

# МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ В МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. М. Камачкин\*, В. Н. Шамберов\*\*

\* Санкт-Петербургский государственный университет

\*\* Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Поступила в редакцию 02.03.2012 г.

**Аннотация.** В работе предлагается аналитически точный метод отыскания в пространстве параметров нелинейных многомерных динамических систем областей, для которых в пространстве состояний систем существуют периодические решения.

**Ключевые слова:** динамическая система, пространство параметров, каноническое преобразование, декомпозиция, математическая структура, периодическое решение.

**Annotation.** The present work offers the analytically strong method for researching into the space of parameters the multi-space non-linear dynamical systems' areas for which in the space of parameters there exist periodical solutions.

**Keywords:** dynamic system, parameter space, decomposition, canonical transformation, mathematic structure, periodic solution.

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории нелинейных динамических систем непосредственно связано с применением точных аналитических методов исследования. Основное достоинство строгого анализа – это представление решения посредством математического выражения – обобщающей идеи, позволяющей перейти на более глубокий уровень понимания поведения системы (получить новую информацию о системе и выработать допускающие обобщения концепции).

Однако налицо и ограниченность такого метода, связанная со сложностью динамического поведения многомерных нелинейных систем. Универсальным методом исследования можно было бы считать численные методы исследования с привлечением мощных средств вычислительной техники, если бы они (эти методы) обладали достаточной общностью и абсолютной достоверностью представления результатов.

Предлагаемый в работе метод позволяет, в некоторой степени, преодолеть этот барьер, дав исследованию предварительную информацию (полученную на основе точных аналитических методов) о динамическом поведении системы для определенной области значений ее параметров (коэффициентов).

Объектом рассмотрения в работе являются находящиеся под внешним воздействием многомерные динамические системы – математические модели систем автоматического управления, в которых по условиям эксплуатации необходимо учитывать нелинейные зависимости

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \mathbf{A} \cdot \bar{x} + \mathbf{B} \cdot [\mathbf{v} + \psi(t)], \\ \mathbf{v} &= \mathbf{N}(\mathbf{y}), \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \bar{x}. \end{aligned} \quad (1)$$

В описании (1) под матрицей  $\mathbf{A}$  (вещественная матрица размерности  $n \times n$ ) понимается матрица состояния некоторого объекта управления, под матрицами  $\mathbf{B}$  (вещественная матрица размерности  $n \times m$ ) и  $\mathbf{C}$  (вещественная матрица размерности  $m \times n$ ) понимаются матрица управления объектом и матрица наблюдения за объектом соответственно. При этом  $\bar{x}(t)$  – вектор переменных состояния объекта (размерности  $n \times 1$ ),  $\mathbf{v}(t)$  – вектор управления (размерности  $m \times 1$ ) и  $\mathbf{y}(t)$  – вектор наблюдения за объектом (размерности  $m \times 1$ ). Управление объектом задается вектором столбцом  $\mathbf{N}(\mathbf{y})$  неоднозначных нелинейных функций  $v_1(t) = n_1[y_1(t)]$ ,  $v_2 = n_2[y_2(t)]$ , ...,  $v_m = n_m[y_m(t)]$ ;  $\psi(t) = \psi_0 + \sum_{\rho=1}^s \psi_\rho \sin(\rho\omega t + \varphi_\rho)$  – внешнее возмущающее воздействие, где  $\psi_0$ ,  $\psi_\rho$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_\rho$  – параметры воздействия.

Задача исследования состоит в аналитическом отыскании вынужденных периодических

движений в пространстве состояний рассматриваемых систем. Поставленная задача решается методом построения неособого канонического преобразования  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t)$ , приводящего матрицу  $\mathbf{A}$  к жордановой форме  $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ , а матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – к определенному виду  $\mathbf{B}_m = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_m = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}$ , которые в результате декомпозиции приводятся к блочной форме.

Под декомпозицией системы в работе понимается расщепление преобразованной системы как организованного целого на подсистемы в зависимости от целей анализа, связанного с характером решаемой задачи.

Декомпозиция системы осуществляется таким образом, чтобы каждая подсистема могла быть полностью исследована аналитически. Динамика исходной системы при этом рассматривается и анализируется не для всего пространства изменяемой части параметров, а лишь для параметров, принадлежащих определенным областям их значений – декомпозициям пространства параметров (ДПП) – совокупности значений параметров исходной системы, при которых подсистемы в преобразованной системе не образуют замкнутую динамическую систему.

Количество ДПП, а также их расположение в пространстве параметров определяется заданной (неизменяемой) частью параметров системы (в основном, элементов матрицы  $\mathbf{A}$ ).

Вынужденные периодические движения в пространстве состояний исходной системы могут быть получены по движениям в пространстве состояний преобразованной системы в соответствии с применяемым преобразованием.

### ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ

Исторически канонические преобразования для нелинейных задач теории автоматического управления и регулирования применялись для авторегулируемых систем с одним нелинейным элементом [1–4] и без учета возможного внешнего периодического воздействия, являющихся частным случаем рассматриваемой системы

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}v, y = \langle \mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}} \rangle, v = N(y), \quad (2)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}; \mathbf{c}^B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

В описании (2), в отличие от описания (1),  $\mathbf{b}$  – действительная матрица размерности  $(n \times 1)$ ;  $\mathbf{c}$  – действительная матрица размерности  $(1 \times n)$ ;  $v$  – скалярная переменная управления объектом;  $y$  – скалярная переменная наблюдения за объектом. Управление объектом при этом задается нелинейной функцией  $N(y)$ . В структурном виде такая система представлена на рисунке 1-а.

Для целей исследования систему (2) преобразованием  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t)$  необходимо привести (например, для случая простых (ненулевых) собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ ) к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \Lambda \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}v, y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle, v = N(y), \quad (3)$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}; \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \\ \dots \\ b_{m_n} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}_m^B = \begin{bmatrix} c_{m_1} \\ c_{m_2} \\ \dots \\ c_{m_n} \end{bmatrix}.$$

В описании (3) матрицы получены в результате преобразования  $\Lambda = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}$ , при этом в системе исчезают  $n(n-1)$  связей (в матрице  $\mathbf{A}$   $n(n-1)$  коэффициентов принимают нулевые значения). В структурном виде системы (2) и (3) представлены на рисунке 1.

1. Наиболее известно преобразование [5–7], при котором матрица  $\mathbf{M}$  определяется в результате разложения на элементарные дроби передаточных функций переменных вектора  $\mathbf{x}$  по входу (переменная  $v$ ). Основой преобразования является переходная (фундаментальная) матрица состояния  $\Phi(p) = [p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ .

Суть получения матрицы  $\mathbf{M}$  в следующем. После преобразования по Лапласу для системы (2) можно записать

$$\bar{\mathbf{X}}(p) = \mathbf{W}(p)V(p), \text{ или}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1(p) \\ \bar{X}_2(p) \\ \dots \\ \bar{X}_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(p) \\ W_2(p) \\ \dots \\ W_n(p) \end{bmatrix} \cdot V(p),$$

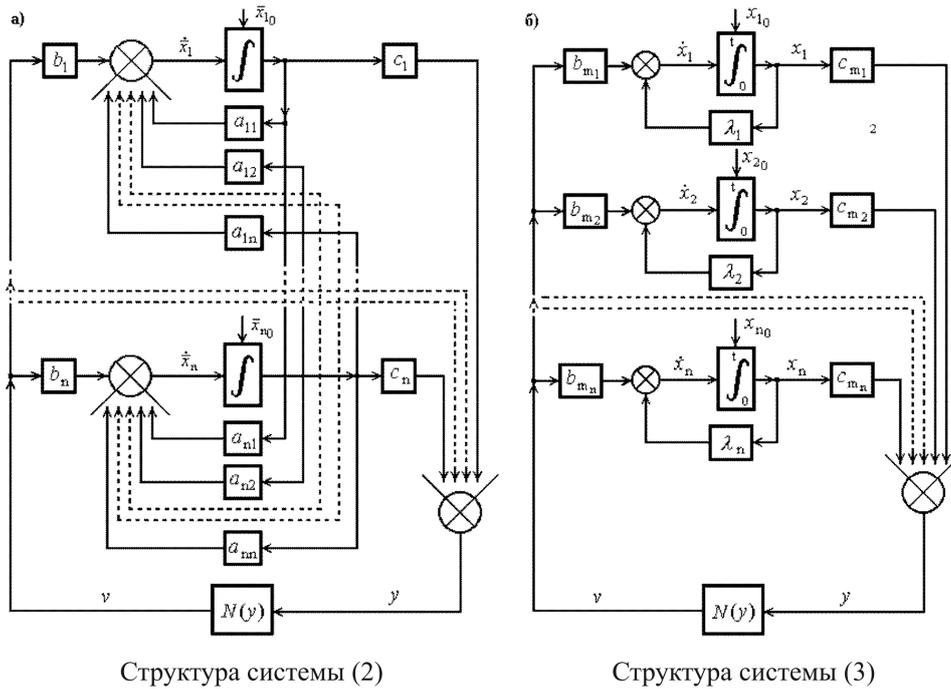


Рис. 1. Математические структуры систем (2) и (3)

где матричная передаточная функция

$$W(p) = \Phi(p) \cdot \mathbf{b} = \frac{Adj[p\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{b}}{D(p)} = \begin{bmatrix} \frac{N_1(p)}{D(p)} \\ \frac{N_2(p)}{D(p)} \\ \dots \\ \frac{N_n(p)}{D(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(p) \\ W_2(p) \\ \dots \\ W_n(p) \end{bmatrix}.$$

При этом  $N_k(p) = \sum_{i=1}^n D_{ki}(p)b_i$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$D_{ki}(p)$  –  $k, i$  – элемент присоединенной матрицы  $Adj[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ ;  $D(p)$  – характеристический полином преобразуемой части.

