

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ «БОЛТАНКИ» РЕШЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМА «СКРУЧИВАНИЯ» С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ

Е. Ю. Рыжков

Воронежский Государственный Университет

Поступила в редакцию 20.04.2012 г.

Аннотация. В работе с помощью метода точечных преобразований находится область «болтанки» решения для одного из скользящих режимов второго порядка с запаздыванием в управлении. Найдены значения параметров управления, при которых имеет место сходимость решения в область «болтанки», и получено уравнение, описывающее границу данной области.

Ключевые слова: метод точечных преобразований, область «болтанки», скользящий режим второго порядка, алгоритм «скручивания», запаздывание в управлении, параметры управления, сходимость.

Annotation. In the article it is described how to determine the chattering area of the solution for one of the second order sliding mode with time delay in control using the method of point-wise transformations. The control parameter values under which finite-time convergence takes place are found. The equation precisely describing the form of the chattering area of the solution is presented.

Key words: method of point-wise transformations, chattering area, second order sliding mode, twisting algorithm, time delay in control, control parameters, convergence.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ввиду своей полезности и простоты реализации, большой популярностью пользуются скользящие режимы управления. Важной особенностью скользящего режима является возможность управления объектом в условиях неопределенности.

Множество научных работ посвящено исследованию скользящих режимов, правда, в основном все работы связаны с исследованием так называемого идеального скользящего режима. Однако в реальных системах устройства, осуществляющие скачкообразное изменение функции управления, всегда обладают малыми неидеальностями, главная из которых - *запаздывание*. Появление запаздывания в управлении приводит к тому, что объект будет совершать колебания в некоторой конечной окрестности требуемого положения. Эта окрестность носит название *область «болтанки»* (от англ. chattering).

Статья посвящена нахождению области «болтанки» и определению параметров управления, при которых имеет место сходимость решения в данную область.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему управления вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x(t), y(t)) + \\ + g(t, x(t), y(t))u(x(t-h(t)), y(t-h(t))) \end{cases} \quad (1)$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ – переменные состояния, $f(t, x, y)$ – неизвестная, но ограниченная функция, описывающая внешние возмущения и неопределенности системы, $g(t, x, y)$ – функция, описывающая коэффициент усиления обратной связи, $h(t)$ – функция, характеризующая запаздывание в системе, $u \in \mathbb{R}$ – скользящее управление второго порядка:

$$u(x, y) = -r_1 \text{sign}[x] - r_2 \text{sign}[y], \quad (2)$$

где $r_1, r_2 > 0$ – параметры управления, и оператор sign определен в виде:

$$\text{sign}[x] = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Данный алгоритм управления известен как алгоритм «скручивания». Предполагается, что:

$$f(t, x, y) \leq C, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ и } \forall t \geq 0 \quad (4)$$

$$0 < \alpha \leq g(t, x, y) \leq \beta, \forall x, y \in R \text{ и } \forall t \geq 0 \quad (5)$$

$$0 \leq h(t) \leq h_{\max}, \forall t \geq 0 \quad (6)$$

где $C, \alpha, \beta, h_{\max}$ – известные константы.

3. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ

Попытаемся оценить влияние запаздывания на решение системы (1). Оно будет проявляться при переходе решения через оси координат, так как на других участках $sign[x(t)]$ совпадает с $sign[x(t-h(t))]$ и $sign[y(t)]$ с $sign[y(t-h(t))]$.

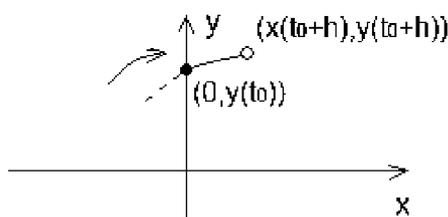


Рис. 1. Переход решения через ось y

Рассмотрим случай, когда решение пересекает ось y . Сперва предположим, что решение пересекает ось y в момент времени t_0 и $y(t_0) > 0$. Учитывая специфику алгоритма управления, до момента переключения управления \ddot{x} будет неотрицательной величиной при условии, что выполнено:

$$r_1 > r_2 + \frac{C}{\alpha} \quad (7)$$

Данное условие является одним из необходимых условий сходимости. Далее предполагается, что оно выполнено.

