МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.688

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ И СХЕМЫ ГОРНЕРА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ ВНЕШНЕГО ЗАДАЮЩЕГО И ВОЗМУЩАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЙ

М. М. Безрядин, Г. И. Лозгачев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2012 г.

Аннотация. Рассмотрен метод построения передаточной функции модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы. Метод использует теорему Безу и схему Горнера и отличается алгоритмической простотой.
Ключевые слова: алгоритмы, построение модальных регуляторов
Abstract. In article is described a method of constructing the transfer function of the modal control on the transfer function of a closed system. The method uses the Bezout theorem and Horner's rule and is characterized by algorithmic simplicity.
Keywords: algorithms, construction of modal regulators

ВВЕДЕНИЕ

Задача компенсации внешних возмущений является одной из наиболее актуальных задач современной теории автоматического управления. Этой проблеме посвящен ряд работ [1–5], в которых рассмотрены различные схемы построения систем управления.

Данная работа является продолжением работ [6–9] в которых предлагается алгоритм построения регулятора для свободного движения. В настоящей работе разработан метод построения модальных робастных регуляторов при наличии задающих и возмущающих воздействий, при этом предполагается, что задающее и возмущающее воздействие имеют волновую структуру [10] Благодаря алгоритмической простоте данный метод достаточно удобен для реализации его на ЭВМ.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим замкнутую систему автоматического управления, изображенную на рис. 1

Обозначим через $\Re_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел.

© Безрядин М. М., Лозгачев Г. И., 2012

Пусть задана передаточная функция расчетного объекта

$$W_{об}(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \tag{1}$$

где $P_1(p) \in \Re_m$ и $P_2(p) \in \Re_n$.

Условие физической реализуемости накладывает ограничение на степени полиномов $m \le n$.

Изображение задающего воздействия

$$X(p) = \frac{R_1(p)}{R_2(p)} \tag{2}$$

где $P_1(p) \in \Re_q$ и $P_2(p) \in \Re_r$.

Изображение внешнего возмущения задано в виде

$$F(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)} \tag{2}$$

где $G_1(p) \in \Re_g$ и $G_2(p) \in \Re_h$.

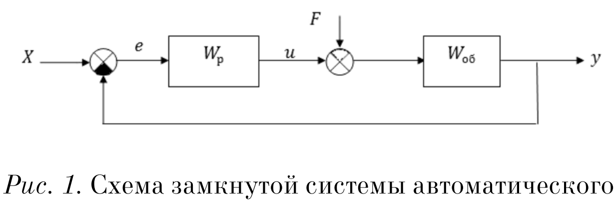

Рис. 1. Схема замкнутой системы автоматического управления

Необходимо найти передаточную функцию $W_p(p)$ реализуемого регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{з.с} = \frac{W_{об}(p)W_p(p)}{1+W_{об}(p)W_p(p)} \qquad (4)$$

и подавляющего действие внешнего возмущения $F(p)$.

Для решения поставленной задачи, необходимо определить передаточную функцию регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы и подавляющего внешнее возмущение $F(p)$. Регулятор необходимо найти в общем виде.

Представим передаточную функцию замкнутой системы в виде частного двух полиномов $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$

$$W_{з.с} = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} \qquad (5)$$

где $Q_1(p) \in \Re_l$ и $Q_2(p) \in \Re_k$ полиномы степени $l \le k$.

Полином $Q_2(p)$ будем считать желаемым полиномом. Полином $Q_1(p)$ задан с точностью до коэффициентов, которые будут определены в процессе построения передаточной функции регулятора.

Введем в рассмотрение полиномы $N_1(p)$, $N_2(p)$, $N_{ост}(p)$, $L_{ост}(p)$, $T_1(p)$, $T_{ост}(p)$, $S_1(p)$, $S_{ост}(p)$.

Полином $N_1(p)$ есть частное от деления полинома $[Q_2(p)-Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$. Полином $N_2(p)$ есть частное от деления полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$. Полином $T_1(p)$ есть частное от деления полинома $[Q_2(p)-Q_1(p)]$ на полином $R_2(p)$. Полином $S_1(p)$ есть частное от деления полинома $N_1(p)$ на полином $G_2(p)$.