Разложив передаточные функции  $W_k(p) = N_k(p)/D(p)$  на элементарные дроби в виде

$$W_k(p) = \frac{N_k(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{N_k(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{(p - \lambda_i)},$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $D'(\lambda_i) = \left[ \frac{dD(p)}{dp} \right]_{p=\lambda_i}$  и обозначив  $V(p)/(p - \lambda_i) = X_i(p)$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

получим матрицу  $\mathbf{M}$  преобразования  $\bar{\mathbf{X}}(p) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}(p)$ ,  $\mathbf{X}(p) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{X}}(p)$  в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \frac{N_1(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} & \dots & \frac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \frac{N_2(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \frac{N_2(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} & \dots & \frac{N_2(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \frac{N_n(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} & \dots & \frac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{bmatrix}.$$

Ограничения на данное преобразование следующие: 1) система (2) должна обладать свойством полной управляемости по входу  $v(t)$ , т.е. должно выполняться условие Р. Е. Калмана  $\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \neq 0$ ; 2) для системы (2) необходимо считать  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ , ...,  $x_n(0) = 0$ .

Особенностью данного преобразования является то, что элементы матрицы-столбца  $\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b}$  всегда равны единице (или могут быть приведены к единице), элементы матрицы  $\mathbf{c}_m$  определяются в соответствии с преобразованием  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}$  и могут принимать любые значения в зависимости от значений элементов матрицы  $\mathbf{c}$ . Преобразование эквивалентно только по отношению к движениям, получаемым при  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ , ...,

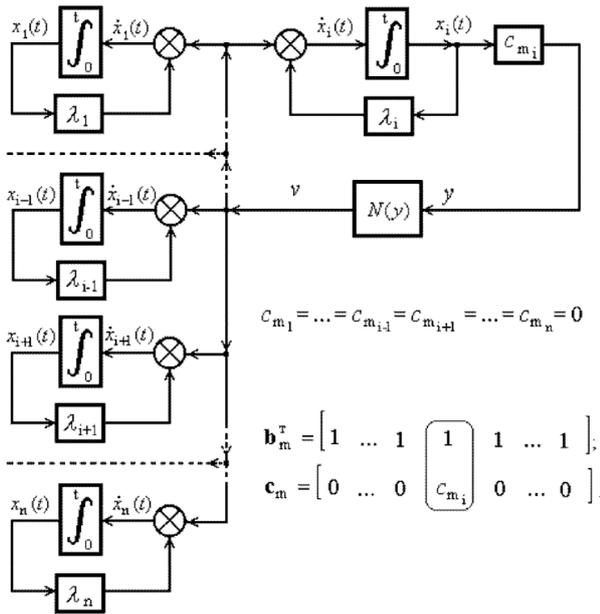


Рис. 2. Математическая структура системы (2) в условиях декомпозиции после канонического преобразования на основе переходной матрицы

$x_n(0) = 0$ , что связано с преобразованием Лапласа. При таком преобразовании системы (1) при отрицательных значениях собственных чисел матрицы **A** можно получить  $n$  декомпозиций вида

$$C_1 = \dots = C_{i-1} = C_{i+2} \dots = C_n = 0, \quad (4)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

В структурном виде система (2) в условиях декомпозиции (4) представлена на рисунке 2.