Так как известно управление на данном участке, то из системы (1) и оценок (4), (5) мы можем оценить величину \ddot{x} до момента переключения следующим образом:

$$0 < -C + \alpha(r_1 - r_2) \leq \ddot{x}(t) \leq C + \beta(r_1 - r_2) \quad (8)$$

Интегрируя данное выражение на промежутке от t_0 до t , получаем следующую оценку для координаты $y(t) = \dot{x}(t)$:

$$y(t_0) + (t - t_0)(-C + \alpha(r_1 - r_2)) \leq \dot{x}(t) \leq y(t_0) + (t - t_0)(C + \beta(r_1 - r_2)) \quad (9)$$

Проинтегрировав на данном промежутке еще раз, получим оценку для координаты $x(t)$:

$$x(t) \geq y(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}(-C + \alpha(r_1 - r_2)) \quad (10)$$

$$x(t) \geq y(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}(C + \beta(r_1 - r_2)). \quad (11)$$

Таким образом, при движении по траектории минимально (из всех возможных) удаленной от центра координат, объект спустя максимальное время запаздывания h_{\max} попадет в положение:

$$\begin{aligned} x_M(t_0 + h_{\max}) &= y(t_0)h_{\max} + \\ &+ \frac{h_{\max}^2}{2}(-C + \alpha(r_1 - r_2)), \\ y_M(t_0 + h_{\max}) &= y(t_0) + \\ &+ h_{\max}(-C + \alpha(r_1 - r_2)). \end{aligned} \quad (12)$$

Умножим второе уравнение на h_{\max} и вычтем его из первого:

$$x_M = hy_M - \frac{h_{\max}^2}{2}(-C + \alpha(r_1 - r_2)). \quad (13)$$

Мы получили, что при произвольном начальном положении $(0, y(t_0))$, объект, двигаясь по наименее удаленной от центра траектории, спустя время максимального запаздывания попадет в точку с координатами (12), которая располагается на прямой (13). Стоит также заметить, что при движении по максимально отдаленной траектории объект будет находиться на прямой:

$$x_M = hy_M - \frac{h_{\max}^2}{2}(C + \beta(r_1 - r_2)) \quad (14)$$

Прямая (14) находится левее прямой (13). Таким образом, при $y(t_0) > 0$ смена управления произойдет до пересечения решения с прямой (13).

Рассматривая по аналогии случай $y(t_0) < 0$ и объединяя результаты, мы находим вид линии, до пересечения с которой гарантировано произойдет смена управления после пересечения решением оси y :

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= x - h_{\max}y + sign[y] \times \\ &\times \frac{h_{\max}^2}{2}(-C + \alpha(r_1 - r_2)) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим случай, когда решение пересекает ось x . Сперва предположим, что решение пересекает ось x в момент времени t_0 и $x(t_0) > 0$.

До момента переключения управления мы можем оценить \ddot{x} следующим образом:

$$-C - \beta(r_1 + r_2) \leq \ddot{x}(t) \leq C - \alpha(r_1 + r_2) < 0 \quad (16)$$

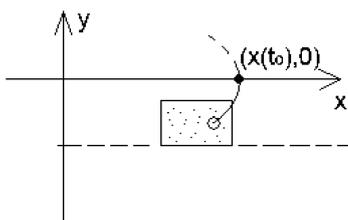


Рис. 2. Переход решения через ось x

Интегрируя данное выражение на промежутке от t_0 до t и учитывая тот факт, что $y(t_0) = x(t_0) = 0$, получаем оценку для координаты $y(t)$:

$$\begin{aligned} (-C - \beta(r_1 + r_2))(t - t_0) &\leq \\ \leq y(t) &\leq (C - \alpha(r_1 + r_2))(t - t_0) \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимание (17), получаем, что переключение управления должно произойти до пересечения решением прямой:

$$y = -h_{\max}(C + \beta(r_1 + r_2)) \quad (18)$$

Рассматривая аналогичным образом случай, когда $x(t_0) < 0$, и объединяя результат со случаем $x(t_0) > 0$, получаем искомый вид линии переключения:

$$s_2(x, y) = y + \text{sign}[x](C + \beta(r_1 + r_2))h_{\max} = 0 \quad (19)$$

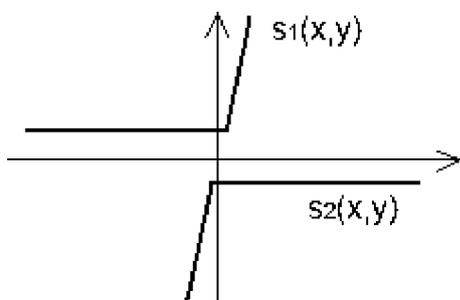


Рис. 3. Новый вид линий переключения управления

При отсутствии запаздывания переключение управления происходит при пересечении осей координат. Заменяем исходное управление на управление, в котором переключение происходит при пересечении прямых (15) и (19). Тем самым мы рассмотрим наиболее сложный случай. Если решение системы спустя некоторое время попадает в определенную область при новом управлении, то при первоначальном управлении решение также будет находиться внутри этой области.

