УДК 681.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРБИТ СИЛЬНОУДАЛЕННЫХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

А. П. Ерёменко, В. А. Горбунов

Вологодский государственный технический университет

Поступила в редакцию 02.03.2012 г.

Аннотация. В работе представлена математическая модель и результаты исследования на её основе движения искусственного объекта в системе Земля–Луна. Модель учитывает возмущения движения искусственного объекта, возникающие под действием прецессии Луны, рассчитанной с помощью рядов Хилла-Брауна. Представлен алгоритм численного моделирования, позволяющий рассчитать орбиту искусственного объекта с учетом данных поправок.
Ключевые слова: алгоритм, численные методы, моделирование, ограниченная задача трех тел, искусственные спутники Земли, точки либрации.
Annotation. This paper presents the results of research and construction of a mathematical model of the artificial object in the Earth-Moon system. This model takes into account the perturbations of an artificial object movements that occur under the influence of the precession of the Moon, calculated using the Hill-Brown series. An algorithm for the numerical simulation, can calculate the orbit of an artificial body taking into account of the amendments.
Keywords: algorithm, numerical methods, modeling, restricted three-body problem, artificial satellites, the librations point.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из актуальных направлений исследований в небесной механике и теории дифференциальных уравнений много лет остается задача трех тел. Ее общее решение в пригодном для практического применения виде до сих пор не найдено [1–2]. Расчеты орбит трех тел приходится проводить методами численного интегрирования, но хорошо известные классические методы не всегда удовлетворительны, когда речь идет о сильноудаленных искусственных спутниках Земли (СИСЗ) [3]. Такие объекты в виде космических телескопов и орбитальных зондов все чаще требуются астрофизикам в связи с изучением солнечного ветра, излучения удаленных звезд и подобными исследованиями. Проведение этих работ требует значительного удаления автоматических станций от Земли. Особенно удобными для данных наблюдений во всем диапазоне электромагнитного спектра являются орбиты окрестностей точек либрации (так называемые коллинеарные точки L_1, L_2, L_3 и треугольные точки L_4, L_5 [3-4]). В системах тел Земля–Солнце и Земля–Луна многие из них уже используются [5–7].

Исследований, посвященных использованию более удобных в силу своего положения и устойчивости точек L_4 и L_5 системы Земля–Луна, существует значительно меньше. В системе Земля–Солнце они также исследованы незначительно. Одним из немногих осуществленных проектов стал запуск зондов STEREO A и STEREO B в 2006 г.

Важной причиной малого числа полетов СИСЗ в окрестности $L_4 - L_5$ является естественное накопление космического мусора и пыли (так называемые облака Кордылевского [8]) вблизи этих точек. Данный мусор может представлять угрозу для искусственного объекта и затрудняет навигацию.

В настоящее время растет практический интерес к освоению точек $L_4 - L_5$ [9-10]. Возникает потребность в отыскании орбит в окрестности данных точек, удовлетворяющих нескольким критериям: устойчивых, избегающих космического мусора и удобных для наблюдений. Практический интерес могут также представлять квазиэллиптические орбиты, огибающие Землю и точки L_4 и/или L_5. Подобные орбиты позволяют возвращать контейнеры с образцами космических частиц, набранных в окрестностях точек либрации, на Землю без существенных затрат.

Альтернативным общему решению и практически пригодным методом исследования орбит искусственных тел является численный эксперимент, но в случае СИСЗ его проведение затруднено. Это связано с тем, что на движение спутника на таком удалении от Земли оказывает значительное влияние Луна, в свою очередь, ее точное движение сложно описать [11].

Целью настоящей работы является построение численно-аналитического метода, решающего задачу корректного моделирования движения СИСЗ в окрестностях треугольных точек либрации.

РАССЧЕТ ОРБИТЫ СИСЗ СТАНДАРТНЫМИ МЕТОДАМИ

Рассмотрим стандартную модель движения СИСЗ [1–3], используем хорошо известные методы ее интегрирования.

Существует большое количество форм уравнений движения в задаче многих тел. Выбранная нами форма должна удовлетворять следующим требованиям: задача упрощается до плоской круговой ограниченной задачи трех тел; уравнения задачи должны иметь минимальный порядок и форму записи, удобную для применения численных методов и контроля точности вычислений; при дальнейших исследованиях уравнения должны легко преобразовываться в уравнения возмущенного движения, при этом они должны оставаться не менее удобными для численного интегрирования.

