УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Ю. Александров, А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 18.01.2012 г.

Аннотация. Рассматривается гибридная система, состоящая из семейства нелинейных подсистем специального вида и закона переключения между ними. С помощью метода функций Ляпунова определяются классы допустимых законов переключения, при которых нулевое решение соответствующей гибридной системы также будет асимптотически устойчиво.
Ключевые слова: системы с переключениями, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова, дифференциальные неравенства, практическая устойчивость.
Annotation. The hybrid system consisting of the family of subsystems of a special type and a switching law is considered. It is assumed that the zero solution of each subsystem is asymptotically stable. By the use of the Lyapunov functions method, the classes of admissible switching laws are determined under which the zero solution of the corresponding hybrid system is also asymptotically stable.
Keywords: switched systems, asymptotic stability, Lyapunov functions, differential inequalities, practical stability.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется проблема устойчивости решений одного класса нелинейных систем с переключениями. Система с переключениями представляет собой гибридную систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени какая из подсистем является активной. Такие системы широко применяются в задачах управления механическими, энергетическими, транспортными системами, при управлении технологическими процессами, а также в ряде других областей [1, 2]. С одной стороны, это обусловлено тем, что структурные вариации в процессе функционирования являются характерной особенностью многих технических систем. С другой стороны, в последнее время интенсивно развиваются методы интеллектуального управления, основанные на организации переключений между различными управляющими устройствами [1–3].

Известно [1], что устойчивость системы при каждом фиксированном режиме функционирования, вообще говоря, не гарантирует ее устойчивости при переключении этих режимов. Для того чтобы доказать асимптотическую устойчивость равномерную относительно закона переключения, достаточно построить общую функцию Ляпунова для всех индивидуальных подсистем, соответствующих рассматриваемой системе [1]. Однако проблема существования такой общей функции Ляпунова не решена полностью даже для семейства линейных автономных подсистем.

В тех случаях, когда общую функцию Ляпунова построить не удается, обеспечить асимптотическую устойчивость можно путем наложения дополнительных ограничений на закон переключения (dwell-time approach [3]). Для некоторых типов гибридных систем доказано [1–3], что асимптотическая устойчивость будет сохраняться, если промежутки времени между последовательными переключениями достаточно велики. Однако такой подход хорошо развит только для семейства экспоненциально устойчивых подсистем. В данной работе указанный подход применяется для одного класса существенно нелинейных подсистем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P_\sigma f(x). \qquad (1)$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)^*$; $f(x) = \big(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\big)^*$, скалярные функции $f_i(x_i)$ заданы и непрерывны при $|x_i| < \Delta$ ($0 < \Delta \le +\infty$) и обладают свойством $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = 1,\dots,n$; $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t): [0,+\infty) \to Q = \{1,\dots,N\}$; $P_s = \{p_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1}^{n}$ – постоянные матрицы, $s = 1,\dots,N$. Таким образом, в каждый момент времени работа исследуемой системы описывается одной из подсистем

$$\dot{x} = P_s f(x), \quad s = 1,\dots,N. \qquad (2)$$

Системы вида (2) широко применяются при изучении систем автоматического регулирования [4, 5]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [5].

Из свойств функций $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$ следует, что система (1) имеет нулевое решение.

Обозначим через θ_i, $i = 1,2,\dots$, моменты переключений между подсистемами, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$. Будем считать, что эти моменты известны, а порядок, в котором происходит смена режимов функционирования гибридной системы, нет. Пусть $\theta_0 = 0$, функция $\sigma(t)$ в точках разрыва непрерывна справа, а последовательность $\theta_1, \theta_2, \dots$ является минимальной, т.е. $\sigma(\theta_i) \neq \sigma(\theta_{i+1})$, $i = 0,1,2\dots$. Кроме того, будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(t)$ на промежутке $[0,+\infty)$ имеет бесконечное количество точек разрыва, а на любом ограниченном промежутке их может быть только конечное число.

В работе [6] были получены достаточные условия, при выполнении которых для семейства подсистем (2) существует общая функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом рассматривалось несколько возможных вариантов построения такой функции Ляпунова.