Полином $N_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $[Q_2(p)-Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$. Полином $L_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$. Полином $T_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $[Q_2(p)-Q_1(p)]$ на полином $R_2(p)$. Полином $S_{ост}(p)$ есть остаток от деления полинома $N_1(p)$ на полином $G_2(p)$. То есть

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{P_2(p)} = N_1(p) + \frac{N_{ост}(p)}{P_2(p)} \qquad (6)$$

$$\frac{Q_1(p)}{P_1(p)} = N_1(p) + \frac{L_{ост}(p)}{P_1(p)} \qquad (7)$$

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{R_2(p)} = T_1(p) + \frac{T_{ост}(p)}{T_2(p)} \qquad (8)$$

$$\frac{N_1(p)}{G_2(p)} = S_1(p) + \frac{S_{ост}(p)}{G_2(p)}. \qquad (9)$$

Теорема 1. Если полиномы $Q_2(p)-Q_1(p)$, $Q_1(p)$, $Q_2(p)-Q_1(p)$ и $N_2(p)$ делятся соответственно на полиномы $P_2(p)$, $P_1(p)$, $R_2(p)$ и $G_2(p)$ без остатка, то существует передаточная функция регулятора, обеспечивающего желаемого расположение корней характеристического полинома замкнутой системы и обеспечивающего воспроизведение $x(t)$ без остаточной ошибки.

Передаточная функция регулятора при этом имеет вид

$$W_p(p) = \frac{N_1(p)}{N_2(p)}. \qquad (10)$$

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы рассмотрим характеристический полином замкнутой системы с регулятором (13)

$$D(p) = N_2(p)P_2(p) + N_1(p)P_1(p).$$

В том случае, если деление (6) и (7) происходит без остатка, то

$$N_2(p)P_2(p) = Q_2(p) - Q_1(p)$$

$$N_1(p)P_1(p) = Q_1(p).$$

Таким образом

$$D(p) = Q_2(p) - Q_1(p) + Q_1(p) = Q_2(p).$$

Для доказательства второй части рассмотрим изображение ошибки управления:

$\varepsilon(p) = x(p) - y(p)$.

$$y(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}[U(p)-F(p)] =$$

$$= \frac{P_1(p)}{P_2(p)}\left[\frac{N_1(p)}{N_2(p)}(x(p)-y(p)) + F(p)\right] =$$

$$= \frac{P_1(p)N_1(p)}{P_2(p)N_2(p)}x(p) - \frac{P_1(p)N_1(p)}{P_2(p)N_2(p)}y(p) + \frac{P_1(p)}{P_2(p)}F(p).$$

Перенося $y(p)$ в левую часть равенства получаем

$$y(p)\left[\frac{N_2(p)P_2(p)+P_1(p)N_1(p)}{N_2(p)P_2(p)}\right] =$$

$$= \frac{P_1(p)N_1(p)}{P_2(p)N_2(p)}x(p) + \frac{P_1(p)}{P_2(p)}F(p).$$

Откуда

$$y(p) = \frac{P_1(p)N_1(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} x(p) + \\ + \frac{P_1(p)N_2(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} F(p).$$

Подставляя $y(p)$ в выражение для ошибки получим

$$\varepsilon(p) = x(p) - y(p) = \\ = x(p) - \frac{P_1(p)N_1(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} x(p) - \\ \frac{P_1(p)N_2(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} F(p) = \\ = x(p)\left[1 - \frac{P_1(p)N_1(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)}\right] - \\ - \frac{P_1(p)N_2(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} F(p) = \\ = x(p)\left[\frac{N_2(p)P_2(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)}\right] - \\ - \frac{P_1(p)N_2(p)}{N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p)} F(p).$$

Учитывая, что

$$N_2(p)P_2(p) + P_1(p)N_1(p) = Q_2(p)$$

и

$$N_2(p)P_2(p) = Q_1(p)$$

Получим

$$\varepsilon(p) = x(p)\left(1 - \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}\right) + \\ + \frac{P_1(p)N_2(p)}{Q_2(p)} F(p) = \\ = \frac{R_1(p)}{R_2(p)}\left(\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{Q_2(p)}\right) - \\ - \frac{P_1(p)N_2(p)}{Q_2(p)} \frac{G_1(p)}{G_2(p)} = \\ = \frac{R_1(p)}{Q_2(p)}\left[\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{R_2(p)}\right] - \\ - \frac{P_1(p)G_1(p)}{Q_2(p)}\left[\frac{N_2(p)}{G_2(p)}\right].$$