Этим требованиям удовлетворяет представление задачи в классической форме Якоби [3,10,12]. В данной форме система уравнений разбивается на две части: полностью интегрируемые уравнения – для кругового движения Луны; не имеющие полного набора первых интегралов уравнения – для сложного движения СИСЗ.

Примененный к плоской ограниченной задаче, записанной в абсолютных координатах (система 12 обыкновенных дифференциальных уравнений) переход Якоби также дает максимально возможное понижение порядка (система восьми обыкновенных дифференциальных уравнений).

Выберем следующую систему постоянных: мера массы: M – масса Земли; мера времени: t – сутки; мера расстояния: r – возмущенное среднее расстояние Луны по Хиллу-Брауну [12].

Классические уравнения движения n тел в абсолютной системе координат (ξ,η,ζ) можно записать как:

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i},\ m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i},\ m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \qquad (1)$$

где $U = f(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}})$ – силовая функция; $\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i-\xi_j)^2 + (\eta_i-\eta_j)^2 + (\zeta_i-\zeta_j)^2}$ – взаимное расстояние между точками M_i и M_j; m_i – массы тел; f – гравитационная постоянная.

Рассмотрим теперь плоскую задачу трех тел и отнесем движение точки M_1 к системе координат с началом в точке M_0, а движение точки M_2 к системе с началом в барицентре (M_0, M_1).

Величины с индексом 0 относятся к Земле, с индексом 1 – к Луне, с индексом 2 – к СИСЗ, оси параллельны осям абсолютной системы координат. В таком случае система (1) запишется в новых координатах как

$$m_i'\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},\ m_i'\ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ i = 1,2. \ (2)$$

Силовая функция U инвариантна относительно этого преобразования, приведенные массы m_i' определятся как $m_1' = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$,

$$m_2' = \frac{m_2(m_0+m_1)}{(m_0+m_1+m_2)}.$$

Взаимные расстояния даются соотношениями:

$$\Delta^2_{01} = x_1'^2 + y_1'^2,$$
$$\Delta^2_{02} = (x_2' + x_1'\cdot m_1/(m_0+m_1))^2 + $$
$$+(y_2' + y_1'\cdot m_1/(m_0+m_1))^2,$$
$$\Delta^2_{12} = (x_2' - x_1'\cdot m_1/(m_0+m_1))^2 + $$
$$+(y_2' - y_1'\cdot m_1/(m_0+m_1))^2.$$

Теперь учтем, что масса СИСЗ относительно основных гравитирующих тел пренебрежимо мала, и окончательно перейдем к плоской ограниченной задаче трех тел в координатах Якоби. Положив в (2) $m_2' = 0$, получим систему, разбивающуюся на две части:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1},\ \ddot{y}_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y_1},\ U_1 = f_{.}(\frac{m_0+m_1}{\Delta_{01}}) \qquad (4)$$

и

$$\ddot{x}_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_2},\ \ddot{y}_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y_2},\ U_2 = f_E(\frac{m_0}{\Delta_{02}} + \frac{m_1}{\Delta_{12}}), \qquad (5)$$

где $f_{\cdot}$ – гелиоцентрическая гравитационная постоянная [14].

Система (4) описывает круговое движение Луны вокруг Земли, система (5) – сложное движение СИСЗ [12].

Для исследования полученной модели воспользуемся стандартным многошаговым методом Адамса 5-го порядка. Качественный результат расчетов представлен на рис. 1.

Для системы (4) известно точное решение – круговая орбита Луны [12]. Из рис. 1 видно, что орбита Луны, рассчитанная методом Адамса 5-го порядка, не является точной окружностью, она замкнутая, но квазипериодическая.

Из физического смысла соотношений (4) и (5) ясно, что при такой точности расчетов даже для сравнительно простой системы сложно говорить о достоверности результатов орбиты СИСЗ [12].

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Рядом ранних исследователей, таких как Ш. Делонэ, было показано, что на движение Луны оказывает огромное влияние притяжение Солнца и больших планет [11]. Математические трудности метода Делонэ заключались в необычайной громоздкости метода исключения членов ряда в разложениях. Позднее Дж. У. Хилл нашел удобный способ интегрирования задачи трех тел путем разложения уравнений движения во вращающейся системе координат по степеням малого параметра m, связанного с истинной аномалией ν [11–12].