Предположим теперь, что гарантировать существование общей функции Ляпунова для подсистем (2) не удается. Тогда применим к системе (1) второй из указанных во введении подходов к анализу устойчивости (dwell-time approach).

Далее в настоящей работе на правые части уравнений (2) накладываются некоторые дополнительные ограничения.

Предположение 1. Пусть для каждого значения индекса $s = 1,\dots,N$ существуют положительные числа $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}$, при которых матрица $P_s^* \Lambda_s + \Lambda_s P_s$ отрицательно определена. Здесь $\Lambda_s = diag\{\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}\}$.

Замечание 1. Условия существования таких значений $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}$ исследовались во многих работах (см., например, [5, 7, 8]).

Замечание 2. Если выполнено предположение 1, то для каждого $s = 1,\dots,N$ нулевое решение s-ой подсистемы из (2) асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)$, причем для этой подсистемы функция

$$V_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)d\tau$$

удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если бы указанные значения $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}$ удалось подобрать одинаковыми для всех $s = 1,\dots,N$, то это бы означало, что для подсистем (2) построена общая функция Ляпунова. Однако условия существования такой общей функции являются гораздо более жесткими, нежели условия существования своей частной функции Ляпунова для каждой отдельной подсистемы.

Предположение 2. Пусть функции $f_j(x_j)$ представимы в виде $f_j(x_j) = \beta_j x_j^{\mu_j} + h_j(x_j)$, $j = 1,\dots,n$, где β_j – положительные постоянные, μ_j – рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_j > 1$, а функции $h_j(x_j)$ обладают свойством $h_j(x_j)/x_j^{\mu_j} \to 0$ при $x_j \to 0$.

Замечание 3. Не умаляя общности, будем считать, что $\beta_1 = \dots = \beta_n = 1$, а $k' \geq 1$.

Согласно предположению 2, подсистемы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} x_j^{\mu_j}, \quad i = 1,\dots,n,\ s = 1,\dots,N, \qquad (3)$$

можно рассматривать в качестве первого, в широком смысле [9], приближения для подсистем (2).

Исследуем далее вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения гибридной системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\sigma)} x_j^{\mu_j},\ i = 1,\dots,n. \qquad (4)$$

Построим функции Ляпунова для подсистем из совокупности (3) в виде

$$V_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \frac{x_i^{\mu_i+1}}{\mu_i + 1}, \quad s = 1,\dots,N. \qquad (5)$$

Возьмем в качестве коэффициентов $\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)}$ числа из предположения 1. Тогда производная функции $V_s(x)$ в силу s-ой подсистемы из (3) будет отрицательно определенной, $s = 1,\ldots,N$. Значит, нулевые решения подсистем (3) асимптотически устойчивы. Нетрудно показать, что для любого $\bar{H} > 0$ число $\bar{\beta} > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|x\| < \bar{H}$ указанные производные удовлетворяли соотношениям

$$\dot{V}_s \le -\bar{\beta} V_s^{1+\rho_n},\ s = 1,\ldots,N. \qquad (6)$$

Аналогично для любого $\hat{H} > 0$ число $\hat{\beta} > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|x\| > \hat{H}$ выполнялись неравенства

$$\dot{V}_s \le -\hat{\beta} V_s^{1+\rho_1},\ s = 1,\ldots,N. \qquad (7)$$

Здесь

$$\rho_n = (\mu_n - 1)/(\mu_n + 1),$$

$$\rho_1 = (\mu_1 - 1)/(\mu_1 + 1).$$

Положим

$$c = \max_{s,j=1,\ldots,N}\max_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i^{(s)}/\lambda_i^{(j)}),$$

$$\bar{b} = c^{-\rho_n},\ \hat{b} = c^{-\rho_1}.$$

Тогда $c \ge 1$, и для любых $x \in R^n$ имеем

$$V_s(x) \le c V_j(x),\ s,j = 1,\ldots,N. \qquad (8)$$

Замечание 4. Если $c = 1$, то $V_1(x) \equiv \ldots \equiv V_N(x)$, т.е. для подсистем (3) построена общая функция Ляпунова. Тогда при любом законе переключения нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво в целом. Поэтому далее считаем, что $c > 1$.

3. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Случай, когда $\mu_1 = \ldots = \mu_n$, рассматривался в работе [10]. Предположим теперь, что $\mu_1 < \mu_n$.

Пусть $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 1,2,\ldots$. Построим вспомогательные функции. Положим $\bar{\psi}(m,1) = \hat{\psi}(m,1) = 0$,

$$\bar{\psi}(m,k) = \sum_{i=1}^{k-1} T_{m+i}\bar{b}^{k-i},$$

$$\hat{\psi}(m,k) = \sum_{i=1}^{k-1} T_{m+i}\hat{b}^{k-i}$$

при $k = 2,3,\ldots;\ m = 1,2,\ldots$.

Теорема 1. *Если*

$$\bar{\psi}(m,k) \to +\infty \text{ при } k \to \infty \qquad (9)$$

при всех $m = 1,2,\ldots$, то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво. А если предельное соотношение (9) *выполнено равномерно относительно $m \in \{1,2,\ldots\}$, то нулевое решение системы* (4) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. По этому числу найдем $\bar{\beta} > 0$ такое, что в области $G_1 = \{x \in R^n : \|x\| < \varepsilon\}$ справедливы оценки (6).

Используя известные частные функции $V_1(x)$, …, $V_N(x)$, строим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(t)}(x)$ [3], соответствующую закону переключения $\sigma(t)$.

Выберем начальный момент времени $t_0 \ge 0$ и начальную точку $x_0 \in G_1$, $x_0 \ne 0$. Рассмотрим решение $x(t)$ системы (4), выходящее при $t = t_0$ из точки x_0. Найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$.

Если на промежутке $[t_0, \theta_m)$ решение $x(t)$ не выходит за пределы области G_1, то тогда из выполнения неравенств (6) следует, что на этом промежутке справедлива оценка

$$V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_n}(x(t)) \ge V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_n}(x_0) + \bar{\beta}\rho_n\left(t - t_0\right). \qquad (10)$$

Для каждого $t \ge \theta_m$ можно указать такое натуральное число k, что $\theta_{m+k-1} \le t < \theta_{m+k}$. При этом $k \to \infty$, когда $t \to +\infty$. Предположим, что в течение некоторого интервала времени $[t_0, t]$ решение $x(t)$ остается в области G_1. Последовательно интегрируя на промежутках $[\theta_{m+k-1}, t]$, $[\theta_{m+k-2}, \theta_{m+k-1}], \ldots, [t_0, \theta_m]$ соответствующие дифференциальные неравенства из семейства (6) и учитывая соотношения (8), имеем

$$\begin{aligned} &V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\rho_n}(x(t)) \ge V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\rho_n}(x(\theta_{m+k-1})) + \\ &+\bar{\beta}\rho_n\left(t - \theta_{m+k-1}\right) \ge \bar{b}V_{\sigma(\theta_{m+k-2})}^{-\rho_n}(x(\theta_{m+k-1})) + \\ &+\bar{\beta}\rho_n\left(t - \theta_{m+k-1}\right) \ge \ldots \ge \bar{b}^{\,k}V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_n}(x_0) + \\ &+\bar{\beta}\rho_n\left(\left(t - \theta_{m+k-1}\right) + \bar{\psi}(m,k) + \bar{b}^{\,k}\left(\theta_m - t_0\right)\right). \end{aligned} \qquad (11)$$

Выберем $\bar{a}_1 > 0$ и $\bar{a}_2 > 0$ так, чтобы в области G_1 выполнялись неравенства

$$\bar{a}_1\|x\|^{\mu_n+1} \le V_s(x) \le \bar{a}_2\|x\|^{\mu_1+1}, \quad s = 1,\ldots,N. \qquad (12)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

Используя оценки (10), (11) и (12), получаем, что

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \le \bar{a}_1^{-\frac{1}{\mu_n+1}}(\bar{a}_2^{-\rho_n}\|x_0\|^{-\rho_n(\mu_1+1)} + \\ +\bar{\beta}\rho_n\left(t - t_0\right))^{-\frac{1}{\mu_n-1}} \end{aligned} \qquad (13)$$