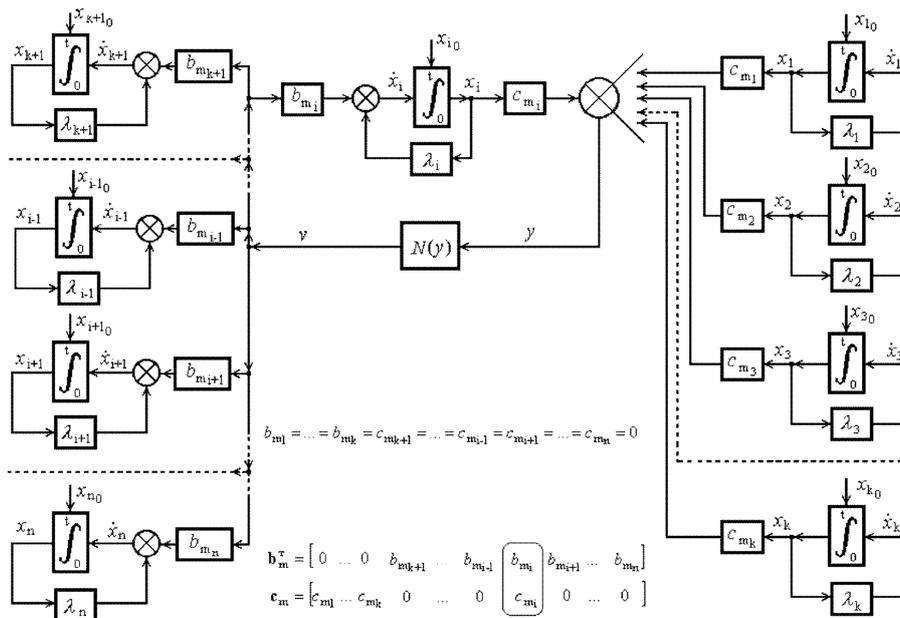


Рис. 3. Математическая структура системы (2) в условиях декомпозиции после канонического преобразования на основе матрицы Вандермонда

Если в исходной системе (2) среди собственных чисел матрицы **A** одно положительное (или нулевое), то возможна только одна декомпозиция (4). Если среди собственных чисел матрицы **A** более одного положительного (или нулевого), то применить декомпозицию невозможно.

2. Другим известным преобразованием стало преобразование [5–7], основанное для случая простых (ненулевых) собственных чисел матрицы **A** на применении матрицы Вандермонда. При этом матрица преобразования **M** получалась, как

$$M = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \lambda_1^0 & k_2 \lambda_2^0 & \dots & k_n \lambda_n^0 \\ k_1 \lambda_1^1 & k_2 \lambda_2^1 & \dots & k_n \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 \lambda_1^{n-1} & k_2 \lambda_2^{n-1} & \dots & k_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – любые (ненулевые) вещественные числа.

Для исследования динамики системы (2) при отрицательных собственных числах матрицы **A** можно получить  $2n(n-1)$  декомпозиций. Одна из декомпозиций представлена на рисунке 3.

При использовании данного преобразования (в отличие от предыдущего), элементы матрицы-столбца  $\mathbf{b}_m$  и элементы матрицы-строки  $\mathbf{c}_m$ , определяемые в соответствии с преобразованием  $\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}$ , могут принимать любые значения в зависимости от значений элементов матриц  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Преобразование (также в отличие от предыдущего) является эквивалентным для любых движений в системе (1) в том числе и для движений, получаемых при  $x_1(0) \neq 0$ ,  $x_2(0) \neq 0$ ,  $x_3(0) \neq 0$ , ...,  $x_n(0) \neq 0$ .

Если в системе (2) среди  $n$  собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$  одно положительное (или нулевое), то возможно только  $2(n - 1)$  декомпозиций рассмотренного вида. Если в исходной системе (2) среди собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$  более одного положительного (нулевого), то применить декомпозицию невозможно.

Ограничением на данное преобразование является предъявляемое к матрице состояния  $\mathbf{A}$  требование, чтобы матрица состояния  $\mathbf{A}$  являлась матрицей Фробениуса.

### ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для решения поставленной задачи необходимо применять преобразование свободное от ограничений, налагаемых на предыдущие преобразования. Таким преобразованием является преобразование, при котором столбцы матрицы канонического преобразования  $\mathbf{M}$  могут быть выбраны пропорционально столбцам присоединенной матрицы  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Пример.** Исходная система (1) при  $n = 4$  и  $m = 2$  в развернутом виде имеет следующее описание:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1(y_1) + \psi \\ n_2(y_1) + \psi \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}.$$

Преобразованием  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$  ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$ ) при вещественных различных собственных числах матрицы  $\mathbf{A}$  система (5) приводится к канонической форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{V}_m[\mathbf{v} + \psi(t)],$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(\mathbf{y}), \mathbf{y} = \mathbf{C}_m \cdot \mathbf{x},$$

где  $\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{V}_m = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_m = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}$ .

**Примечание.** Матрица канонического преобразования  $\mathbf{M}$  получена на основе присоединенной матрицы  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Преобразованная система в развернутом виде имеет следующее описание

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{m11} & b_{m12} \\ b_{m21} & b_{m22} \\ b_{m31} & b_{m32} \\ b_{m41} & b_{m42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1(y_1) + \psi \\ n_2(y_1) + \psi \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{m11} & c_{m12} & c_{m13} & c_{m14} \\ c_{m21} & c_{m22} & c_{m23} & c_{m24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Выбирая определенным образом значения элементов матриц  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{C}$ , в пространстве параметров (элементов матриц  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}$ ) можно получить (в случае отрицательных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ) 96 декомпозиций, в условиях которых динамическое поведение системы (6) можно рассматривать как динамическое поведение двух независимых подсистем 2-го порядка. При этом среди 96 декомпозиций для пространства параметров системы (1) можно выделить три группы:

1) 24 декомпозиции вида

$$\begin{bmatrix} b_{m11} & b_{m21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m32} & b_{m42} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & c_{m12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{m24} \end{bmatrix}, \quad (7-a)$$

2) 24 декомпозиции вида

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{m21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{m42} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} c_{m11} & c_{m12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{m23} & c_{m24} \end{bmatrix}, \quad (7-b)$$

3) 48 декомпозиций вида

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{m_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m_{32}} & b_{m_{42}} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} c_{m_{11}} & c_{m_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{m_{24}} \end{bmatrix}. \quad (7-в)$$

Таким образом, математическая структура системы (5) в условиях декомпозиции, полученной на основе присоединенной матрицы, имеет вид такой же, как на рисунке 3, но без дополнительных ограничений на матрицу состояния **A**.