Если в (8) и (9) осуществляется деление без остатка, то

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{R_2(p)} = T_1(p),$$

$$\frac{N_2(p)}{G_2(p)} = S_1(p)$$

и выражение для ошибки управления принимает вид

$$\varepsilon(p) = \frac{R_1(p)}{Q_2(p)} T_1(p) - \frac{P_1(p)G_1(p)}{Q_2(p)} S_1(p).$$

Таким образом, в знаменателе остается только желаемый характеристический полином замкнутой системы, а, следовательно, $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. Для того, чтобы нашлись коэффициенты полинома $Q_1(p)$, при которых происходит деление без остатка $Q_2(p) - Q_1(p)$ на $P_2(p)$, $Q_2(p) - Q_1(p)$ на $R_2(p)$, $Q_1(p)$ на $P_1(p)$, $N_2(p)$ на $G_2(p)$ необходимо, чтобы выполнялось условие $k \geq (2n-1) + r + g_2$, и полиномы $P_2(p)$ и $P_1(p) * R_2(p)$ не имели общих делителей,

Доказательство

Зададим полиномы $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ как

$$Q_1(p) = \sum\nolimits_{i=0}^{l} d_i p^{l-i}, \; Q_2(p) = \sum\nolimits_{i=0}^{k} a_i p^{k-i}.$$

Полиномы $P_2(p)$ $P_1(p)$ и $R_2(p)$ представим в виде

$$P_2(p) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} (p - \lambda_i), \\ P_1(p) = \prod\nolimits_{i=1}^{m} (p - v_i), \\ P_2(p) = \prod\nolimits_{i=1}^{r} (p - \mu_i).$$

Рассмотрим три первых равенства

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{P_2(p)} = \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} - \\ - \frac{Q_1(p)}{P_2(p)} = N_2(p) + \frac{N_{\text{ост}}(p)}{P_2(p)}, \\ \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} = N_1(p) + \frac{L_{\text{ост}}(p)}{P_1(p)}, \\ \frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{R_2(p)} = T_1(p) + \frac{T_{\text{ост}}(p)}{T_2(p)}.$$

Применим схему Горнера для деления полиномов. Разделим $Q_2(p) - Q_1(p)$ на $p - \lambda_1$. Получим

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{p - \lambda_1} = Q_2^1(p) - Q_1^1(p) + \frac{a_k^1 - d_l^1}{p - \lambda_1},$$

где $Q_1^1(p) = \sum\limits_{i=0}^{l-1} d_i^1 p^{l-1-i}$, $d_0^1 = d_0$, $d_i^1 = d_i + \lambda_1 d_{i-1}^1$,

$i = \overline{1..l}, Q_2^1(p) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i^1 p^{k-1-i}, a_0^1 = a_0, a_i^1 = a_i + \lambda_1 a_{i-1}^1$,

$i = \overline{1..k}$, в частности

$$d_l^1 = \sum_{i=0}^{l} \lambda_1^i d_{l-i} ,$$

$$a_k^1 = \sum_{i=0}^{k} \lambda_1^i a_{k-i} .$$

Продолжим деление, разделив $\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{p - \lambda_1}$ на $p - \lambda_2$, получим

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)} = $$

$$= \frac{Q_2^1(p) - Q_1^1(p) + \dfrac{a_k^1 - d_l^1}{p-\lambda_1}}{p-\lambda_2} =$$

$$= Q_2^2(p) - Q_1^2(p) + \frac{a_{k-1}^2 - d_{l-1}^2}{p-\lambda_2} +$$

$$+ \frac{a_k^1 - d_l^1}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)},$$

где $Q_1^2(p) = \sum_{i=0}^{l-2} d_i^2 p^{l-2-i}$, $d_0^2 = a_0^2$, $d_i^2 = d_i^1 + \lambda_2 d_{i-1}^2$, $i = \overline{1..l-1}$, $Q_2^2(p) = \sum_{i=0}^{k-2} a_i^2 p^{k-2-i}$, $a_0^2 = a_0^1$, $a_i^2 = a_i^1 + \lambda_2 a_{i-1}^2$, $i = \overline{1..k-1}$

Будем последовательно продолжать деление на все биномы $p - \lambda_1$. Получим

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)...(p-\lambda_n)} =$$

$$= Q_2^n(p) - Q_1^n(p) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{k-i}^{i+1} - d_{l-i}^{i+1}}{\prod_{j=1}^{n-i}(p-\lambda_{i+1})},$$

где $d_{l-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{l-i} \lambda_{i+1}^j d_{l-i-j}^i$, $a_{k-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{k-i} \lambda_{i+1}^j a_{k-i-j}^i$.

