
ОБ УСЛОВИЯХ ПЛАНАРНОСТИ ГРАФА НА СФЕРЕ

Н. А. Тюкачев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.11.2011 г.

Аннотация. Для моделирования гомогенных трехмерных тел предлагается использовать замкнутую поверхность, состоящую из нерегулярных треугольников (СТИН – closed triangular irregular network). Формулируется и доказывается теорема типа Понтрягина-Куратовского, позволяющая проверять планарность замкнутого графа на сфере.

Ключевые слова: планарность графа на сфере, трехмерные тела.

Annotation. For modeling homogeneous three-dimensional bodies in geo-information systems existing representations are analyzed, and it is offered to use the closed surface consisting of irregular triangles (СТИН – closed triangular irregular network). The theorem of type Pontrjagin-Kuratowski is formulated and proved, allowing to check planar closed the graph on sphere.

Key words: a planar graph on a sphere, three-dimensional body.

Для описания трехмерных объектов в геоинформационных системах (ГИС), системах автоматизированного проектирования (САД/САМ) и во многих других графических системах часто используется граничная модель. Граничная модель (boundary representation) представляет трехмерный объект как систему поверхностей, образующих его границы. Каждая из таких поверхностей описывается неявным уравнением или параметрической функцией с указанием границ изменения координат или параметров, что позволяет определить линии пересечения поверхностей. Граничная модель рассматривает только точки на поверхности тела, не затрагивая его объема.

Для неплоской поверхности в описание могут быть включены сглаживающие поверхностные функции, типа поверхности Безье или В-сплайны, а это приводит к значительному числу сложных геометрических вычислений. Хотя В-гер часто применяется в автоматизированном проектировании (САД/САМ), из-за вычислительной сложности и неэффективных логических операций считается, что В-гер является подходящим только для регулярных и плоских объектов [1]. В ГИС использование В-гер для представления пространственных объектов ограничено, поскольку необходимо, чтобы три фундаментальных пространственных элемента данных (геометрический объект, тематический признак и данные идентификации

объекта) могли сохраняться вместе со связанными с ними топологическими данными.

Частным случаем граничной модели является модель трехмерного тела (рис. 1), у которого граница представляет собой замкнутое множество нерегулярных треугольников (СТИН – closed triangular irregular network). Замкнутую ориентированную поверхность P разобьем на треугольники со следующими условиями: а) каждая точка поверхности P принадлежит хотя бы одному треугольнику; б) два треугольника могут пересекаться только в одной вершине или по целому ребру. Такую модель будем называть СТИН-представлением или СТИН-поверхностью (СТИН – closed triangular irregular network). На рис. 1 представлены верхняя, нижняя и боковая триангулированные поверхности слоя.

Модель СТИН обладает следующими достоинствами:

- в случае изменения координат узловой точки топология поверхности не меняется, как это могло бы в случае использования, например, плоских четырехугольников;
- логические операции над такими телами (объединение, пересечение, вычитание) сводятся к операциям пересечения треугольников;
- результат логических операций над двумя СТИН телами дает СТИН тело;
- требует значительно меньше ресурсов для хранения и вычислений, чем, например, ТЕН-модель, основанная на тетраэдрах.

Эта модель менее всего используется при создании ГИС, но более всего подходит для