Соответствующие описания динамики системы (6) в условиях рассмотренных декомпозиций будут следующими

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_{m_{11}} [n_1(y_1) + \psi(t)]; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_{m_{21}} [n_1(y_1) + \psi(t)], \\ y_1 = c_{m_{12}} x_2; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + b_{m_{32}} [n_2(y_2) + \psi(t)]; \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + b_{m_{42}} [n_2(y_2) + \psi(t)], \\ y_2 = c_{m_{24}} x_4; \end{cases} \quad (8-а)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_{m_{21}} [n_1(y_1) + \psi(t)], \\ y_1 = c_{m_{11}} x_1 + c_{m_{12}} x_2; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3; \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + b_{m_{42}} [n_2(y_2) + \psi(t)], \\ y_2 = c_{m_{23}} x_3 + c_{m_{24}} x_4; \end{cases} \quad (8-б)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_{m_{21}} [n_1(y_1) + \psi(t)], \\ y_1 = c_{m_{11}} x_1 + c_{m_{12}} x_2; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + b_{m_{32}} [n_2(y_2) + \psi(t)]; \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + b_{m_{42}} [n_2(y_2) + \psi(t)], \\ y_2 = c_{m_{24}} x_4; \end{cases} \quad (8-в)$$

Математические структуры системы (7) в условиях декомпозиций (8-а), (8-б), (8-в) представлены соответственно на рисунке 4-а, 4-б, 4-в.

В качестве примера [8–13], рассмотрим систему (6) в условиях декомпозиции (7-а). Приведем уравнения (8-а) к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_{m_{11}} [n_1(y_1) + \psi(t)]; \\ \dot{y}_1 = \lambda_2 y_1 + b_{m_{21}} c_{m_{12}} [n_1(y_1) + \psi(t)]; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + b_{m_{32}} [n_2(y_2) + \psi(t)]; \\ \dot{y}_2 = \lambda_4 y_2 + b_{m_{42}} c_{m_{24}} [n_2(y_2) + \psi(t)], \end{cases} \quad (9-а)$$

где  $\psi(t) = \psi_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ , а нелинейные функции  $n_1(y_1)$  и  $n_2(y_2)$ , представляющие собой трехпозиционный релейный элемент с гистерезисом, отличаются друг от друга значениями положительных параметров  $a, b, c$  (при этом  $b > a$ ), и имеют следующее общее описание

$$n_i(y_i) = \begin{cases} 0, & 5A \leq |y_i| < a_i, \quad 8; \quad 8, \\ 5A \leq a_i \leq |y_i| < b_i & 8 \quad n_{i-}(y_i) = 0; \\ c_i \cdot \text{Sign}(y_i), & 5A \leq |y_i| \geq b_i, \quad 8; \quad 8, \\ 5A \leq a_i \leq |y_i| < b_i & 8 \quad n_{i-}(y_i) \neq 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $i = 1, 2$ ;  $n_{i-}(y_i)$  – предыстория состояния функции.

Решая уравнения движения первой подсистемы (первые два уравнения в (9-а)) на некотором промежутке времени  $[t_i, t_{i+1}]$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$ , получим

$$\begin{aligned} x_1(t_{i+1}) &= x_1(t_i) e^{\lambda_1 t_{i+1}} + \\ &+ e^{\lambda_1 t_{i+1}} b_{m_{11}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\lambda_1 t} \{n_1[y_1(t)] + \psi(t)\} dt; \\ y_1(t_{i+1}) &= y_1(t_i) e^{\lambda_2 t_{i+1}} + \\ &+ e^{\lambda_2 t_{i+1}} b_{m_{21}} c_{m_{12}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\lambda_2 t} \{n_1[y_1(t)] + \psi(t)\} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

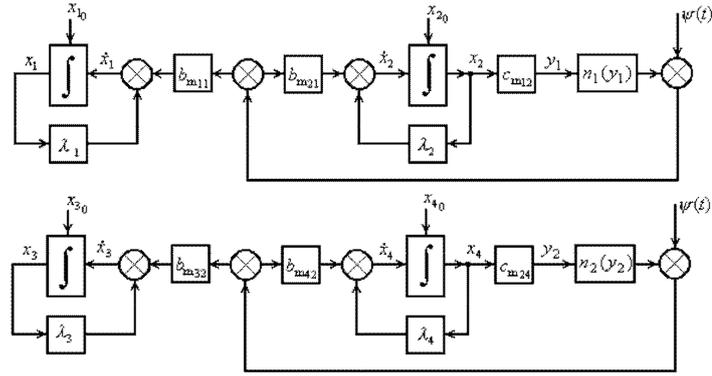
Вынужденному периодическому решению (движению) будут соответствовать различные симметричные последовательности «переключений» релейной функции (10). Эти последовательности переключений дают необходимые условия существования периодических решений с указанным числом переключений.