Если $a_{k-i}^{i+1} - d_{l-i}^{i+1} = 0$ при любых $i = \overline{0..n-1}$ то многочлен $Q_2(p) - Q_1(p)$ делится без остатка на $(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)...(p-\lambda_n) = P_2(p)$. Таким образом, получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов d_i полинома $Q_1(p)$.

$$a_{k-i}^{i+1} - d_{l-i}^{i+1} = 0 ,\ i = \overline{0..n-1} .$$

Аналогично рассмотрим

$$\frac{Q_1(p)}{P_1(p)} = \tilde{Q}_1^m(p) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tilde{d}_{i-1}^{i+1}}{\prod_{i=0}^{m-i}(p-\upsilon_{i+1})},$$

$$\frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{R_2(p)} = \tilde{Q}_2^r(p) - \tilde{Q}_1^r(p) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\overline{a}_{k-i}^{i+1} - \overline{d}_{l-i}^{i+1}}{\prod_{j=1}^{r-i}(p-\mu_{i+1})}$$

где

$$\tilde{d}_{l-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{l-i} \upsilon_{i+1}^j \tilde{d}_{l-i-j}^i ,$$

$$\overline{a}_{k-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{k-i} \mu_{i+1}^j \overline{a}_{k-i-j}^i ,$$

$$\overline{d}_{l-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{l-i} \mu_{i+1}^j \overline{d}_{k-i-j}^i ,$$

$$\overline{d}_{l-i}^{i+1} = \sum_{j=0}^{l-i} \mu_{i+1}^j j_{i+1} \overline{d}_{k-i-j}^i .$$

В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов d_i полинома $Q_1(p)$.

$$\begin{cases} a_{k-i}^{i+1} - d_{l-i}^{i+1} = 0,\ i = \overline{0..n-1}, \\ \tilde{d}_{l-i}^{i+1} = 0,\ i = \overline{0..m-1}, \\ \overline{a}_{k-i}^{i+1} - \overline{d}_{l-i}^{i+1} = 0,\ i = \overline{0..r-1}. \end{cases}$$

Предположим, что $P_2(p)$ имеет общий делитель $(p-\lambda^*)$ с $P_1(p)$. Тогда возьмем $\lambda_1 = \lambda^*$, $\upsilon_1 = \lambda^*$. Рассмотрим два уравнения

$$\begin{cases} a_k^1 - d_l^1 = 0 \\ \tilde{d}_l^1 = 0 \end{cases}$$

отмечая при этом, что $d_l^1 = \sum_{i=0}^{l} \lambda_1^i d_{l-i}$, $\tilde{d}_l^1 = \sum_{j=0}^{l} \upsilon_1^j d_{l-j}$ получаем, что

$$\sum_{j=0}^{l} (\lambda^*)^j d_{l-j} = a_k^1 \neq 0$$

$$\sum_{i=0}^{l} (\lambda^*)^i d_{l-i} = 0.$$

Таким образом, если $P_2(p)$ имеет общий делитель $(p-\lambda^*)$ с $P_1(p)$, то получаем противоречие и система является не разрешимой.

Аналогично будет, если $P_2(p)$ имеет общий делитель $(p-\lambda^*)$ с $R_2(p)$.

В противном случае, получаем разрешимую систему из $n+m+r$ линейных алгебраических уравнения относительно l неизвестных.

Решая ее, находим значение коэффициентов полинома $N_2(p)$ которые будут содержать в себе оставшиеся $l+1-n+m+r$ неизвестных коэффициентов d_i полинома $Q_1(p)$.

Подставим выражение полинома $N_2(p)$ в

$$\frac{N_2(p)}{G_2(p)} = S_1(p) + \frac{S_{\text{ост}}(p)}{G_2(p)}.$$

Произведя деление, получим полином $S_{\text{ост}}(p)$ коэффициенты которого также выражены через $l+1-n-m-r$ неизвестные коэффициенты d_i полинома $Q_1(p)$.

Количество коэффициентов полинома $S_{>AB}(p)$ равно g_2. Для того, чтобы $N_2(p)$ делился на $G_2(p)$ необходимо, чтобы все коэффициенты полинома $S_{>AB}(p)$ были равны 0. Таким образом, опять получаем систему из g_2 линейных алгебраических уравнений с $l+1-n-m-r$ неизвестных.

В итоге, получаем ограничение на степень полиномов

$$k \geq l = n+m+r+g_2-1 \geq \\ \geq (2n-1)+r+g_2.$$

Для нахождения передаточной функции регулятора воспользуемся теоремой Безу и схемой Горнера.