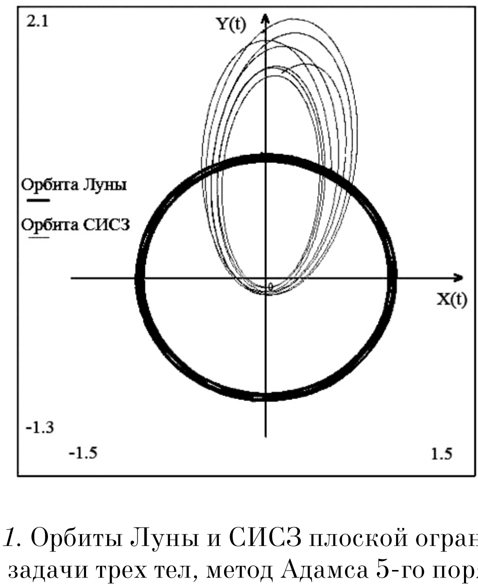

Рис. 1. Орбиты Луны и СИСЗ плоской ограниченной задачи трех тел, метод Адамса 5-го порядка, интервал $200t$. По оси абсцисс – параметрические координаты X Луны и СИСЗ в r, по оси ординат – параметрические координаты Y Луны и СИСЗ в r

Существует естественное превосходство аналитических теорий в скорости расчетов [11]. Кроме того, аналитические разложения до 3–4 порядка вполне сопоставимы по точности с численным интегрированием методами 5–6 порядков и требуют значительно меньше времени.

Разработанная нами численно-аналитическая модель движения СИСЗ сочетает достоинства обоих способов моделирования. Движение Луны рассчитывается аналитически, с помощью одного из вариантов задачи Хилла-Брауна, затем проводится численное интегрирование задачи движения СИСЗ.

Прямоугольные координаты Луны представим в виде рядов Хилла, разложенных по истинной аномалии ν:

$$\begin{gathered} x = A\cdot[(a_0 + a_{-1})\cos(v) + \\ +(a_1 + a_{-2})\cos(3v) + (a_2 + a_{-3})\cos(5v) + \ldots], \\ y = A\cdot[(a_0 - a_{-1})\sin(v) + \\ +(a_1 - a_{-2})\sin(3v) + (a_2 - a_{-3})\sin(5v) + \ldots], \end{gathered} \quad (6)$$

где (с точностью до членов пятого порядка, включительно) коэффициенты a_i равны [12]:

$$\begin{gathered} a_0 = 1, \\ a_1 = m^2\cdot 3/16 + \\ +m^3\cdot 1/2 + m^4\cdot 7/12 + m^5\cdot 11/36, \\ a_2 = m^4\cdot 25/12 + m^5\cdot 803/1920, \\ a_{-1} = -m^2\cdot 19/16 - \\ -m^3\cdot 5/3 - m^4\cdot 43/36 - m^5\cdot 14/27, \\ a_{-2} = m^5\cdot 23/640, \\ a_{-3} = 0. \end{gathered}$$

Возмущенная большая полуось орбиты Луны дается выражением

$$\begin{gathered} A = \mathrm{a}(1 - m^2\cdot 1/6 + m^3\cdot 1/3 + \\ +m^4\cdot 407/2304 - m^5\cdot 67/288), \end{gathered}$$

здесь $a = \sqrt[3]{\mu/n^2} = 1.0007163\,r$ – большая полуось орбиты Луны; $m = \tilde{n}/(n+\tilde{n}) = 8.08489\cdot 10^{-3}$ – параметр Хилла; n и $\tilde{n}$ определяются из эфемериды DE405/LE405 [13].

Ограничимся в (6) разложением до второго порядка и окончательно получим:

$$\begin{gathered} x = A\cdot[(1 - m^2\cdot 19/16)\cos(v) + \\ +(m^2\cdot 3/16)\cos(3v)], \\ y = A\cdot[(1 + m^2\cdot 19/16)\sin(v) + \\ +(m^2\cdot 3/16)\sin(3v)]. \end{gathered} \quad (7)$$

Выражениями (7) даются координаты Луны, найденные аналитически.

Вторым этапом определим координаты СИСЗ, они даются уравнениями (5).