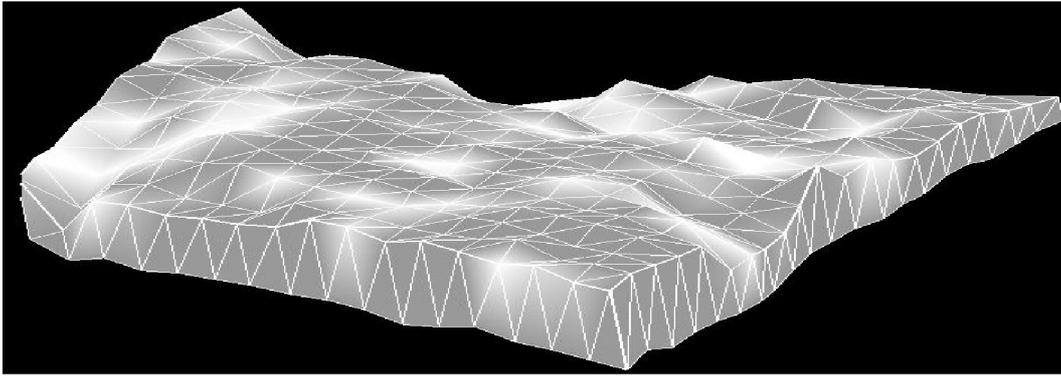


Рис. 1. Пример трехмерной TIN-модели для слоя

описания гомогенных трехмерных областей (например, слоев породы с одинаковой литологией или стратиграфией). Заметим, что такая трехмерная область может быть многосвязной и иметь дырки.

Триангуляция тесно связана с топологией и с теорией графов, в частности, с теорией планарных графов. Поэтому напомним некоторые определения и понятия [3,4].

Пусть X и Y топологические пространства. Гомотопией (или деформацией) называется непрерывное отображение $F: [0,1] \times X \rightarrow Y$ или $F_t: X \rightarrow Y, t \in [0,1]$.

Гомотопные отображения. Отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются гомотопными или $g \approx f$ если существует гомотопия f_t такая, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

Гомотопическая эквивалентность топологических пространств X и Y есть пара непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ такая, что $f \circ g \approx \text{id}_Y$ и $g \circ f \approx \text{id}_X$, здесь \approx обозначает гомотопическую эквивалентность отображений. В этом случае говорят, что X и Y гомотопически эквивалентны, или X с Y имеют один гомотопический тип.

Гомотопический инвариант — это характеристика пространства, которая сохраняется при гомотопической эквивалентности топологических пространств. То есть, если два пространства гомотопически эквивалентны, то они имеют ту же характеристику. Например: связность, фундаментальная группа, эйлерова характеристика. В алгебраической топологии, *эйлерова характеристика* есть топологический инвариант определённый на большом классе топологических пространств. Обычно эйлерова характеристика пространства X обозначается $\chi(X)$. Например окружность и тор имеют характеристику 0,

а шар имеет характеристику 2. Между двумя гомотопическими инвариантами эйлеровой характеристикой χ и связностью g существует связь [2]: $\chi = 2 - 2g$, т.е. эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$.

Графом называется непустое множество $G(X, U)$, где X — множество вершин (узлов) графа; U — множество ребер (дуг) графа,

Граф называется *полным*, если любые две его вершины смежны, т.е. имеют общее ребро.

Говорят, что граф укладывается на поверхности S , если его можно изобразить на S так, что никакие два его ребра не пересекаются в точках, не являющихся вершинами графа [3].

Граф называется *плоским*, если его можно уложить на плоскости. *Планарный граф* — это граф, уложенный на плоскости.

Триангуляцией (triangulation) называется планарный граф, все грани которого являются треугольниками.

Планарный граф, не имеющий петель и кратных ребер, степени вершин которого $\deg(X_i) \geq 3$, и однозначно укладываемый на сфере, называется простым сферическим графом.

Теорема о планарности. Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен.

Приведем известное доказательство этой теоремы, для того чтобы напомнить понятие стереографической проекции. Пусть граф G уложен на сфере. Проведем плоскость Q , касательную к сфере, так, чтобы северный полюс N (точка, диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа G . Теперь рассмотрим граф G , полученный стереографической проекцией графа G из точки N на плоскость Q . Поскольку

существует биективное соответствие между точками сферы, отличными от N , и их стереографическими проекциями, то граф G плоский и изоморфен графу G . Следовательно, G — планарный граф.

Теорема 1. Любой замкнутый простой сферический граф с треугольными гранями изоморфен плоскому графу в треугольнике (рис. 2).

