УДК 517.98

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ВОЗМУЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 30.11.2011 г.

Аннотация. В гибельтовых пространствах рассматриваются задачи управления нелинейными системами со спектральным параметром, внешним возмущением и разрывным оператором. Оператор в уравнении состояния равен сумме линейного фредгольмова отображения нулевого индекса и разрывного компактного оператора. Получена теорема о разрешимости для исследуемых задач. Общие результаты применяются к задачам управления и распределенными системами эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью с несимметричной дифференциальной частью при наличии внешнего возмущения для установления разрешимости таких задач.
Ключевые слова: задачи управления, внешнее возмущение, спектральный параметр, разрывной оператор, тройка «возмущение-управление-состояние».
Annotation. In gibeltovyh spaces are considered the control problem of nonlinear systems with a spectral parameter, the external perturbation and discontinuous operator. The operator in the equation of state is the sum of a linear Fredholm mapping of index zero and discontinuous compact operator. A result on the solubility of the studied tasks. The general results are applied to problems of management and distributed systems of elliptic type with a spectral parameter and a discontinuous phase of variable nonlinearity with asymmetric part of the differential in the presence of an external perturbation to determine the solvability of such problems.
Keywords: task management, the external perturbation, the spectral parameter, discontinuous operator, three «disturbance-control-state»

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] в банаховых пространствах рассматривались задачи оптимального управления системами с разрывными операторами и содержащими дополнительный скалярный параметр, называемый спектральным. В работе [2] изучался вопрос управления такими системами при наличии внешнего возмущения. Полученные вариационным методом общие результаты применены к задачам управления для операторов эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Данная работа является продолжением исследований [1], [2] и посвящена разрешимости задачи управления с внешним возмущением для некоторого класса уравнений с разрывным оператором и спектральным параметром в гильбертовом пространстве. При этом устанавливается существование таких решений абстрактных уравнений, которые являются точками непрерывности оператора уравнения. Методом регуляризации и теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей [3] получено достаточное условие непустоты множества допустимых троек «возмущение – управление – состояние» для таких задач. Общая теорема применяется к исследованию управляемых распределенных систем эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью с несимметричной дифференциальной частью при наличии внешнего возмущения. В отличие от работ [1], [2] в данной работе рассматривается существенно другой класс задач управления для уравнений с разрывными операторами. Ранее уравнения со спектральным параметром и разрывным оператором рассматривались в работах [4]–[10].

© Потапов Д. К., 2012

1. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Управляемая система в гильбертовом пространстве H описывается уравнением состояния, содержащим возмущение, вида

$$Au - \lambda Tu = Bv + Dw. \qquad (1)$$

Здесь $A: H \to H$ – линейное фредгольмово отображение нулевого индекса, что означает замкнутость области значений $R(A)$ оператора A, конечномерность ядра $\ker A$ и равенство размерностей $\ker A$ и $\ker A^*$; λ – положительный параметр; $T: H \to H$ разрывное, компактное отображение (т. е. множество TG предкомпактное в H для любого ограниченного подмножества G множества H), удовлетворяющее условию

$$\lim_{||u||\to+\infty} \frac{Tu}{||u||} = 0; \qquad (2)$$

оператор $B: U \to H$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (1); оператор $D: W \to H$ линейный и ограниченный, W – банахово пространство возмущений, возмущение $w \in W$. Кроме того, предполагается, что оператор A принадлежит классу $(S)_+$ [11], т. е. для любой последовательности $(u_n) \subset H$ из слабой сходимости u_n к u и неравенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(Au_n, u_n - u) \le 0$ следует сильная сходимость (u_n) к u в H. Здесь и далее через (z, x) будем обозначать скалярное произведение элементов z, x из H. Дадим определения, используемые в данной работе.

Определение 1. Элемент $u \in H$ называется точкой разрыва оператора $T: H \to H$, если найдутся последовательность $(u_n) \subset H$, сильно сходящаяся к u, и вектор $h \in H$ такие, что (Tu_n, h) не сходится к (Tu, h), т. е. u не является точкой деминепрерывности оператора T.

Определение 2. Элемент $u \in H$ называется сильно регулярной точкой для оператора $T: H \to H$, если существует вектор $h \in H$ такой, что $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}(T(u+t), h) < 0$.

Определение 3. Секвенциальным замыканием локально ограниченного отображения $T: E_1 \to E_2$ (E_1, E_2 – банаховы пространства) называется отображение ST из E_1 в E_2 (вообще говоря, многозначное), значение STx ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида (Tx_n), где $x_n \to x$ в E_1.

Определение 4. Обобщенным решением уравнения (1) при фиксированных управлении v и возмущении w называется элемент $u \in H$, удовлетворяющий включению $Au - Bv - Dw \in \lambda STu$, где ST – секвенциальное замыкание оператора T.

Определение 5. Классическим решением уравнения (1) при фиксированных управлении v и возмущении w называется элемент $u \in H$, если $Au - Bv - Dw = \lambda Tu$.

Допускается, что для некоторых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ система (1) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. возможен сингулярный случай [12].

Определение 6. Упорядоченная тройка $(\hat{w}, \hat{v}, \hat{u})$ называется допустимой тройкой «возмущение – управление – состояние» для системы (1), если $\hat{w} \in W$, $\hat{v} \in U_{ad}$, а $\hat{u}$ – решение уравнения (1) при $w = \hat{w}$ и $v = \hat{v}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

1) A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в пространство H, фредгольмов, нулевого индекса и принадлежит классу $(S)_+$;

2) отображение $T: H \to H$ разрывное, компактное и удовлетворяет условию (2);

3) существует линейный изоморфизм Λ между $\ker A$ и $\ker A^*$ такой, что для любой последовательности $(u_n) \subset H$ с $||u_n|| \to +\infty$ и $||u_n||^{-1} \cdot u_n \to u \in \ker A$ имеет место неравенство $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-\lambda Tu_n, \Lambda u) < (Bv + Dw, \Lambda u)$ или же для каждой такой последовательности $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-\lambda Tu_n, \Lambda u) > (Bv + Dw, \Lambda u)$;

4) любая точка разрыва оператора T сильно регулярная для $Au - \lambda Tu$;

5) оператор $B: U \to H$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ непусто;

6) оператор $D: W \to H$ линейный и ограниченный, пространство возмущений W банахово.