Таким образом взамен исходной системы (1) далее будем исследовать следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x, y) + g(t, x, y)u(x, y) \end{cases} \quad (20)$$

где управление имеет вид:

$$u(x, y) = -r_1 \text{sign}[s_1(x, y)] - r_2 \text{sign}[s_2(x, y)] \quad (21)$$

4. ОЦЕНКА ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Рассмотрим случай, когда объект движется по наиболее отдаленной от центра траектории. На каждом из участков движения нам известно какое управление используется. Следовательно мы можем найти вид траектории, которая наиболее отдаляет объект от центра координат. Такую траекторию можно описать уравнением:

$$\ddot{x} = -\text{sign}[s_1]p, \quad p > 0 \quad (22)$$

где p – константа, специфическая для каждого участка движения.

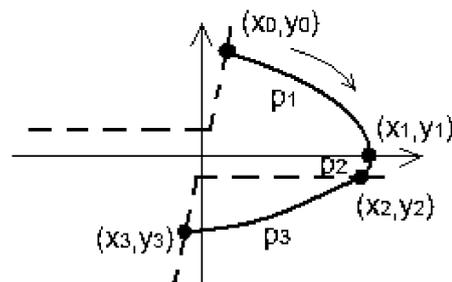


Рис. 4. Движение объекта по максимально отдаленной траектории

Обозначим координаты начала линии через (\bar{x}_0, \bar{y}_0) . Тогда для вывода уравнения движения нам необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\text{sign}[s_1]p \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (23)$$

Интегрируя на промежутке от t_0 до t , получаем:

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x}_0 + \bar{y}_0(t - t_0) - \text{sign}[s_1]p \left(\frac{(t - t_0)^2}{2} \right) \\ y(t) = \bar{y}_0 - \text{sign}[s_1]p(t - t_0) \end{cases} \quad (24)$$

В выражении для $y(t)$ выразим величину $t - t_0$ и подставим в выражение для $x(t)$:

$$x = \bar{x}_0 - \frac{\bar{y}_0(y - \bar{y}_0)}{\text{sign}[s_1]p} - \frac{(y - \bar{y}_0)^2}{2\text{sign}[s_1]p} \quad (25)$$

Сокращая данное выражение получаем уравнение, описывающее движение объекта по траектории наиболее отдаленной от центра координат:

$$x \cdot \text{sign}[s_1] + \frac{y^2}{2p} = \bar{x}_0 \text{sign}[s_1] + \frac{\bar{y}_0^2}{2p} \quad (26)$$

Уравнение (26) описывает параболу с центром в точке $(0, x_0 + \text{sign}[s_1] \frac{\bar{y}_0^2}{2p})$.

На основе полученного уравнения движения мы для каждого участка можем выписать значения констант p . Для движения, изображенного на рисунке 4, получаем:

$$\begin{aligned} p_1 &= -C + \alpha(r_1 + r_2) \\ p_2 &= C + \beta(r_1 + r_2) \\ p_3 &= C + \beta(r_1 - r_2) \end{aligned} \quad (27)$$

Стоит также заметить, что при выполнении условия (7), константы p_1, p_2, p_3 являются положительными числами.

5. НАХОЖДЕНИЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ «БОЛТАНКИ»

Воспользуемся методом точечных преобразований [4] для оценки области «болтанки». Возьмем точку Q на прямой переключения (15) с координатами (x_0, y_0) , $x_0, y_0 > 0$, (см. рис. 4). Постараемся проследить движение объекта до точки \bar{Q} с координатами (x_3, y_3) . Найдем функцию последования $y_3 = f(y_0)$, которая определяет закон преобразования исходной точки Q в последующую точку \bar{Q} .

Начав движение из точки (x_0, y_0) и двигаясь по наиболее отдаленной от центра траектории, мы можем найти из (26) координаты точки (x_1, y_1) :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{y_0^2}{2p_1} \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Далее из системы (24) находим координаты точки (x_2, y_2) :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - p_2 \frac{h_{\max}^2}{2} \\ y_2 = -p_2 h_{\max} \end{cases} \quad (29)$$

Найдем теперь координаты точки, когда решение пересекает прямую $s_1(x, y)$. Введем обозначение:

$$p_0 = -C + \alpha(r_1 - r_2) \quad (30)$$

Тогда (15) можем переписать в виде:

$$s_1(x, y) = x - h_{\max} y + \text{sign}[y] \frac{h_{\max}^2}{2} p_0 = 0 \quad (31)$$