Зададимся, например, последовательностью переключений а):  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_1 + \tau_2$ ,  $t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ ,  $t_4 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$ . При этом  $y_1(t)$  будет последовательно принимать значения:  $y_1(0) = b_1$ ,  $y_1(\tau_1) = a_1$ ,  $y_1(\tau_1 + \tau_2) = -b_1$ ,  $y_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = -a_1$ ,  $y_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) = b_1$  (представлено на рисунке 5).

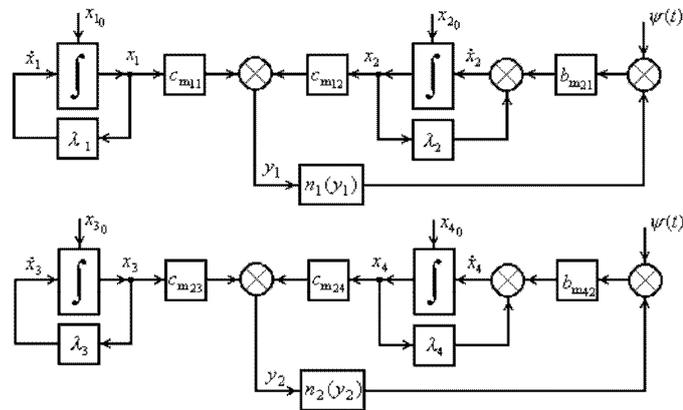
Поскольку функция  $n_1(y_1)$  нечетная, то вынужденному периодическому решению в системе будет соответствовать  $x_1(0) = -x_1(\tau_1 + \tau_2)$ .

Интегрируя 2-е уравнение в (9-а) в соответствии с (11) на промежутке  $[0, t_1]$ , где  $t_1 = \tau_1$  получим

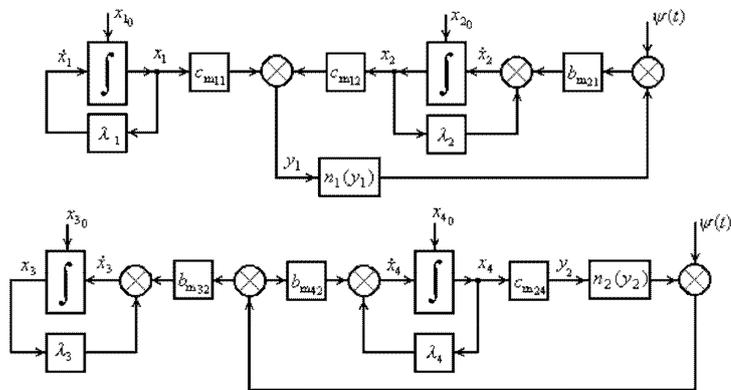
$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \frac{b_{m_{21}} c_{m_{12}} c_1}{\lambda_2} (1 - e^{\lambda_2 \tau_1}) + \frac{b_{m_{21}} c_{m_{12}} \psi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega^2}} \cdot \\ &\cdot [\text{Sin}(\omega \tau_1 + \varphi_1 + \delta) - e^{\lambda_2 \tau_1} \text{Sin}(\varphi_1 + \delta_2)], \end{aligned} \quad (12)$$



а) структурная математическая модель системы (8-а)



б) структурная математическая модель системы (8-б)



в) Структурная математическая модель системы (8-в)

Рис. 4. Математические структуры системы (6) в условиях декомпозиций

где  $\delta_2 = \arctg\left(\frac{\omega}{\lambda_2}\right)$ .

Из уравнения (12) при известных значениях параметров  $\lambda_1, \lambda_2, b_{m11}, b_{m21}, c_{m12}, \psi_1, \omega, \varphi_1, a_1, b_1, c_1$  можно определить значение  $\tau_1$ .

Интегрируя 1-е уравнение (9-а) в соответствии с (11) на промежутке  $[t_0, t_1]$ , где  $t_0 = 0, t_1 = \tau_1$ , получим

$$x_1(\tau_1) = x_1(0)e^{\lambda_1\tau_1} + \frac{b_{m11}c_1}{\lambda_1}(1 - e^{\lambda_1\tau_1}) + \frac{b_{m11}\psi_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}} \cdot [\sin(\omega\tau_1 + \varphi_1 + \delta) - e^{\lambda_1\tau_1}\sin(\varphi_1 + \delta_1)], \quad (13)$$

где  $\delta_1 = \arctg\left(\frac{\omega}{\lambda_1}\right)$ .