при $t \in [t_0, \theta_m)$,

$$\|x(t)\| \le \bar{a}_1^{-\frac{1}{\mu_n+1}} (\bar{b}^k \bar{a}_2^{-\rho_n} \|x_0\|^{-\rho_n(\mu_1+1)} +$$
$$+\bar{\beta}\rho_n((t-\theta_{m+k-1}) + \qquad (14)$$
$$+\bar{\psi}(m,k) + \bar{b}^k(\theta_m - t_0)))^{-\frac{1}{\mu_n-1}}$$
$$\text{при } t \in [\theta_{m+k-1}, \theta_{m+k}),\ k \ge 1.$$

Если выполнено соотношение (9), то можно найти натуральное число k_0, удовлетворяющее условию

$$\bar{\psi}(m,k) > \frac{1}{\bar{\beta}\rho_n}\left(\varepsilon\ \bar{a}_1^{\frac{1}{\mu_n+1}}\right)^{1-\mu_n}$$
$$\text{для всех } k \ge k_0.$$

Пусть

$$\delta = \varepsilon^{\frac{\mu_n+1}{\mu_1+1}} \left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}\right)^{\frac{1}{\mu_1+1}} \bar{b}^{-\frac{k_0}{\rho_n(\mu_1+1)}}. \qquad (15)$$

Получим, что если $\|x(t_0)\| < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$. Кроме того, из выполнения неравенств (14) следует, что $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что $\bar{\psi}(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $m \in \{1,2,\ldots\}$. Тогда величину k_0, а следовательно, и величину δ, можно выбрать не зависящими от t_0. Значит, нулевое решение системы (4) равномерно устойчиво.

Покажем далее, что для любого $\varepsilon' > 0$ найдется $T' > 0$, для которого имеем $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon'$ при всех $\|x_0\| < \delta$, $t_0 \ge 0$ и $t \ge t_0 + T'$, т.е. нулевое решение системы (4) является равномерно притягивающим.

По заданному $\varepsilon' > 0$ найдем $\delta' > 0$ из определения равномерной устойчивости. Получаем, что если решение $x(t)$ входит в область $\|x\| < \delta'$ в некоторый момент времени $t = t_1$, то тогда при всех $t \ge t_1$ будет справедливо неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon'$.

Рассмотрим решение $x(t)$ системы (4), выходящее при $t = t_0 \ge 0$ из некоторой точки x_0, $\|x_0\| < \delta$, и найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$. Тогда снова придем к оценкам (13), (14).

Можно указать $k' \ge 1$, для которого

$$\bar{\psi}(m,k) > \frac{1}{\bar{\beta}\rho_n}\left(\delta'\ \bar{a}_1^{\frac{1}{\mu_n+1}}\right)^{1-\mu_n}$$
$$\text{для всех } k \ge k',\ m = 1,2,\ldots.$$

Пусть

$$T' = \frac{1}{\bar{\beta}\rho_n}\bar{b}^{-k'}\left(\delta'\ \bar{a}_1^{\frac{1}{\mu_n+1}}\right)^{1-\mu_n}.$$

Если на промежутке $[t_0, t_0 + T']$ количество моментов переключений превосходит величину k', то

$$\|x(t_0 + T')\| < \bar{a}_1^{-\frac{1}{\mu_n+1}} (\bar{\beta}\rho_n \bar{\psi}(m,k))^{-\frac{1}{\mu_n-1}} < \delta'.$$

В противном случае имеем

$$\|x(t_0 + T')\| < \bar{a}_1^{-\frac{1}{\mu_n+1}} (\bar{\beta}\rho_n \bar{b}^{k'} T')^{-\frac{1}{\mu_n-1}} = \delta'.$$

Значит, $\|x(t)\| < \varepsilon'$ при $t \ge t_0 + T'$. Теорема доказана.

Замечание 5. Если $\bar{\psi}(1,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$, то $\bar{\psi}(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$ при любом $m = 1,2,\ldots$.