Мы построили численно-аналитическую модель плоской ограниченной задачи трех тел, представленную в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = A\cdot[(1-m^2\cdot 19/16)\cos(v)+ \\ +(m^2\cdot 3/16)\cos(3v)], \\ y_1 = A\cdot[(1+m^2\cdot 19/16)\sin(v)+ \\ +(m^2\cdot 3/16)\sin(3v)], \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}, \\ \ddot{y}_2 = \dfrac{\partial U_2}{\partial y_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Данная система зависит от истинной аномалии и не является автономной. Нами предложен следующий алгоритм ее решения.

На первом этапе необходимо рассчитать среднее движение Луны аналитически с помощью рядов Хилла-Брауна на промежутке t. Так мы получим явно выраженные координаты Луны в выбранной системе в данный момент времени, не зависящие от истинной аномалии.

На втором этапе примем положение Луны постоянным на том же промежутке. Подставим полученные координаты в нашу систему дифференциальных уравнений и приведем ее к автономному виду на интервале $(t, t+1)$.

Разобьем этот отрезок на опорные точки и проведем интегрирование полученной автономной системы дифференциальных уравнений численно. Действуя так, мы получим n последовательно интегрируемых автономных систем, описывающих движение СИСЗ с учетом среднего движения Луны на заданном интервале, где n – общее количество точек, в которых ищется решение.

Сшивание решений произведем посредством передачи последнего значения координат и скоростей СИСЗ, полученных на i-м шаге в качестве начальных условий для функции-решателя на i+1-м шаге. Необходимая гладкость решения достигается за счет выбора надлежащего числа опорных точек.

На рис. 2 представлен результат работы данного алгоритма.

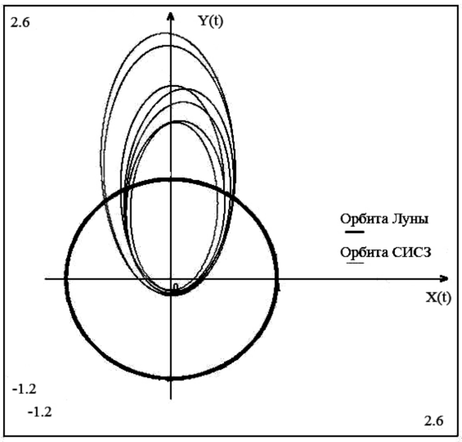

Рис. 2. Орбиты Луны и СИСЗ плоской ограниченной задачи трех тел, используется численно-аналитический метод, интервал $200t$. По оси абсцисс – параметрические координаты X Луны и СИСЗ в *r*, по оси ординат – параметрические координаты Y Луны и СИСЗ в *r*

РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью свойств интеграла Якоби мы исследовали количественные отличия между построенной нами моделью и стандартной.

Как известно [1, 3], уравнения (4) имеют лишь один первый интеграл, существующий, если (5) – круговая ограниченная задача. Получить этот интеграл можно, перейдя от барицентрической системы координат к специальной, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси Gz. Здесь G – барицентр системы $m_0 + m_1$, ось z перпендикулярна плоскости орбит Луны и СИСЗ.

Обозначим новые координаты (ξ, η) и запишем преобразование, связывающее старые координаты и новые [12]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Истинная аномалия v найдется как $v(t) = n\cdot t$, где n – среднее движение точки m_1. Искомый интеграл выразится в данной системе координат как:

$$v^2 = 2U - H, \quad (10)$$

где $v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$ – полная скорость СИСЗ в новой системе координат; $U = \dfrac{1}{2}n^2(\xi+\eta) + f_E(\dfrac{m_0}{r_0} + \dfrac{m_1}{r_1})$ – потенциальная энергия; $r_1^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2$, $r_2^2 = (\xi - b)^2 + \eta^2$ – радиус-векторы гравитирующих тел; $a = \dfrac{m_1 r}{m_0 + m_1}$, $b = \dfrac{m_0 r}{m_0 + m_1}$ – приведенные массы; $r = \overrightarrow{m_0 m_1}$ – расстояние между гравитирующими телами; H – постоянная энергии.

Обратив матрицу перехода из (9) получим:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & \sin(v) \\ \cos(v) & -\sin(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Это выражение позволит нам пересчитать массив координат (x, y) в (ξ, η). Конечно, после преобразования интеграл станет зависеть явно от времени, так как от времени зависит $v(t) = n \cdot t$. Строго говоря, результат преобразования уже не может называться первым интегралом, но мы исследовали его регулярность.