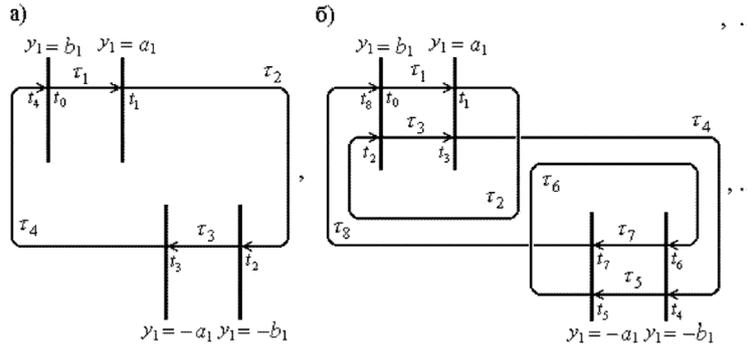


Рис. 5. Задаваемые последовательности переключений релейного элемента

Интегрируя 2-е уравнение (9) в соответствии с (11) на промежутке  $[t_1, t_2]$ , где  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_1 + \tau_2$  получим

$$-b_1 = a_1 + \frac{b_{m_{21}} c_{m_{12}} \psi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \omega^2}} \cdot \{ \text{Sin}[\omega(\tau_1 + \tau_2) + \varphi_1 + \delta] - e^{\lambda_2 \tau_2} \text{Sin}(\omega \tau_1 + \varphi_1 + \delta_2) \}. \quad (14)$$

Из уравнения (13) при полученном значении  $\tau_1$  можно определить  $\tau_1 + \tau_2$ .

Интегрируя 1-е уравнение (9-а) в соответствии с (11) на промежутке  $[t_1, t_2]$ , где  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_1 + \tau_2$ , получим

$$x_1(\tau_1 + \tau_2) = x_1(\tau_1) e^{\lambda_1(\tau_1 + \tau_2)} + \frac{b_{m_{11}} \psi_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \omega^2}} \{ \text{Sin}[\omega(\tau_1 + \tau_2) + \varphi_1 + \delta] - e^{\lambda_1 \tau_2} \text{Sin}(\omega \tau_1 + \varphi_1 + \delta_1) \}. \quad (15)$$

По уравнениям (13) и (15) может быть построен график функции последования  $\Phi_1[x_1(\tau_1), x_1(\tau_1 + \tau_2)] = 0$  (представлен на рисунке 6). Заменяя в (11) – (15)  $x_1, \lambda_1, \lambda_2, b_{m_{11}}, b_{m_{21}}, c_{m_{12}}, a_1, b_1, c_1$  соответственно на значения параметров  $x_3, \lambda_3, \lambda_4, b_{m_{32}}, b_{m_{42}}, c_{m_{24}}, a_2, b_2, c_2$ , получим другую функцию последования  $\Phi_2[x_3(\tau_1), x_3(\tau_1 + \tau_2)] = 0$  для второй подсистемы (третье и четвертое уравнения в (9-а)).

Вынужденные периодические движения с заданной последовательностью переключений релейного элемента и периодом равным  $2(\tau_1 + \tau_2)$  существуют: 1) в первой подсистеме (9-а), когда функция  $\Phi_1[x_1(\tau_1), x_1(\tau_1 + \tau_2)] = 0$  в координатах  $x_1(0), -x_1(\tau_1 + \tau_2)$  пересекает биссектрису координатного угла; 2) во второй подсистеме (9-а), когда график функции  $\Phi_2[x_3(\tau_1), x_3(\tau_1 + \tau_2)] = 0$  в координатах  $x_3(0),$

$-x_3(\tau_1 + \tau_2)$  пересекает биссектрису координатного угла.

Полученные условия на параметры исходной системы теперь дают нам достаточные условия существования периодического решения заданного вида.

Характер пересечения определяет устойчивость периодического движения. Зная условия существования периодических движений в каждой из подсистем (9-а), можно, используя вычислительные средства для численного интегрирования, получить эти движения в координатном виде:  $x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), x_4^*(t)$ . Движения, полученные для системы (6) являются составляющими движений в системе (5) согласно преобразованию  $\bar{x} = M \cdot x^*$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время, как никогда прежде, стали актуальными вопросы точности и достоверности математического моделирования. Практика настоятельно требует применения таких моделей и таких методов решения, которые могут гарантировать необходимую и достаточную надежность результатов. Абсолютную