Тогда для любых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой непрерывности оператора T.

Доказательство теоремы 1.

Как и в работе [13], при выполнении условий 1)–3) теоремы 1 и любых фиксированных управлении v, возмущении w устанавливается, что

$$Au - Bv - Dw \in \lambda STu, \qquad (3)$$

где ST – секвенциальное замыкание оператора T. Данное включение означает, что найдется элемент $u \in H$, который является обобщенным решением уравнения (1). Таким образом, для любых $v \in U_{ad}$, $w \in W$ существует обобщенное решение уравнения (1).

В силу [13] при выполнении условия 4) теоремы 1 и любых фиксированных управлении v, возмущении w получаем, что u, удовлетворяющее (3), точка непрерывности оператора T. Для точки непрерывности u оператора T значение STu совпадает с Tu и в этом случае включение (3) совпадает с уравнением $Au - Bv - Dw = \lambda Tu$, т. е. u – классическое решение уравнения (1) и точка непрерывности оператора T.

Итак, для любых управления $v \in U_{ad}$ и возмущения $w \in W$ существует классическое решение уравнения (1), являющееся точкой непрерывности оператора T. Достаточное условие непустоты множества допустимых троек «возмущение – управление – состояние» для системы (1) получено. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Положив в уравнении (1) $v(x) \equiv 0$ и $w(x) \equiv 0$, т. е. исключив из рассмотрения управление и возмущение, получим результат о разрешимости уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором, где в отличие от работ [4]–[10] квазипотенциальность оператора T не предполагается.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ

В ограниченной области $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ ($0 < \alpha \le 1$) рассматривается управляемая распределенная система с внешним возмущением вида

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)) + Bv(x) + Dw(x),\ x \in \mathbf{\Omega}, \qquad (4)$$

$$Gu|_{\Gamma} = 0. \qquad (5)$$

Здесь L – равномерно эллиптический дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij}, b_j \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\mathbf{\Omega}), c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\mathbf{\Omega})$; λ – положительный параметр; функция $g : \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измеримая, и для почти всех $x \in \mathbf{\Omega}$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на R разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall\, u \in \mathbf{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf_{\eta \to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta \to u} g(x,\eta)$, $|g(x,u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\mathbf{\Omega})$, $q > \dfrac{2n}{n+2}$; оператор $B : U \to \mathbf{L}_q(\mathbf{\Omega})$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений, функция $v(x)$ в уравнении (4) играет роль управления, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (4)–(5); оператор $D : W \to \mathbf{L}_q(\mathbf{\Omega})$ линейный и ограниченный, W – банахово пространство возмущений, функция $w(x)$ в уравнении (4) играет роль возмущения, возмущение $w \in W$. Оператор граничного условия $Gu(x)$ равен либо $u(x)$ (условие Дирихле), либо $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \cos(n, x_j)$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ (условие Неймана), либо $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)$ с функцией $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательной и не равной тождественно нулю на Γ (третье краевое условие).

Применив теорему 1 к задаче (4)–(5), получим, что множество допустимых троек «возмущение – управление – состояние» для системы (4)–(5) непусто.

Замечание 2. В отсутствии управления и возмущения ($v \equiv 0$, $w \equiv 0$) получим результат о разрешимости основных краевых задач для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывными нелинейностями без предположения формальной самосопряженности дифференциальной части уравнения, где в отличие от работ [4, 5, 7, 10] не требуется $b_j(x) \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов Д. К.* Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами // Труды ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – 1. – С. 190–200.

2. *Потапов Д. К.* Задачи управления для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором при наличии возмущений // Журн. СФУ. – Сер. Матем. и физ. – 2012. – Т. 5. – Вып. 2. – С. 239–245.

3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: Либроком, 2011. – 224 с.

4. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – 4. – С. 911–919.

5. *Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. С.-Петерб. ун-та. – Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2004. – Вып. 4. – С. 125–132.

6. *Potapov D. K.* Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators // J. Math. Sciences. – 2007. – Vol. 144. – № 4. – P. 4232–4233.

7. *Потапов Д. К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. – СПб.: ИБП, 2008. – 99 с.

8. *Потапов Д. К.* Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т. 3. – 1. – С. 43–46.

9. *Потапов Д. К.* Оценивание норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. – Вып. 4. – С. 41–45.

10. *Потапов Д. К.* Бифуркационные задачи с разрывными нелинейностями. – СПб.: Изд-во ИБП, 2012. – 119 с .

11. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // Итоги науки и техн. – Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 37. – С. 3–87.

12. *Лионс Ж. Л.* Управление сингулярными распределенными системами. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

13. *Павленко В. Н., Винокур В. В.* Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54. – 3. – С. 349–363.

Потапов Дмитрий Константинович – кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления, доцент кафедры высшей математики. Тел. 8-905-256-03-10. E-mail: potapov@apmath.spbu.ru, dkpotapov@mail.ru

Potapov Dmitry K. – Candidate of physical and mathematical sciences, St. Petersburg State University, faculty of applied mathematics - managerial processes,the assistant professor of higher mathematics. Tel. 8-905-256-03-10. E-mail: potapov@apmath.spbu.ru, dkpotapov@mail.ru