Следствие 1. *Пусть предельное соотношение (9) выполнено равномерно относительно $m \in \{1,2,\ldots\}$. Тогда нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Согласно теореме 1, нулевое решение системы (4) равномерно асимптотически устойчиво. Покажем, что областью асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы является все пространство R^n.

Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ по формуле (15). Выберем $\hat{H} \in (0, \delta)$. По этому числу укажем $\hat{\beta} > 0$ такое, что в области $G_2 = \{x \in R^n : \|x\| > \hat{H}\}$ справедливы оценки (7).

Рассмотрим решение $x(t)$ системы (4), выходящее при $t = t_0 \ge 0$ из некоторой точки $x_0 \in G_2$. Снова найдем натуральное число m такое, что $t_0 \in [\theta_{m-1}, \theta_m)$.

Можно задать $\hat{a}_1 > 0$ и $\hat{a}_2 > 0$ так, чтобы в области G_2 были справедливы неравенства

$$\hat{a}_1 \|x\|^{\mu_1+1} \le V_s(x) \le \hat{a}_2 \|x\|^{\mu_n+1}, \quad s = 1,\ldots,N. \quad (16)$$

Если решение $x(t)$ на некотором промежутке $[t_0, t]$ остается в области G_2, то, интегрируя дифференциальные неравенства (7), получим оценки аналогичные тем, что были получены при доказательстве теоремы 1:

$$V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_1}(x(t)) \ge V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_1}(x_0) + \hat{\beta}\rho_1(t - t_0)$$
$$\text{при } t \in [t_0, \theta_m),$$
$$V_{\sigma(\theta_{m+k-1})}^{-\rho_1}(x(t)) \ge \hat{b}^k V_{\sigma(\theta_{m-1})}^{-\rho_1}(x_0) +$$
$$+\hat{\beta}\rho_1((t - \theta_{m+k-1}) +$$
$$+\hat{\psi}(m,k) + \hat{b}^k(\theta_m - t_0))$$

$$t \in [\theta_{m+k-1}, \theta_{m+k}),\ k \geq 1.$$

Отсюда с учетом (16) находим, что

$$\|x(t)\| \leq \hat{a}_1^{-\frac{1}{\mu_1+1}} (\hat{a}_2^{-\rho_1} \|x_0\|^{-\rho_1(\mu_n+1)} + + \hat{\beta}\rho_1 (t - t_0))^{-\frac{1}{\mu_1-1}}$$

при $t \in [t_0, \theta_m)$,

$$\|x(t)\| \leq \hat{a}_1^{-\frac{1}{\mu_1+1}} (\hat{b}^k \hat{a}_2^{-\rho_1} \|x_0\|^{-\rho_1(\mu_n+1)} + +\hat{\beta}\rho_1((t - \theta_{m+k-1}) + +\hat{\psi}(m,k) + \hat{b}^k (\theta_m - t_0)))^{-\frac{1}{\mu_1-1}}$$

при $t \in [\theta_{m+k-1}, \theta_{m+k}),\ k \geq 1$.

Поскольку $\hat{b} > \bar{b}$, то $\hat{\psi}(m,k) > \bar{\psi}(m,k)$ при всех $k, m = 1,2,\ldots$. Следовательно, $\hat{\psi}(m,k) \to +\infty$ при $k \to \infty$, причем равномерно по $m = 1,2,\ldots$. Значит, найдется такое $\hat{T} \geq 0$, что $\|x(t_0 + \hat{T})\| < \delta$. Тогда требуемое следует из доказательства теоремы 1.

Замечание 6. Величину $\hat{T}$, указанную в доказательстве следствия 1, можно выбрать одной и той же для всех $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in R^n$. Таким образом, при выполнении условий следствия 1 для любой заданной окрестности начала координат можно построить оценку времени попадания всех решений системы (4) в эту окрестность, не зависящую от начальных данных решений.