Представим полиномы $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ как

$$Q_1(p) = \sum_{i=0}^{l} d_i p^{l-i},$$

$$Q_2(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i p^{k-i},$$

Полиномы $P_2(p)$ $P_1(p)$ и $R_2(p)$ представим в виде

$$P_2(p) = \prod_{i=1}^{n} (p-\lambda_i),$$

$$P_1(p) = \prod_{i=1}^{m} (p-\upsilon_i),$$

$$R_2(p) = \prod_{i=1}^{r} (p-\mu_i).$$

При этом, возможно два случая

• Полиномы $P_2(p)$, $P_1(p)$, $R_2(p)$ не имеют кратных корней.

• Хотя бы один из полиномов имеет кратный корень

Рассмотрим первый случай:

Если полином $P_2(p)$ не содержит кратных корней, то для того, чтобы $Q_2(p)-Q_1(p)$ делился на $P_2(p)$ необходимо и достаточно, чтобы он делился на каждый $(p-\lambda_i)$, $i=1..n$. Аналогично может быть сформулировано условие делимости $Q_2(p)-Q_1(p)$ на $R_2(p)$ и $Q_1(p)$ на $P_1(p)$. Согласно теореме Безу остаток от деления многочлена остаток от деления многочлена $X(p)$ на двучлен $p-a$ равен $X(a)$, а следовательно чтобы $X(p)$ делился на двучлен $p-a$ необходимо и достаточно, чтобы $X(a)=0$. Исходя из этого получаем систему алгебраических уравнений

$$Ad = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1^l & \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^l & \lambda_n^{l-1} & \dots & \lambda_n & 1 \\ \upsilon_1^l & \upsilon_1^{l-1} & \dots & \upsilon_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \upsilon_m^l & \upsilon_m^{l-1} & \dots & \upsilon_m & 1 \\ \mu_1^l & \mu_1^{l-1} & \dots & \mu_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_r^l & \mu_r^{l-1} & \dots & \mu_r & 1 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} d_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} Q_2(\lambda_1) \\ \dots \\ Q_2(\lambda_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ Q_2(\mu_1) \\ \dots \\ Q_2(\mu_r) \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, находим значение неизвестных коэффициентов полинома $Q_1(p)$

Рассмотрим второй случай: Предположим, что многочлен $P_2(p)$ имеет кратный корень λ^* кратности η. Если $Q_2(p)-Q_1(p)$ делился на $P_2(p)$, то $Q_2(p)-Q_1(p)$ должно делится на $(p-\lambda^*)^\eta$. Воспользуемся схемой Горнера и произведем последовательно деление $Q_2(p)-Q_1(p)$ на $(p-\lambda^*)$ η раз.

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{(p-\lambda^*)} = \\ = Q_2^1(p) - Q_1^1(p) + \frac{a_k^1 - d_l^1}{(p-\lambda^*)},$$

где $Q_1^1(p) = \sum_{i=0}^{l-1} d_i^1 p^{l-1-i}$, $d_0^1 = d_0$, $d_i^1 = d_i + \lambda^* d_{i-1}^1$,

$i=\overline{1..l}, Q_2^1(p)=\sum_{i=0}^{k-1} a_i^1 p^{k-1-i}, a_0^1=a_0, a_i^1=a_i+\lambda^* a_{i-1}^1$, $i=\overline{1..k}$, $a_k^1=Q_2(\lambda^*)$, $d_l^1=Q_1(\lambda^*)$.

Для того, чтобы $Q_2(p)-Q_1(p)$ делился на $(p-\lambda^*)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_k^1-d_l^1=0$. Продолжим деление дальше

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{(p-\lambda^*)^2}=\frac{Q_2^1(p)-Q_1^1(p)}{(p-\lambda^*)}= =Q_2^2(p)-Q_1^2(p)+\frac{a_k^2-d_l^2}{(p-\lambda^*)},$$

где $Q_1^2(p)=\sum_{i=0}^{l-2} d_i^2 p^{l-2-i}$, $d_0^2=d_0^1$, $d_i^2=d_i^1+\lambda^* d_{i-1}^2$, $i=\overline{1..l}, Q_2^2(p)=\sum_{i=0}^{k-2} a_i^2 p^{k-2-i}, a_0^2=a_0^1, a_i^2=a_i^1+\lambda^* a_{i-1}^2$, $i=\overline{1..k}$, $a_k^2=Q_2^1(\lambda^*)$, $d_l^2=Q_1^1(\lambda^*)$.