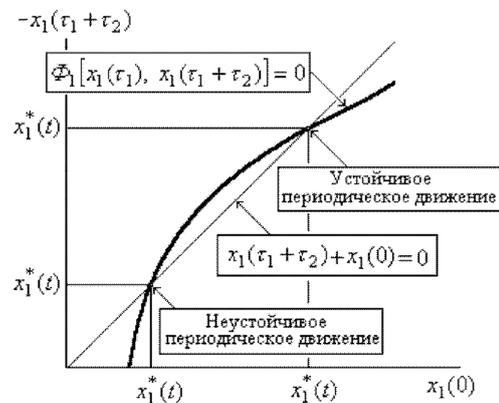


Рис. 6 Диаграмма Кёнигса–Ламерия

надежность результатов математического моделирования обеспечивают только точные аналитические методы. Широкое применение численных методов исследования выявило не только их бесспорные преимущества, но и присущие им недостатки, к которым в первую очередь относится невозможность надежной оценки расчетных результатов.

По мнению авторов, эффективное исследование многомерных нелинейных динамических систем возможно при разумном (корректном) сочетании точных аналитических методов исследования с любыми другими методами.

Предложенный подход позволяет эффективно использовать накопленный опыт изучения аналитическими методами нелинейных динамических систем невысокого порядка для исследования динамических систем высокого порядка, осуществляемого, как правило, средствами вычислительного эксперимента.

При необходимости синтеза систем с параметрами, при которых их нельзя рассматривать в условиях декомпозиции, полученные результаты, могут использоваться как тестовые, позволяющие провести необходимые исследования другими методами более эффективно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Современные проблемы механики. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования : монография. – М. – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951. – 216 с.

2. *Троицкий В. А.* О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования / В. А. Троицкий // ПММ. – 1953. – Т. 17. – Вып. 1. – С. 49–60.

3. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем : монография / А. М. Летов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 483 с.

**Камачкин Александр Михайлович** – д. физ.-мат. наук, профессор. Факультет прикладной математики – процессов управления. Санкт-Петербургский государственный университет. Тел.: 8-911-278-96-65. E-mail: akamachkin@mail.ru

**Шамберов Владимир Николаевич** – к. техн. наук, доцент, Факультет корабельной энергетики и автоматики, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет (кораблестроительный институт). Тел.: 8-911-960-67-38. E-mail: shamberov@mail.ru

4. *Нелепин Р. А.* Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем (с примерами из судовой автоматики) монография / Р. А. Нелепин. – Л.: Судостроение, 1967. – 447 с.

5. *Петров В. В.* Нелинейные сервомеханизмы : монография / В. В. Петров, А. А. Гордеев. – М.: Машиностроение, 1979. – 471 с.

6. *Дерусо П.* Пространство состояний в теории управления (для инженеров): монография / П. Дерусо, Р. Рой, Ч. Клоуз; пер. с англ. Р. Т. Янушевского; под ред. М. В. Меерова, – М.: Наука, 1970. – 620 с.

7. *Parskevopoulos P. N.* Modern control engineering.: монография / P. N. Parskevopoulos; – New York, 2002. – 735 с.

8. Алгоритмический синтез нелинейных систем управления : монография / Р. А. Нелепин, А. М. Камачкин, И. И. Туркин, В. Н. Шамберов; под ред. Р. А. Нелепина. – Л.: ЛГУ, 1990. – 240 с.

9. *Камачкин А. М.* Динамика систем управления с неоднозначными нелинейностями при периодических внешних воздействиях : автореф. дис. докт. физ.-мат. наук / А. М. Камачкин. – СПб.: СПбГУ, 1993. – 30 с.

10. *Камачкин А. М.* Существенно нелинейные автоматические системы : учебное пособие / А. М. Камачкин, В. Н. Шамберов. – СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 1995. – 74 с.

11. *Шамберов В. Н.* Исследование вынужденных периодических движений в автоматических системах управления с негулоновским трением / В. Н. Шамберов // Процессы управления и устойчивость: труды 31 научной конференции факультета ПМ-ПУ. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. – С. 267–269.

12. *Камачкин А. М.* Отыскание периодических решений в нелинейных динамических системах : учебное пособие / А. М. Камачкин, В. Н. Шамберов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002, 88 с.

13. *Евстафьева В. В.* Управление динамикой гистерезисной системы с внешним воздействием / В. В. Евстафьева, А. М. Камачкин // Прикладная математика, информатика, процессы управления: вестник СПбГУ – 2004, серия 10, Вып. 1–2. – С. 101–109.

**Kamachkin Alexander M.** – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Applied Mathematics - Control Processes, Saint-Petersburg State University. Tel.: 8-911-278-96-65 . E-mail: akamachkin@mail.ru

**Shamberov Vladimir N.** – Cand. Tech. Sci., Department of Naval Energy and Automation. Saint-Petersburg State Marine Technical University. Tel.: 8-911-960-67-38 E-mail: shamberov@mail.ru