Псевдоинтеграл периодичен, причем для обеих моделей наиболее нерегулярное поведение (в виде хаотичных всплесков) наблюдается в окрестности сшивания решений. Применение численно-аналитического метода позволяет сократить их высоту в среднем на 13.5%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель и алгоритм ее реализации отличаются следующими основными преимуществами:

1) Орбита Луны определяется физически корректно, при этом вычисления проводятся путем суммирования ряда Хилла-Брауна, который быстро сходится [11-12].

2) Разбиение решения на интервалы позволяет легко управлять точностью и скоростью вычислений, при этом смешанная система решается на порядок быстрее (на системе класса AMD Phenom II, 4 Gb ОЗУ расчет на указанном интервале 200 t занимает не более 1-2 *с*, по сравнению с 4-5 *с* классического метода). Выигрыш в скорости особенно заметен при дальнейшем увеличении отрезка интегрирования.

3) Метод работает при значении погрешности внутреннего численного алгоритма (например, в MathCAD это системная переменная TOL), равной 10^{-5} и менее. Аналогичная погрешность стандартной модели должна быть не менее 10^{-7} для достижения сравнимой точности.

4) Данная модель является более физически корректной, так как учитывает основные гравитационные возмущения [11].

Учитывая это, можно рекомендовать усовершенствованную математическую модель движения СИСЗ, как и алгоритм ее реализации для проведения численных экспериментов по отысканию орбит в окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигель К.* Лекции по небесной механике / К. Зигель, Ю. Мозер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

2. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли / Е. П. Аксенов. - М.: Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 360 с.

3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. – М.: Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1978. – 312 с.

4. *Barden B. T.* Fundamental Motions near Collinear Libration Points and their Transitions / B. T. Barden, K. C. Howell // Journal of the Astronautical Sciences. – 1998. – №46 (4). – P. 361–378.

5. *Domingo V.* The SOHO Mission. An Overview / V. Domingo [et al.] // Solar Physics. – 1995. – V. 162, № 1–2. – P. 1–37.

6. Fermi Observations of High-Energy Gamma-Ray Emission from GRB 080916C. The Fermi LAT and Fermi GBM Collaborations / M. S. Briggs [et al.] // Science. – 2009. – V. 323, № 5922. – P. 1688–1693.

7. *Harwit M.* The Herschel Mission / M. Harwit // Advances in Space Research. – 2004. – № 34 (3). – P. 568–572.

8. *Kordylewski K.* Photographische Untersuchungen des Librationspunktes L5 im System Erde-Mond / K. Kordylewski // Acta Astronomica. – 1961. – № 11. – P. 165–169.

9. *Koon W. S.* Dynamical Systems, the Three-Body Problem, and Space Mission Design / W. S. Koon // International Conference on Differential Equations. – 2000. – Berlin: World Scientific. – P. 1167–1181.

10. *Маршал К.* Задача трёх тел / К. Маршал. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 640 с.

11. *ДеприˆА.* Движение Луны в пространстве / А. Деприˆ// Физика и астрономия Луны. – М.: Мир, 1973. – С. 9–36.

12. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей. – М.: Глав. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука». – 1982. – 656 с.

13. *Standish E. M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 [Electronic resource] / E. M. Standish // JPL Interoffice Memorandum – 1998. – 312.F-98-048. – International Astronomical Union Commission 4 : (Ephemerides), 1998. – http://www.iau-comm4.jpl.nasa.gov/de405iom/de405iom.pdf

Ерёменко Алексей Павлович – аспирант кафедры информационных систем и технологий; Вологодский государственный технический университет. Тел. 8-921-538-0431. E-mail: lagrangepoint5@yahoo.com

Горбунов Вячеслав Алексеевич – зав. кафедрой информационных систем и технологий, д. ф.–м. н., профессор, начальник управления информационных технологий, Вологодский государственный технический университет. Тел. (8172) 72-95-71. E-mail: vagor@mh.vstu.edu.ru

Eremenko A. P. – postgraduate student, the dept. of Information System and Technologies, Vologda State Technical University. Tel. 8-921-538-0431. E-mail: lagrangepoint5@yahoo.com

Gorbunov V. A. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vologda State Technical University. Tel. (8172) 72-95-71. E-mail: vagor@mh.vstu.edu.ru