экономического университета

Abramov Petr Borisovitch – Candidate of Technical Sciences, Military aviation engineering university, Voronezh. Tel. 8-903-650-16-20. E-mail: abpostbox58@mail.ru

Chursin Mickail Aleksandrovitch – Candidate of Technical Sciences, Voronezh branch of Russian State trade and economic University