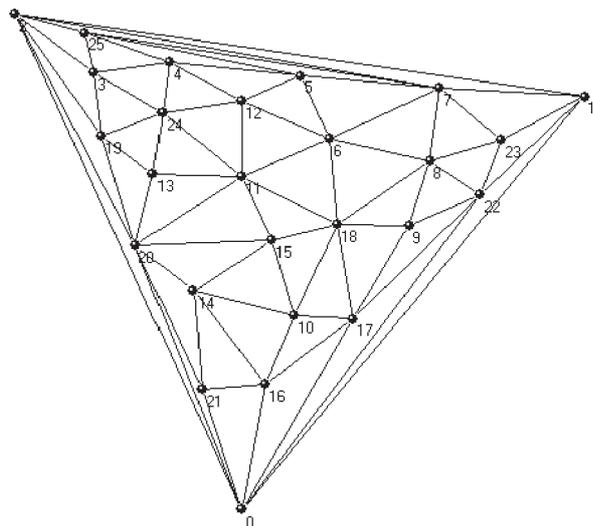


Рис. 2. Плоский граф изоморфный замкнутому планарному графу на сфере

Доказательство. Для замкнутого простого сферического графа любой северный полюс стереографической проекции лежит в треугольнике, например, 012 (рис. 2.22). По свойствам стереографической проекции все остальные узлы, спроецированные на плоскость, лежат внутри этого треугольника.

Для конечного клеточного комплекса (в частности для конечного симплициального комплекса) эйлерова характеристика может быть определена как знакопеременная сумма $\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \dots$, где k_i обозначает число клеток размерности i .

Для двумерных топологических полиэдров $k_0 = V$ — числу вершин, $k_1 = P$ — числу ребер, $k_2 = \Gamma$ — числу граней, поэтому в этом частном случае эйлерова характеристика может быть рассчитана по формуле Эйлера: $\chi = V - P + \Gamma$. В частности, формула Эйлера верна для любого многогранника.

Теорема Эйлера. Для любого планарного графа выполняется соотношение

$$V - P + \Gamma = \chi(S^2) = 2, \quad (1)$$

Определение условий планарности графов — одна из наиболее трудных задач теории

графов. В общем случае решение было предложено Понтрягиным и Куратовским. Чтобы сформулировать их результаты, необходимо ввести определение гомеоморфизма, опирающееся на понятие операции подразделения ребра.

Говорят, что граф $G'(X', U')$ получен из графа $G(X, U)$ операцией подразделения ребра $(x_i, x_j) \in U$ вершиной a , если $X' = X \cup a$, $U' = [U \setminus (x_i, x_j)] \cup [(x_i, a) \cup (a, x_j)]$.

Два графа G_1, G_2 называются гомеоморфными, если существует такой граф G' , который может быть получен как из графа G_1 , так и из G_2 операцией подразделения ребра конечное число раз. Или: графы G_1 и G_2 гомеоморфны, если существуют изоморфные подразделения G_1' и G_2' .

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.

Особенно изящное доказательство этой теоремы дал Куратовский, но, к сожалению, теорема не конструктивна и сложно реализуема на практике. Более конструктивны формулы (3), (4), приведенные, например, в работе [5] для графов с треугольными гранями:

$$\Gamma = 2V - C - 2; \quad (3)$$

$$P = 3V - C - 3, \quad (4)$$

где C — количество ребер (или узлов) на внешней границе графа.

Для незамкнутого планарного графа формулы (3) и (4) также не конструктивны, так как число граничных ребер C может быть любым. Но для замкнутых простых сферических графов с треугольными гранями из теоремы 1 и формул (3), (4) следует

Теорема 2. Для замкнутой триангуляции (СТПН), ограничивающей тело без дырок, которая является простым сферическим графом, справедливы следующие зависимости числа ребер и граней от узлов:

$$\Gamma = 2V - 4; \quad (5)$$

$$P = 3V - 6. \quad (6)$$

Доказательство следует из формул (3), (4) и теоремы 2, согласно которой число граничных ребер для замкнутого на сфере графа равно 3. Число граней следует увеличить на 1, присоединив внешнюю грань, которая тоже является треугольником.

Теорему 2 можно рассматривать как необходимое и достаточное условие планарности на сфере замкнутого графа, которое просто обобщается на тела с g дырками или на N -связные тела.

Теорема 3. Для замкнутой триангуляции (СТН), ограничивающей тело с g дырками или ограничивающей тело, состоящее из $N=1-g$ изолированных частей, справедливы следующие зависимости числа ребер и граней от числа узлов и эйлеровой характеристики χ_g поверхности:

$$\Gamma_g = 2*(B - \chi_g); \quad (7)$$

$$P_g = 3*(B - \chi_g). \quad (8)$$

Напомним, что эйлерова характеристика связана с числом дырок g формулой $\chi_g = 2 - 2*g$, а с числом изолированных частей тела N формулой $\chi_g = 2*N = 2-2*g$, если считать, что $N=1-g$.