Для того, чтобы $Q_2(p)-Q_1(p)$ делился на $(p-\lambda^*)^2$ необходимо и достаточно, чтобы $a_k^2-d_l^2=0$, $a_k^1-d_l^1=0$

Продолжая рассуждения, получим, что

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{(p-\lambda^*)^\eta}=\frac{Q_2^1(p)-Q_1^1(p)}{(p-\lambda^*)^{\eta-1}}= =Q_2^{\eta-1}(p)-Q_1^{\eta-1}(p)+\frac{a_k^\eta-d_l^\eta}{(p-\lambda^*)}$$

где $Q_1^\eta(p)=\sum_{i=0}^{l-\eta} d_i^\eta p^{l-\eta-i}, d_0^\eta=d_0^{\eta-1}, d_i^\eta=d_i^{\eta-1}+\lambda^* d_{i-1}^\eta$, $i=\overline{1..l}$, $Q_2^\eta(p)=\sum_{i=0}^{k-\eta} a_i^\eta p^{k-\eta-i}$, $a_0^\eta=a_0^{\eta-1}$, $a_i^\eta=a_i^{\eta-1}+\lambda^* a_{i-1}^\eta$, $i=\overline{1..k}$, $a_k^\eta=Q_2^{\eta-1}(\lambda^*)$, $d_l^\eta=Q_1^{\eta-1}(\lambda^*)$.

Для того, чтобы $Q_2(p)-Q_1(p)$ делился на $(p-\lambda^*)^\eta$ необходимо и достаточно, чтобы $a_k^\eta-d_l^\eta=0,..,a_k^2-d_l^2=0$, $a_k^1-d_l^1=0$. Таким образом, получаем η уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $Q_1(p)$.

Для оставшихся некратных корней применим рассуждения из случая 1. В итоге, сформируем систему уравнений, решая которую можно найти неизвестные коэффициенты полинома $Q_1(p)$.

Замечание 1. Исходя из приведенного алгоритма, можно отметить, что если полиномы $P_2(p)$, $P_1(p)$ и $R_2(p)$, $G_2(p)$ не содержат кратных корней, то условие, сформулированное в теореме 2 является достаточным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод построения передаточной функции модального регулятора по передаточной функции замкнутой системы. Метод использует теорему Безу и схему Горнера и отличается алгоритмической простотой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобцов А. А.* Алгоритм робастного управления линейным объектом по выходу с компенсацией неизвестного детерминированного возмущения / А. А. Бобцов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2003. – № 2. – С. 93–97.

2. *Бобцов А. А.* Алгоритм робастного управления в задаче слежения за командным сигналом с компенсацией паразитного эффекта внешнего неограниченного возмущения / А. А. Бобцов // АиТ. – 2005. – №8. – С. 108–128.

3. *Никифоров В. О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений / В. О. Никофоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69–73.

4. *Никифоров В. О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений / В. О. Никифоров – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.

5. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами / В. О. Никофоров // АиТ. – 2004. – № 10. – С. 13–24.

6. *Лозгачев Г. И.* Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // АиТ. 1995. №5. С.49–55.

7. *Лозгачев Г. И.* Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // АиТ. 2000. №12. С. 15–21.

8. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом// Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 17–20.

9. *Лозгачев Г. И., Безрядин М. М* . Проблема соотношения робастности и качества управления при построении модальных регуляторов. // Кибернетика и высокие технологии XXI века: XII Междунар. науч.-техн. конф., 11–12 мая 2011г. – Воронеж, 2011. – Т.2. – С. 412–416.

10. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах // под ред. К. Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 408 с.

Безрядин Михаил Михайлович – аспирант кафедры Технической Кибернетики и Автоматического Регулирования факультета ПММ ВГУ. E-mail: Maickel@Yandex.ru, тел.: (4732) 20-87-15

Лозгачев Геннадий Иванович – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Технической Кибернетики и Автоматического Регулирования факультета ПММ ВГУ, тел.: (4732) 20-87-15

Bezryadin Mikhail M. – Post-graduate student, the Department of tech nical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, in formation science, and mechanics, the Voronezh State University. E-mail: Maickel@Yandex.ru, tel: (4732)20-87-15

Lozgachev Gennadiy I. – Doctor of engineering sciences, Full professor, Head of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University, tel: (4732) 20-87-15