Следствие 2. *Если $T_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, то нулевое решение системы* (4) *асимптотически устойчиво в целом.*

Замечание 7. Известно [3], что если имеется совокупность асимптотически устойчивых линейных автономных подсистем, то можно найти число $L > 0$ такое, что при любых $T_i \geq L$, $i = 1,2,\ldots$, нулевое решение гибридной системы, соответствующей этим подсистемам, будет асимптотически устойчиво в целом. Теорема 1 и следствие 1 не позволяют получить аналогичного результата для существенно нелинейной системы (например, если $T_i = L = const > 0$, $i = 1,2,\ldots$, то условие (9) не выполняется ни при одном значении L). Однако в данном случае можно рассмотреть задачу о сильной практической устойчивости [11], т.е. о попадании всех решений в заданную окрестность начала координат за конечное время и дальнейшем пребывании их там.

Следствие 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$ такие, что если $T_i \geq L_1$, $i = 1,2,\ldots$, то для всех $t_0 \geq 0$, $x_0 \in R^n$ имеем $\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0 + L_2$. Здесь $x(t, x_0, t_0)$ – решение системы* (4), *выходящее при $t = t_0$ из точки x_0.*

Полученные для системы (4) результаты можно использовать и для анализа устойчивости системы (1). Если справедливы предположения 1 и 2, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при всех $m = 1,2,\ldots$ выполнено предельное соотношение* (4). *Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво. А если предельное соотношение* (9) *выполнено равномерно относительно $m \in \{1,2,\ldots\}$, то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для каждой подсистемы из совокупности (3) строим функцию Ляпунова вида (5), удовлетворяющую требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Продифференцируем эти функции в силу соответствующих подсистем из (2). Получим, что для любого достаточно малого значения $\bar{H} > 0$ можно подобрать такое $\bar{\beta} > 0$, что в области $\|x\| < \bar{H}$ для указанных производных будут справедливы дифференциальные неравенства (6). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован некоторый класс существенно нелинейных систем с переключениями. Предполагалось, что подсистемы, составляющие гибридную систему, имеют асимптотически устойчивые нулевые решения, причем для каждой подсистемы построена своя функция Ляпунова. Получены условия на длины промежутков между последовательными моментами переключений, при выполнении которых нулевое решение гибридной системы также является асимптотически устойчивым.

Следует отметить, что найденные условия зависят от величины c из соотношений (8). Чем меньше значение c, тем менее жесткими будут ограничения, накладываемые на закон переключения. Поэтому важной проблемой является проблема выбора "оптимальных" функций Ляпунова, для которых величина c принимает наименьшее возможное значение.

Предложенный подход может быть использован для анализа устойчивости решений других типов гибридных систем. В частности, с его помощью можно получить условия устойчивости для существенно нелинейных сложных (многосвязных) систем с переменной структурой связей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. 1999. V. 19. No. 15. P. 59–70.

2. *Decarlo R.A., Branicky M.S., Pettersson S., Lennartson B.* Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proceedings of the IEEE. 2000. V. 88. No. 7. P. 1069–1082.

3. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A.N.* Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems // J. of the Franklin Institute. 2001. V. 338. P. 765–779.

4. *Персидский С.К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5–11.

5. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1999.

6. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 3–18.

7. *Kamenetskiy V.A., Pyatnitskiy Ye.S.* An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions // Systems and Control Letters. 1987. V. 8. No. 5. P. 445–451.

8. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

9. *Зубов В.И.* Асимптотическая устойчивость по первому, в широком смысле, приближению // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 3. С. 295–296.

10. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости гибридных однородных систем // Вестник СамГТУ. Серия «Физ.-мат. науки». 2010. Т. 21. № 5. С. 24–32.

11. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.

Александров Александр Юрьевич – заведующий кафедрой управления медико-биологическими системами СПбГУ, д.ф.-м.н., профессор. E-mail: alex43102006@yandex.ru

Платонов Алексей Викторович – доцент кафедры управления медико-биологическими системами СПбГУ, к.ф.-м.н., доцент. E-mail: al-platon1@yandex.ru

Aleksandrov Alexander Yurjevich, Dr. Sc. (Phys. & Math.) Full Prof., Head of Dept. of Medical and Biological Systems Control. E-mail: alex43102006@yandex.ru

Platonov Alexey Viktorovich, Ph. D. (Phys. & Math.) Ass. Prof., Dept. of Medical and Biological Systems Control. E-mail: al-platon1@yandex.ru