Для нахождения точки пересечения (x_3, y_3) решаем систему:

$$\begin{cases} x + \frac{y^2}{2p_3} = x_2 + \frac{y_2^2}{2p_3} \\ x = h_{\max} y + \frac{h_{\max}^2}{2} p_0 \end{cases} \quad (32)$$

Подставляя второе уравнение системы в первое и проводя небольшие сокращения, находим координаты точки (x_3, y_3) :

$$\begin{cases} x_3 = h_{\max} y_3 + \frac{h_{\max}^2}{2} p_0 \\ y_3 = -h_{\max} p_3 - \sqrt{y_2^2 + 2p_3 x_2 + h_{\max}^2 p_3 (p_3 - p_0)} \end{cases} \quad (33)$$

Выразим координату y_3 через координаты точки (x_0, y_0) . Для этого выразим сперва координаты (x_1, y_1) через (x_0, y_0) , далее по цепочке (x_2, y_2) и наконец координату y_3 , т.е. подставим (28) в (29), а затем в (33). В результате получим:

$$y_3 = -\sqrt{\frac{p_3}{p_1} y_0^2 + 2p_3 x_0 + h_{\max}^2 (p_2^2 - p_2 p_3 + p_3^2)} - p_3 h_{\max} \quad (34)$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на линии переключения (15), то мы можем выразить координату x_0 через y_0 :

$$x_0 = h_{\max} y_0 - \frac{h_{\max}^2}{2} p_0 \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34) получаем искомую функцию последования $f(y_0)$:

$$y_3 = -\sqrt{\frac{p_3}{p_1} y_0^2 + 2h_{\max} p_3 y_0 + h_{\max}^2 (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3 + p_3^2)} - p_3 h_{\max} \quad (36)$$

Нас интересуют такие значения y_0 , при которых имеет место скручивание, т.е. $|y_3| < y_0$:

$$\sqrt{\frac{p_3}{p_1} y_0^2 + 2h_{\max} p_3 y_0 + h_{\max}^2 (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3 + p_3^2)} < y_0 - p_3 h_{\max} \quad (37)$$

Так как левая часть неотрицательная, то для выполнения неравенства необходимо выполнение следующего условия:

$$y_0 > p_3 h_{\max} \quad (38)$$

Возводя в квадрат обе части неравенства (37) и приводя подобные получаем:

$$p_3 - p_1 y_0^2 + 4h_{\max} p_1 p_3 y_0 + h_{\max}^2 p_1 (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3) < 0 \quad (39)$$

Если рассматривать случай без запаздывания ($h_{\max} = 0$), то данное неравенство может быть выполнено только, если коэффициент, стоящий перед y_0^2 , отрицательный, т.е.:

$$p_1 > p_3 \quad (40)$$

Будем полагать далее, что данное условие выполнено. Для нахождения y_0 , удовлетворяющих данному неравенству, решаем соответствующее квадратное уравнение относительно y_0 . Запишем выражение для дискриминанта:

$$D = 16h_{\max}^2 p_1^2 p_3^2 + 4h_{\max}^2 p_1 (p_1 - p_3) \times (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3) \quad (41)$$

Проводя небольшие преобразования получаем:

$$D = 4p_1 h_{\max}^2 (4p_1 p_3^2 + (p_1 - p_3) \times (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3)) > 0 \quad (42)$$

Дискриминант больше 0, значит квадратное уравнение имеет два корня:

$$y_{1,2}^* = \frac{-2h_{\max} p_1 p_3 \pm \sqrt{p_1 h_{\max}^2 (4p_1 p_3^2 + (p_1 - p_3) \times (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3))}}{p_3 - p_1} \quad (43)$$

Нас интересует наибольший корень, так как все y_0 , которые больше данного корня будут удовлетворять неравенству (39):

$$y^* = h_{\max} \frac{2p_1 p_3 + \sqrt{p_1 (4p_1 p_3^2 + (p_1 - p_3) \times (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3))}}{p_1 - p_3} \quad (44)$$

В итоге мы нашли неподвижную точку y^* нашего точечного преобразования. Когда достигается момент $y_0 = y^*$, то движение зацикливается на определенном контуре – предельном цикле. Если $y_0 > y^*$, то решение скручивается к предельному циклу, который как раз и характеризует болтанку решения.

5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АЛГОРИТМА «СКРУЧИВАНИЯ»

Объединяя все полученные результаты, наиболее важными из которых являются условия (7), (40), а также уравнение (26) и выражение для y^* (44), можем сформулировать следующую теорему.