Доказательство будем проводить по индукции сначала для тел с g дырками. Рассмотрим триангуляцию тела в окрестности одной из дырок и гомеоморфно преобразуем тело так, чтобы:

- верхнее отверстие дырки образовывало выпуклый $n_{\text{верх}}$ -угольник (на рис. 3 многоугольник проходит через вершины 1-2-3-4-5-6 и $n_{\text{верх}}=6$);
- нижнее отверстие образовывало выпуклый $n_{\text{нижн}}$ -угольник (на рис. 3 многоугольник проходит через вершины 7-8-9-10 и $n_{\text{нижн}}=4$);
- боковая стенка дырки состояла из одного слоя треугольников.

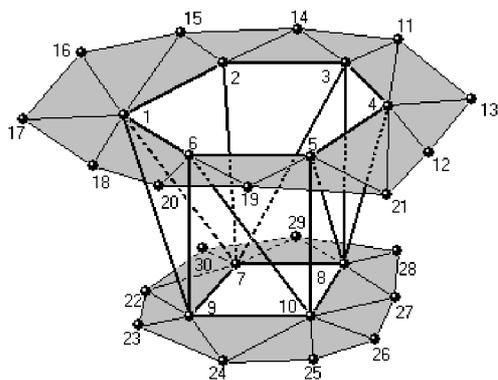


Рис. 3. Триангуляция тела в окрестности одной из дырок

На рис. 4 изображена развертка боковой стенки дырки. Для заклеивания дырки необходимо:

Тюкачев Н. А. – к.ф.-м. н., доцент кафедры Программирования и информационных технологий ФКН, ВГУ. Тел. (4732)208-470. Email: nik@cs.vsu.ru

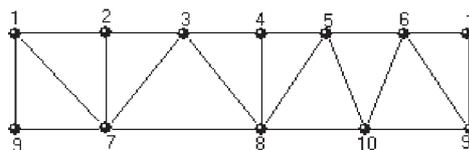


Рис. 4. Развертка боковой стенки дырки

1. разбить на треугольники верхний и нижний выпуклые многоугольники – это добавляет $n_{\text{верх}} - 2 + n_{\text{нижн}} - 2$ граней и $n_{\text{верх}} - 3 + n_{\text{нижн}} - 3$ ребер;
2. выбросить боковую стенку – это уменьшает число граней на $n_{\text{верх}} + n_{\text{нижн}}$, а число ребер – на $n_{\text{верх}} + n_{\text{нижн}}$.

Таким образом, при заклеивании одной дырки число граней уменьшается на 4, а число ребер – на 6:

$$\Gamma_g = \Gamma_{g-1} + 4, \quad (9)$$

$$P_g = P_{g-1} + 6. \quad (10)$$

Заметим, что эти же формулы справедливы и для N -связных тел в силу формул (5), (6) для односвязного тела.

Формулы (5), (6) для $g = 0$ и рекуррентные формулы (9), (10) завершают доказательство теоремы 4.

Заключение. Формулы (5)-(8) могут быть использованы для проверки правильности построения триангуляции замкнутой поверхности или выбора оптимальной ER-модели и, в частности, показывают, что число ребер P для односвязного тела может принимать значение 3, 6, 9, 12, ..., а число граней $\Gamma - 2, 4, 6, 8, 10, \dots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li, R. Data structures and application issues in 3-D geographic information systems. Geomatica. Vol. 48, No. 3, 1994. pp. 209-224
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 759 с.
3. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
4. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. / М. Ласло – М.: БИНОМ, 1997.
5. Скворцов А.В. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. / А.В. Скворцов, Н.С. Мирза. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – 167 с.

Tjukachev N. A. – Candidat of Physics-math. Sciences, Associate Professor, the dept. of the Programming and Information Technologies, VSU. Tel. (4732)208-470. E-mail: nik@cs.vsu.ru