Теорема: Если параметры управления $r_1, r_2 > 0$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} r_1 &> r_2 + \frac{C}{\alpha}, \\ r_2 &> \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} r_1 + \frac{2C}{\alpha + \beta} \end{aligned} \quad (45)$$

то решение системы (1) сходится в область «болтанки», границу которой можно описать уравнением:

$$\begin{aligned} x \cdot \text{sign}[s_1] + \frac{y^2}{2p} = \\ = x_0 + \frac{y_0^2}{2p_1} + \frac{-\text{sign}[s_1 s_2]}{2} h_{\max}^2 \frac{p_2}{p_3} (p_2 - p_3) \end{aligned} \quad (46)$$

где $p_1, p_2, p_3 > 0$ определяются по формулам (27), величина p является константой на каждом участке:

$$p = \begin{cases} p_1, & \text{sign}[s_1(x, y)y] > 0 \\ p_2, & \text{sign}[y s_2(x, y)] < 0 \\ p_3, & \text{sign}[s_1(x, y)s_2(x, y)] < 0 \end{cases} \quad (47)$$

и координаты (x_0, y_0) вычисляются по формуле:

$$\begin{cases} x_0 = h_{\max} y_0 - \frac{h_{\max}^2}{2} p_0 \\ y_0 = h_{\max} \frac{2p_1 p_3 + \sqrt{p_1 (4p_1 p_3^2 + (p_1 - p_3) \times (p_2^2 - p_2 p_3 - 2p_0 p_3))}}{p_1 - p_3} \end{cases} \quad (48)$$

где p_0 берется в виде (30).

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На рисунке 5 показано поведение решения системы (1) при движении по максимально отдаленной от центра траектории. Спустя определенное время решение попадает на границу области болтанки и продолжает движение, не выходя из области болтанки.

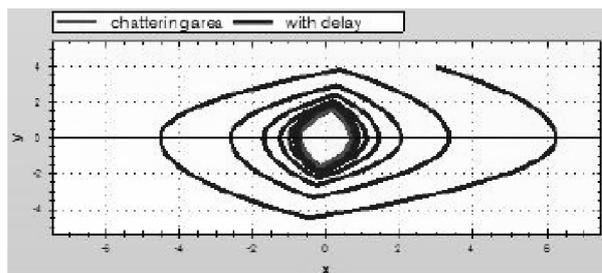


Рис. 5. «Скручивание» решения

На рисунке 6 в качестве начальной точки выбирается точка внутри области болтанки и рассматривается траектория наиболее удаляющая объект от положения начала координат. Спустя определенное время объект приближается к границе области «болтанки», но не может ее покинуть.

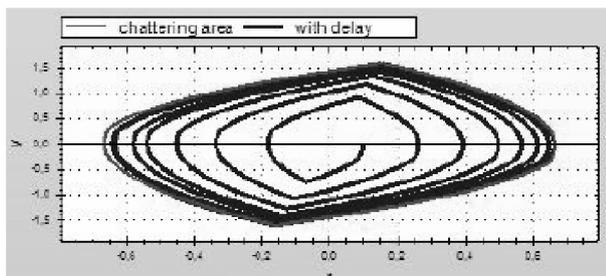


Рис. 6. Начальная точка внутри области «болтанки»

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье доказана теорема, помогающая подобрать параметры управления, при которых имеет место сходимость решения в определенную область (область «болтанки»), и получено уравнение границы этой области. Отметим, что

Рыжков Е. Ю. – Аспирант, каф. вычислительной математики факультета Прикладной математики, механики и информатики Воронежского государственного университета. Тел. (4732) 208-282

в случае отсутствия запаздывания в управлении, при выполнении условий (45) решение сходится в начало координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyakov A.* Lyapunov function design for finite-time convergence analysis : “Twisting” controller for second-order sliding mode realization / A. Polyakov, A. Poznyak // *Automatica* 45, 2009. – р. 444–448
2. *Васильева А. Б.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина / А. Б. Васильева, Н. Н. Нефедов. – Москва, 2007. – 9 с.
3. *Ла-Салль Ж.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М. : Мир, 1964. – 169 с.
4. *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления / Е. П. Попов. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
5. *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Физматгиз, 1959. – 916 с.
6. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю. И. Неймарк. – Либроком, 2010. – 472 с.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Лань, 2008. – 480 с.

Ryzhkov E. Y. – Post-graduate student. The dept. of the Mathematical Methods of Operation Research, Voronezh State University. Tel. (4732) 208-282